

# Programme de colle n° 19

semaine du 24 mars 2025

Le thème de la colle est « **Dénombrement et algèbre linéaire, dimension finie (sans matrices)** »

**Pour les colleurs.** Le chapitre Dénombrement est difficile. Si vous décidez de poser un exercice de dénombrement, soyez conscients qu'il faudra sûrement (beaucoup) guider l'élève.

Attention, en algèbre linéaire, nous n'avons pas encore vu les matrices d'applications linéaires.

## Algèbre linéaire en dimension finie

- Savoir montrer

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire avec  $E$  et  $F$  de dimension finie.

– On a

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ \dim E = \dim F \end{array} \right. \implies f \text{ est bijective}$$

Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.

– On a

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ \dim E = \dim F \end{array} \right. \implies f \text{ est bijective}$$

Une application linéaire surjective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.

- Sous-additivité du rang

Soit  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$  deux applications linéaires avec  $E$  ou  $F$  de dimension finie.

On a

$$\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

- Savoir montrer le lemme qui précède le théorème du rang (puis en déduire le théorème du rang)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  de dimension finie.

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ .

Alors  $f$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } f$ .

Autrement dit, l'application  $\hat{f}: S \rightarrow \text{Im } f$  est un isomorphisme.

$$s \mapsto f(s)$$

## Analyse asymptotique : les calculs faits en classe (certains seront faits le lundi 24)

Le « montrer que ... admet un DL » pourra être justifié « par opérations »

- Montrer que  $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$  admet un  $\text{DL}_3(0)$  et le déterminer.
- Montrer que  $x \mapsto \ln(1 + e^x)$  admet un  $\text{DL}_3(0)$  et le déterminer.
- Montrer que  $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$  admet un  $\text{DL}_2(0)$  et le déterminer.
- Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de  $\frac{\sin(2x) - \text{sh}(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2}$ .
- Déterminer la limite en 0 de  $\frac{3 \sin x - x \cos x - 2x}{\sin^5 x}$ .
- Déterminons un équivalent de la suite de terme général :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n(n+1)}{1+n^2}$$

- Donner le développement asymptotique à trois termes (ici à la précision  $\frac{1}{x}$ ) de  $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ .  
Qu'en déduit-on concernant  $\mathcal{C}_f$  ?

## B - Espaces de dimension finie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  engendre  $E$  et si  $(x_i)_{i \in I}$  est libre pour une certaine partie  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$ , alors il existe une partie  $J$  de  $\{1, \dots, n\}$  contenant  $I$  pour laquelle  $(x_j)_{j \in J}$  est une base de  $E$ .

Existence de bases en dimension finie.

Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

### b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de  $n + 1$  vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimension de  $\mathbb{K}^n$ , de  $\mathbb{K}_n[X]$ , de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension  $n$ , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de  $n$  vecteurs.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

### c) Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

## C - Applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Notation  $\text{Im } u$ .

Noyau d'une application linéaire.

Notation  $\text{ker } u$ . Caractérisation de l'injectivité.

Si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille finie génératrice de  $E$  et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$ .

Application linéaire de rang fini.

Notation  $\text{rg}(u)$ .

Le rang de  $v \circ u$  est majoré par  $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$ . Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

**b) Endomorphismes**

Identité, homothéties.

Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par  $p^2 = p$ , par  $s^2 = \text{id}$ .

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notations  $\text{id}_E$ ,  $\text{id}$ .

Notation  $u^k$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation  $\text{GL}(E)$ . On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation  $u^k$  pour  $u \in \text{GL}(E)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

**c) Détermination d'une application linéaire lorsque  $E$  est de dimension finie**

Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  de dimension finie et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ , alors il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $u(e_i) = f_i$ .

Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de  $u$ .

La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces de  $E$  tels que  $E = E_1 \oplus E_2$ , si  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ ,  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ , il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  coïncidant avec  $u_1$  sur  $E_1$  et avec  $u_2$  sur  $E_2$ .

**d) Théorème du rang**

Forme géométrique du théorème du rang : si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $S$  est un supplémentaire de  $\ker u$  dans  $E$ , alors  $u$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } u$ .

Théorème du rang : si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $n = \dim \ker u + \text{rg}(u)$ .

**f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie**

Forme linéaire.

Hyperplan.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite non contenue dans  $H$ , alors  $E = H \oplus D$ .

## Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

#### a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations  $|A|$ ,  $\text{card}(A)$ .

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.  
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

---

#### b) Listes et combinaisons

Nombre de  $p$ -listes (ou  $p$ -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal  $n$ , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre de parties à  $p$  éléments (ou  $p$ -combinaisons) d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.