Programme de colle n° 14

semaine du 27 janvier 2025

Le thème de la colle est « **Limites & Continuité** »

Pour les colleurs. Si tout a été correctement traité, et s'il reste 10 minutes, on pourra donner un exo d'arithmétique. Mais attention, le programme d'arithmétique n'est pas celui de MPSI, c'est celui de Terminale. Donc je vous demande de bien regarder le programme officiel : cela n'empêche pas évidemment de poser un exo où l'on doit réfléchir!!!

Limites et continuité

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$ Montrer que f n'admet pas de limite en 0.
- Prouver

  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique (où $T > 0$) ayant une limite finie ℓ en $+\infty$.
  Alors f est constante.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue* telle que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \big(f(x)\big)^2 = 1$. Que dire de f ? Preuve à la clé bien sûr!
- Montrer qu'une fonction décroissante continue définie sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.
- Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-e^x} \end{array}$ Sans étudier les variations de f, montrer que f est bornée.
- Déterminer la limite de $x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ en $+\infty$, puis en 0.
- Soit f une fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ et décroissante.
  Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et les déterminer.
- Dans l'idéal, ce serait bien de connaître/d'expliquer la preuve par dichotomie du TVI. Au moins de faire un dessin, d'introduire les deux suites, et d'expliquer ce qu'il faut faire avec elles sans vouloir absolument tout montrer.

Un peu du chapitre « Arithmétique »

- Savoir prouver le résultat suivant (je propose d'admettre l'inclusion facile (récurrence) et de ne présenter que l'inclusion difficile (division euclidienne)). Attention à ne pas écrire des choses du type $u_{n-p_0q} = u_n$.

  Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique, autrement dit, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+a} = u_n$.
  On note $\mathscr{P}_u$ l'ensemble des périodes de u :

  $$\mathscr{P}_u = \left\{p \in \mathbb{N}^* \mid \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n\right\}$$

  Posons $p_0 = \min \mathscr{P}_u$ (licite, WHY *?). On a $\mathscr{P}_u = p_0\mathbb{N}^*$.*
- Savoir prouver le lemme fondamental du cours d'arithmétique de PCSI :

  Soit $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$. On suppose $a = bq + r$.
  Alors $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$.
  En particulier, $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r)$.

  Rappel : traiter le cas $b = 0$ à part, cas pour lequel $a = r$, et alors tout est trivialement vrai. Puis le cas $b \neq 0$, ce qui assure que a, b sont non tous les deux nuls, et idem pour b, r.

Pour ceux qui s'ennuieraient, reprenez la preuve du résultat suivant

Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv =$ $\mathrm{pgcd}(a,b)$.

Rappel : nous avons traité le cas $b \in \mathbb{N}$ par récurrence en notant $\mathscr{H}_b$ la propriété : « Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = a \wedge b$ ».

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue.	La démonstration est hors programme.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Rudiments d'arithmétique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM.	
Algorithme d'Euclide.	
Nombre premier.	
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.