Programme de colle n° 24

semaine du 12 mai 2025

Le thème de la colle est « **intégration et un peu de probas finis** » **Pour les colleurs.** SANS variables aléatoires. Merci de lire le programme officiel ci-après.

Un peu d'espace euclidien

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité avec démonstration
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité avec démonstration
- Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre. En particulier, une famille orthonormée de E est libre.
- Savoir prouver

  Soit E un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
  Alors $E = F \oplus F^\perp$

  Pour être sûre que tout le monde s'y retrouve, je redonne la preuve à la fin de ce pdf.
- Savoir prouver

  Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
  Soit f une forme linéaire sur E.
  Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a \mid x \rangle$.
  Et l'expliciter dans la base $\mathscr{B}$.
- Savoir prouver

  Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie).
  Soit F un sev de E. Alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ *et* $(F^\perp)^\perp = F$
- Savoir prouver

  Soit $x \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
  Notons p_F la projection orthogonale sur F.
  La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

  Autrement dit :
  $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$
  $\forall y \in F, \quad \Big(d(x,F) = \|x - y\| \implies y = p_F(x)\Big)$
- Expliquer toute la démarche pour déterminer (je ne demande pas de faire les calculs) :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(t - (a\cos t + b\sin t)\Big)^2 \, \mathrm{d}t.$$

- Savoir ENONCER proprement Gram-Schmidt. Et savoir l'appliquer dans un cas concret (je ne demande pas de connaître la preuve formalisée).

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Taylor-Lagrange.	

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Montrons que $E = F \oplus F^{\perp}$.
Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.
Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.

BUT. On cherche à exprimer y en fonction de x et $\mathscr{B}$.

– Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.
  On a
$$y = \sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle \, e_k$$
– Montrons que $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.
  En appliquant $\langle \bullet \mid e_k \rangle$ à l'égalité $x = y + z$, on a :
$$\forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad \langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle + \langle z \mid e_k \rangle$$
  Comme $z \in F^{\perp}$ et $e_k \in F$, on a $\langle z \mid e_k \rangle = 0$.
  D'où, $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.

Ainsi, $\quad y = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$.

Synthèse. Posons $y = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$ et $z = x - y$.
Alors
– $x = y + z$
– $y \in F$ car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
– $z \in F^{\perp}$ car
$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \langle z \mid e_i \rangle = \langle x - y \mid e_i \rangle = \langle x \mid e_i \rangle - \langle y \mid e_i \rangle \overset{\text{WHY}}{=} 0$$
  Justifions la dernière égalité sans calcul, càd montrons sans effort que $\langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle$.
  D'une part, on a par définition $y = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$.
  D'autre part, comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une BON, y s'écrit $\sum\limits_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle e_k$.
  Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a alors $\langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle$.