Programme de colle nº 23

semaine du 5 mai 2025

Le thème de la colle est « **intégration** »

Pour les colleurs. Nous n'avons fait que quelques exercices d'intégration (consultez le cours pour voir ce qui a été fait). Soyez indulgents.

Un peu d'intégration

- Théorème fondamental de l'analyse
- Taylor reste intégral (par récurrence, ou bien par somme télescopique, au choix de l'élève).
- Soit $x \in [0, +\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

  Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite vaut $\ln 2$.

- Savoir énoncer le théorème des Sommes de Riemann et déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Un peu de probas

- Prouver l'énoncé suivant

  Proposition.
  - Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On a

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = 1$$

  - Réciproquement, si Ω est un univers fini, et si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels de $[0,1]$ telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = p_\omega$$

- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités totales.
- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités composées.
- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
  On tire au hasard s boules **sans** remise (avec $s \leqslant n$).
  Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note E_k l'événement « le plus grand numéro obtenu est égal à k ».
  - Déterminer la probabilité de E_k.
  - En utilisant le SCÉ $(E_1, \ldots, E_n)$, retrouver une formule bien connue.

  Quelle formule connue trouve-t-on en exploitant le fait que $(E_1, \ldots, E_n)$ est un SCÉ ?
- Même exercice que le précédent **avec** remise.
- Savoir prouver l'exercice suivant

  Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements.
  - Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors A et B sont indépendants.
    Un événement négligeable est indépendant de n'importe quel événement.
  - Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors A et B sont indépendants.
    Un événement presque sûr est indépendant de n'importe quel événement.

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a, b]$, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Taylor-Lagrange.	