Programme de colle n° 17

semaine du 10 mars 2025

Le thème de la colle est « **Polynômes et Dérivation** »

Pour les colleurs. Ne pas interroger pour l'instant sur le chapitre Dénombrement. Seulement pour les questions de cours.

Dérivation

- Preuve du lemme de l'extremum local
- Preuve du théorème de Rolle
- Preuve du théorème des accroissements finis, version valeur absolue et/ou version double inégalité
- Preuve du théorème de la limite de la dérivée (limite finie et infinie).
- Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Savoir donner un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (avec preuve bien sûr).
  On pourra penser à $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$
  Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (la dérivée n'est pas continue en 0)

Convexité

- Étude de la fonction $x \mapsto x^x$ (convexité/concavité, allure de $\mathscr{C}_f$).
- Preuve de l'inégalité de Young :

  Soit a et b deux réels positifs et $(p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Un peu de dénombrement

Soit E un ensemble fini.

- En posant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-arrangements de E est ....
- En notant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-combinaisons de E est ... La preuve repose sur l'égalité « Nb de p-arr. $=$ $p! \times$ Nb. de p-comb. ».
- Le nombre de p-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ est ...
- Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
  - Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.
  - Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Le nombre d'applications bijectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n! & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est fini de cardinal ...
- Relation de Pascal : preuve combinatoire
- Savoir écrire le développement du produit $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ pour $n=4$, puis pour n quelconque :

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} \quad \text{ou encore} \quad \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{I \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \prod_{i \in I} x_i$$

Mieux $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i \in I} x_i$ (l'élève vérifiera que le terme pour $I = \varnothing$ fournit bien 1).

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensemble des polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de X^n-1 dans $\mathbb{C}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions convexes	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	Interprétation géométrique. L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme. Exemples d'inégalités de convexité.
f) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».