Programme de colle n° 25

semaine du 19 mai 2025

Le thème de la colle est « **probas finis et espace euclidien** » **Pour les colleurs.** SANS variables aléatoires. Merci de lire le programme officiel ci-après.

Un peu d'espace euclidien

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité avec démonstration
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité avec démonstration
- Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre. En particulier, une famille orthonormée de E est libre.
- Savoir prouver

  Soit E un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
  Alors $E = F \oplus F^{\perp}$

  Pour être sûre que tout le monde s'y retrouve, je redonne la preuve à la fin de ce pdf.
- Savoir prouver

  Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
  Soit f une forme linéaire sur E.
  Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\quad \forall x \in E, \quad f(x) = \langle a \mid x \rangle$.
  Et l'expliciter dans la base $\mathscr{B}$.
- Savoir prouver

  Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie).
  Soit F un sev de E. Alors $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E \quad$ et $\quad (F^{\perp})^{\perp} = F$
- Savoir prouver

  Soit $x \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
  Notons p_F la projection orthogonale sur F.
  La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

  Autrement dit :
  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$
  $\forall y \in F, \quad \Big(d(x, F) = \|x - y\| \implies y = p_F(x) \Big)$
- Expliquer toute la démarche pour déterminer (je ne demande pas de faire les calculs) :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(t - (a \cos t + b \sin t) \Big)^2 \mathrm{d}t.$$

- Savoir ENONCER proprement Gram-Schmidt. Et savoir l'appliquer dans un cas concret (je ne demande pas de connaître la preuve formalisée).

Des petites choses sur les séries

- Preuve de la convergence d'une série géométrique dans le cas où la raison est…
- Preuve de la nature d'une série de Riemann :

  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\text{la série } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

- Apprendre la preuve et la **rédaction** (lire votre cahier) de :

  Soit $z \in \mathbb{C}$ Montrer que les séries $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

- La preuve dans le cas d'une suite réelle de :

  Une série absolument convergente est convergente.
- Développement asymptotique à deux termes de la série harmonique.
- Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x,F)$.

Montrons que $E = F \oplus F^{\perp}$.
Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.
Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.

BUT. On cherche à exprimer y en fonction de x et $\mathscr{B}$.

- Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
  On a
  $$y = \sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle \, e_k$$
- Montrons que $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.
  En appliquant $\langle \bullet \mid e_k \rangle$ à l'égalité $x = y + z$, on a :
  $$\forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad \langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle + \langle z \mid e_k \rangle$$
  Comme $z \in F^{\perp}$ et $e_k \in F$, on a $\langle z \mid e_k \rangle = 0$.
  D'où, $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.

Ainsi, $\quad y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$.

Synthèse. Posons $y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$ et $z = x - y$.
Alors
- $x = y + z$
- $y \in F$ car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- $z \in F^{\perp}$ car
  $$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \langle z \mid e_i \rangle = \langle x - y \mid e_i \rangle = \langle x \mid e_i \rangle - \langle y \mid e_i \rangle \overset{\text{WHY}}{=} 0$$
  Justifions la dernière égalité sans calcul, càd montrons sans effort que $\langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle$.
  D'une part, on a par définition $y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$.
  D'autre part, comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON, y s'écrit $\sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle e_k$.
  Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a alors $\langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle$.