Programme de colle n° 15

semaine du 3 février 2025

Le thème de la colle est « **Limites & Continuité** »

Pour les colleurs. Si tout a été correctement traité, et s'il reste 10 minutes, on pourra donner un exo d'arithmétique. Mais attention, le programme d'arithmétique n'est pas celui de MPSI, c'est celui de Terminale. Donc je vous demande de bien regarder le programme officiel : cela n'empêche pas évidemment de poser un exo où l'on doit réfléchir!!!

Un peu du chapitre « Arithmétique »

- Savoir prouver le résultat suivant (je propose d'admettre l'inclusion facile (récurrence) et de ne présenter que l'inclusion difficile (division euclidienne)). Attention à ne pas écrire des choses du type $u_{n-p_0q} = u_n$.

  Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique, autrement dit, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+a} = u_n$.
  On note $\mathscr{P}_u$ l'ensemble des périodes de u :

  $$\mathscr{P}_u = \left\{ p \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n \right\}$$

  Posons $p_0 = \min \mathscr{P}_u$ (licite, WHY *?). On a $\mathscr{P}_u = p_0\mathbb{N}^*$.*

- Savoir prouver le lemme fondamental du cours d'arithmétique de PCSI :

  Soit $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$. On suppose $a = bq + r$.
  Alors $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$.
  En particulier, $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(b, r)$.

  Rappel : traiter le cas $b = 0$ à part, cas pour lequel $a = r$, et alors tout est trivialement vrai. Puis le cas $b \neq 0$, ce qui assure que a, b sont non tous les deux nuls, et idem pour b, r.

Polynômes

- Un polynôme 1-périodique est constant, et réciproquement, c'est-à-dire $\left\{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X) = P(X+1) \right\} = \mathbb{K}_0[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les deux égalités remarquables suivantes

  $$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) \qquad \text{et} \qquad X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines *distinctes*, alors $P = 0$.
- Prouver l'énoncé suivante (nous avons fait une preuve par récurrence finie) :

  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts.
  On a l'implication

  $$\alpha_1, \dots, \alpha_r \text{ racines de } P \implies (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r) \text{ divise } P$$

  *L'autre implication est immédiate (*WHY *?).*

- Prouver :

  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. La famille $\left((X - \alpha)^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

  et dans la foulée, prouver la formule de Taylor.

- Prouver

  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$.
  Le scalaire α est racine de multiplicité ***au moins*** *m si et seulement si*

  $$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad P^{(k)}(\alpha) = 0$$

  Il y a m conditions d'annulation $P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0,\ \dots,\ P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.

  Le colleur peut consulter le cours en ligne pour voir la définition de cette locution qui ne nécessite pas P non nul! En revanche, pour définir la multiplicité de α, alors, oui, j'ai besoin de P non nul.

  Rappel : on a fourni une preuve par équivalence, à l'aide de la formule de Taylor.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Image d'un segment par une fonction continue.	
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Rudiments d'arithmétique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM.	
Algorithme d'Euclide.	
Nombre premier.	
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.