Programme de colle n° 26

semaine du 2 juin 2025

Le thème de la colle est **« espace euclidien et séries »**
Pour les colleurs. Merci de lire le programme officiel ci-après.

Des petites choses sur les séries

- Preuve de la convergence d'une série géométrique dans le cas où la raison est...
- Preuve de la nature d'une série de Riemann :

  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a
  $$\text{la série} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$
- Apprendre la preuve et la rédaction de :

  Soit $z \in \mathbb{C}$ Montrer que les séries $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et que
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
- La preuve dans le cas d'une suite réelle de :

  Une série absolument convergente est convergente.
- Développement asymptotique à deux termes de la série harmonique.
- Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Des petites choses sur les variables aléatoires

- On lance deux dés équilibrés.
  Notons X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus.
  Déterminer la loi conjointe et les deux lois marginales.
- On lance un dé équilibré.
  On note X la variable égale au numéro obtenu.
  On note A l'événement « le numéro est pair ».
  Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A.
- On considère X et Y deux VA indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
  Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
- Somme de deux binomiales indépendantes.
- Espérance et variance des lois usuelles (à piocher parmi Uniforme, Bernoulli, Binomiale).
- Preuve de Koenig-Huygens

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\vert y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\Vert x+y\Vert^2 = \Vert x\Vert^2 + \Vert y\Vert^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x,F)$.

Séries numériques

Cette section a pour but de prolonger l'étude des suites et de permettre d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique pour étudier les séries numériques. La notion de suite sommable est introduite mais n'appelle aucun développement théorique.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	 Divergence grossière. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Relation $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.	On note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables	
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n).	Notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n \rvert < +\infty$. Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Somme d'une suite sommable.