Programme de colle n° 18

semaine du 17 mars 2025

Le thème de la colle est « **Dérivation et Dénombrement** »

Pour les colleurs. Le chapitre Dénombrement est difficile. Si vous décidez de poser un exercice de dénombrement, soyez conscients qu'il faudra sûrement (beaucoup) guider l'élève.

Convexité

- Étude de la fonction $x \mapsto x^x$ (convexité/concavité, allure de $\mathscr{C}_f$).
- Preuve de l'inégalité de Young :

  Soit a et b deux réels positifs et $(p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Montrer que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

Un peu de dénombrement

Soit E un ensemble fini.

- En posant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-arrangements de E est ....
- En notant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-combinaisons de E est ... La preuve repose sur l'égalité « Nb de p-arr. $=$ $p! \times$ Nb. de p-comb. ».
- Le nombre de p-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ est ...
- Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
  - Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.
  - Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Le nombre d'applications bijectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n! & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est fini de cardinal ...
- Relation de Pascal : preuve combinatoire
- Savoir écrire le développement du produit $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ pour $n=4$, puis pour n quelconque :

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} \quad \text{ou encore} \quad \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{I\in\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \prod_{i\in I} x_i$$

Mieux $$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i\in I} x_i$$ (l'élève vérifiera que le terme pour $I=\varnothing$ fournit bien 1).

Algèbre linéaire en dimension finie

- Savoir montrer

  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire avec E et F de dimension finie.
  - *On a*
  $$\begin{cases} f \text{ est injective} \\ \dim E = \dim F \end{cases} \Longrightarrow f \text{ est bijective}$$
  Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.
  - *On a*
  $$\begin{cases} f \text{ est surjective} \\ \dim E = \dim F \end{cases} \Longrightarrow f \text{ est bijective}$$
  Une application linéaire surjective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.
- Sous-additivité du rang

  Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ deux applications linéaires avec E ou F de dimension finie.
  On a
  $$\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$
- Savoir montrer le lemme qui précède le théorème du rang (puis en déduire le théorème du rang)

  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie.
  Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.
  Alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.

  Autrement dit, l'application $\widehat{f} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ s & \longmapsto & f(s) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions convexes	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	Interprétation géométrique. L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme. Exemples d'inégalités de convexité.
f) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.