Programme de colle n° 21

semaine du 7 avril 2025

Le thème de la colle est « **Analyse asymptotique et Algèbre linéaire en dimension finie (avec un peu de matrices d'application linéaire)** »

Pour les colleurs. Le cours sur les matrices d'applications linéaires a été vu, le TD a été tout juste commencé en vendredi).

Analyse asymptotique : les calculs faits en classe (certains seront faits le lundi 24)

Le « montrer que ... admet un DL » pourra être justifié « par opérations »

- Un équivalent de la suite implicite (x_n) où $\mathrm{e}^{x_n} + x_n = n$. Et puis, ensuite, si l'élève s'en sent la force, un DA à deux termes.

Algèbre linéaire

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

  Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où r est à déterminer en fonction de p.
- La matrice suivante est inversible, n'est-ce pas ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Sans effort (c'est-à-dire sans calcul, sans pivot de Gauss), déterminer son inverse.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$, alors A est inversible et on a $A^{-1} = B$ (on a alors $BA = I_n$).
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  On a

$$A \text{ est inversible} \iff \text{l'équation } AX = 0 \text{ possède une unique solution, à savoir la colonne nulle}$$

  c'est-à-dire :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \Big[\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \big(AX = 0 \implies X = 0\big)\Big]$$

  Autrement dit, A est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- Question qui sera traitée lundi. Considérons la matrice A_3 (3 car on est en Piston 3 !) suivante :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Donner une base de l'image, et son rang. Puis dans la foulée, donner une base de son noyau (utiliser th du rang et trouver une famille libre du noyau de bon cardinal).

Des petites choses en intégration

- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, non nulle et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$.
  Montrer que f est constante égale à 1 (cf. correction page suivante).
- Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que g est positive.
  Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que (cf. correction page 3).

$$\int_{[a,b]} fg = f(c) \int_{[a,b]} g$$

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. Lien entre ces relations.	Notations $$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$ La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α, $\mathrm{e}^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
c) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
d) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Posons $g = f - f^2$. Autrement dit, $g : t \mapsto f(t) - f(t)^2$.
On a

- g est continue par opérations (car f est continue)
- g est positive, car f est à valeurs dans $[0,1]$
- $\displaystyle\int_0^1 g = 0$ par hypothèse

D'après le théorème aux trois hypothèses, on en déduit que g est la fonction nulle.
Donc $f = f^2$.
Attention ici, à ne pas dire soit $f = 0$, soit $f = 1$!!!!
D'où $\forall\, t \in [0,1],\ \Big(f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1\Big)$
Ainsi l'image de f est incluse dans $\{0,1\}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction continue f est un intervalle, qui est donc soit le singleton $\{0\}$, soit le singleton $\{1\}$.
Aurement dit, on a

$$\Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 0\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 1\Big)$$

Comme f n'est pas nulle dans l'énoncé, on en déduit que f est constante égale à 1.

Posons

$$\varphi : x \longmapsto \int_a^b fg - f(x)\int_a^b g \quad = \quad \int_a^b \big(f(t)-f(x)\big)\, g(t)\mathrm{d}t$$

On veut montrer qu'il existe c tel que $\varphi(c)=0$.

Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M tels que

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad f(x_M) = \max_{[a,b]} f$$

D'où

$$\forall\, t \in [a,b], \qquad f(t)-f(x_m) \geqslant 0$$

D'où, en multipliant par $g(t) \geqslant 0$,

$$\forall\, t \in [a,b], \qquad \big(f(t)-f(x_m)\big)g(t) \geqslant 0$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b \big(f(t)-f(x_m)\big)\, g(t)\mathrm{d}t \;\geqslant\; 0$$

c'est-à-dire $\varphi(x_m) \geqslant 0$.
On montre de même que $\varphi(x_M) \leqslant 0$.
Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par φ.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 est atteint par φ.
Autrement dit, il existe $c \in [\overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{x_m, x_M}]$ tel que $\varphi(c)=0$.

Autre solution.
On distingue deux cas.
• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$. Alors d'après le « critère de nullité » (toutes les hypothèses sont réunies), g est la fonction nulle.

• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale (savoir d'où cela sort), on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t > 0$.
Montrons que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \quad \text{est une valeur intermédiaire pour } f.$$

Sur le segment $[a,b]$, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes, disons $m = f(x_m)$ et $M = f(x_M)$.
On a

$$\forall\, t \in [a,b], \quad m \leqslant f(t) \leqslant M$$

puis, en multipliant par $g(t) \geqslant 0$,

$$\forall\, t \in [a,b], \quad mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$

Par croissance de l'intégrale,

$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

D'où en divisant par $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ qui est >0

$$f(x_m) = m \;\leqslant\; \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \;\leqslant\; M = f(x_M)$$

Ainsi $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$ est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, c'est une valeur atteinte par f. Autrement dit, il existe $c \in [\overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{x_m, x_M}] \subset [a,b]$ tel que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} = f(c)$$