Programme de colle n° 2

semaine du 30 septembre 2024

Le thème de la colle est « début de l'année : logique », la trigonométrie, et les nombres complexes.
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Remarque pour les colleurs. Les symboles Σ et $\prod$ ont été vus cette semaine. Ne donnez pas d'exercices sur ce thème, s'il vous plaît. Continuez à interroger sur les premiers chapitres. Merci.

Preuves et petits exercices à connaître (questions de difficulté inégale...)

Début de l'année

- Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x = y \iff \left(\forall t \in \mathbb{R},\ xt = yt\right)$
- Montrer l'égalité d'ensembles $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R}^-,\ x = t^2 + 1\right\} = [1, +\infty[$
- Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire
- Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$.
  Déterminer, en fonction de y, l'ensemble des solutions de l'équation $-x + \sqrt{x^2+3} = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Nombres complexes et trigonométrie

- Formule de l'angle moitié et les formules du type $\cos p + \cos q$ qui s'en déduisent.
- Énoncé de l'inégalité triangulaire avec cas d'égalité. Connaître la démonstration de l'inégalité (le cas d'égalité n'est pas exigible).
- Linéariser $\sin^3 \theta$.
- Soit $\theta \in [0, 2\pi[\ \setminus \{\pi\}$. Donner la forme trigonométrique de $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ en fonction de θ.
- Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^z = a$.
- Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.
- Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $21 - 20\mathrm{i}$.
- Les racines cubiques de l'unité sont

$$1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \bar{\mathrm{j}}$$

- Preuve de $\mathbb{U}_n = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right\}$.

"Calculs"

- Le coefficient binomial est un entier : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}\ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$
- Preuve de la formule du binôme de Newton
- Preuve des formules suivantes (exercice vu en classe). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p+1}$$

  On a :

$$S_n = 2^{n-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^{n-1}$$

- Preuve des deux formules suivantes (exercice vu en classe).
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

Contenus	Capacités & commentaires
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition	

Contenus	Capacités & commentaires
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	

Nombres complexes (la totale)

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Opérations sur les nombres complexes.	
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\|z-z'\|$, cercles et disques.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.	

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n-ièmes

Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.

Compléments de calcul algébrique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.