

Programme de colle n° 3

semaine du 7 octobre 2024

Remarque pour les colleurs.

Le thème de la colle est « nombres complexes » et le chapitre « Calculs » qui inclut la manipulation des coefficients binomiaux.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Nous n'avons pas encore beaucoup travaillé sur le TD « applications ».

Je vous propose d'insister sur le chapitre « calculs », en manipulant éventuellement les nombres complexes en même temps!

Preuves et petits exercices à connaître (questions de difficulté inégale...)

Nombres complexes et trigonométrie

- Preuve de $\cup_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in [0, n-1], z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right\}$.

Un peu du chapitre « Calculs »

- Le coefficient binomial est un entier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z} \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$
- Preuve de la formule de Bernoulli
- Preuve de la formule du binôme de Newton
- Preuve des formules suivantes (exercice vu en classe). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{2p} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{2p+1}$$

On a :

$$S_n = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad T_n = 2^{n-1}$$

- Preuve des deux formules suivantes (exercice vu en classe).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

Un peu du chapitre « Applications »

- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde est une surjection.
- Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective) alors f est injective (resp. g est surjective).
- Si $f \in F^E$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- **Chaussettes et chaussures.** Si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Vérifier que f est bien définie.

Puis montrer que f est bijective.

- Soit $\varphi: E \rightarrow F$ et $\psi: F \rightarrow E$ deux applications telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ est bijective. Montrer, « sans se fatiguer », que φ et ψ sont bijectives.

Compléments de calcul algébrique

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Exemples de sommes triangulaires.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.

Formule du binôme dans \mathbb{R} .

Nombres complexes (la totale)

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire.

La construction de \mathbb{C} est hors programme.

Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation

de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

On identifie \mathbb{C} au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Image du conjugué dans le plan complexe.

Module.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Notation \mathbb{U} .

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.
Résolution des équations du second degré dans \mathbb{C} .
Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation \mathbb{U}_n .
Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.
Exponentielle d'une somme.
Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations.

Interprétation géométrique de la conjugaison.

L'étude générale des similitudes est hors programme.