

Programme de colle n° 12

semaine du 13 janvier 2025

Le thème de la colle est « **les deux premiers épisodes d'algèbre linéaire** » = espaces vectoriels et applications linéaires et « **Primitives et calcul d'intégrales** »

Pour les colleurs. Nous n'avons pas encore traité la « dimension ». Donc des résultats comme

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

ne sont pas encore connus des élèves.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Pour les élèves. Je mets en page suivante, pas mal de petits exemples à maîtriser avant d'aller en colle.

- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On a f est injective $\iff \text{Ker } f = \{0_E\}$.
- **Suite récurrente linéaire d'ordre 2.** Soit $b, c \in \mathbb{K}$. Soit $F_{b,c} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\}$.

Savoir montrer rapidement (= donner les grandes lignes de la preuve) que l'application $f : \begin{matrix} F_{b,c} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{matrix}$ est un isomorphisme.

• **Une proposition.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est muni d'une base finie $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.

- f est injective \iff la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .
- f est surjective \iff la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .
- f est bijective \iff la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

- **Un petit théorème des noyaux.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{id}_E)$

• **Projecteur.**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

- On a $\text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Im } p$.
- Le projecteur p fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p \quad \text{que l'on peut encore écrire} \quad E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker } p$$

• **Involution (ou symétrie).**

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une involution.

L'involution s fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$$

• **Forme linéaire et hyperplan.**

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E .

Pour tout vecteur $v_0 \in E$ n'appartenant pas à $\text{Ker } \varphi$, on a

$$E = \text{Ker } \varphi \oplus \text{Vect}(v_0)$$

• **Application linéaire canoniquement associée à une matrice.**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Considérons $f_A : \begin{matrix} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$

(c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A).

Décrire le noyau de f_A .

Déterminer une famille génératrice de $\text{Im } f_A$.

Savoir traiter le cas particulier de la matrice $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$.

Primitives, calcul d'intégrales

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} f(t) dt$ est dérivable et déterminer sa dérivée en fonction de f .

- Savoir déterminer une primitive de Arctan à l'aide d'une IPP à présenter au tableau (sans oublier de dire que les fonctions qui interviennent sont de classe \mathcal{C}^1 !).
- Savoir déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ à l'aide d'un changement de variable utilisant la fonction sinus.

Autres questions qu'il est bon de maîtriser avant d'aller en colle

- Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $H = \{M \in E \mid \text{tr}(M) = 0\}$ et $D = \text{Vect}(I)$. Montrer que H et D sont supplémentaires dans E .
- Déterminer une base de $H = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$.
- Soit $G = \{X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$ où $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer une base de G .
- **Un petit exemple.** Soit $f: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ et déterminer une base de $\text{Im } f$ et de $\text{Ker } f$.
 $(x, y) \mapsto (y, 0)$

- **Deux exemples**

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Montrer que f est un projecteur de \mathbb{R}^2 . A-t-on $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$?
 $(x, y) \mapsto (x - y, 0)$

L'endomorphisme $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-il un projecteur? A-t-on $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$?
 $M \mapsto M + M^T$

Espaces vectoriels

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels

Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Espaces \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace \mathbb{K}^Ω , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.

Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Sous-espace nul. Droite vectorielle.
Plan vectoriel de \mathbb{R}^3 .
Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.

Notation $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

c) Familles finies de vecteurs

Famille génératrice.
Famille libre, liée.

Base, coordonnées.

Ajout d'un vecteur à une famille libre.
Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$.
Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.

Sous-espaces supplémentaires.

La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

C - Applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Application linéaire.
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.
Image d'une application linéaire.
Noyau d'une application linéaire.
Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .
Bilinéarité de la composition.

Notation $\text{Im } u$.
Notation $\text{ker } u$. Caractérisation de l'injectivité.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.

Notations id_E , id .

Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation $GL(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation u^k pour $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Espaces vectoriels isomorphes

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.

Hyperplan. J'ai (volontairement) compliqué, en donnant la définition en dimension quelconque comme étant un sev admettant une droite vectorielle comme supplémentaire. Le programme mentionne « en dim finie ». J'ai donc désobéi!

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

a) Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Intégration par parties, changement de variable.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ a pour dérivée f .

On pourra noter $\int_{x_0}^x f(t) dt$ une primitive générique de f .

Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles

Expression de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et \mathbb{R} des fonctions rationnelles à pôles simples.

La démonstration est hors programme.

Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.