# Programme de colle n° 4

**semaine du 13 octobre 2025**

**Remarque pour les colleurs.**
Le thème de la colle est « calculs algébrique », « Applications, Ensembles ». et « généralités sur les fonctions réelles » (càd fonctions de Terminale). **PAS** de fonctions usuelles pour l'instant
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

## Preuves et petits exercices à connaître (questions de difficulté inégale...)

### Un peu du chapitre « Applications »

- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde est une surjection.
- Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective) alors $f$ est injective (resp. $g$ est surjective).
- Si $f \in F^E$ est bijective, alors $f^{-1}$ est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- **Chaussettes et chaussures.** Si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et :
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$
- Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

  Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$

  Vérifier que $f$ est bien définie.
  Puis montrer que $f$ est bijective.
- Soit $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ deux applications telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ est bijective.
  Montrer, « sans se fatiguer », que $\varphi$ et $\psi$ sont bijectives.

### Un peu du chapitre « Fonctions réelles »

- Soit $D$ une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
  Si $f$ est strictement monotone, alors elle est injective.
- Soit $f : X \to Y$ une bijection où $X, Y$ sont des parties de $\mathbb{R}$.
  Si $f$ est strictement monotone, alors $f^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que $f$.
- Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors :
$$f \text{ est bornée} \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \left|f(x)\right| \leqslant K$$
- Soit $f : X \to \mathbb{R}$.
  Si $f$ est strictement monotone, alors $f$ induit une bijection de $X$ dans $f(X)$, notée $\widehat{f}$.
  De plus, la bijection réciproque $\widehat{f}^{-1} : f(X) \to X$ est strictement monotone, de même sens de variation que $f$.

  **Précision pour vous aider à comprendre.** Le verbe « induire » signifie « provoque la naissance »
  • Si $f$ est strictement monotone, alors $f$ fait naître une bijection de $X$ dans $f(X)$, notée $\widehat{f}$.
  C'est l'application $\widehat{f} : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & f(X) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

  • Autrement dit, encore.
  Posons $\widehat{f} : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & f(X) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. Si $f$ est strictement monotone, alors $\widehat{f}$ est bijective.

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **b) Ensembles** | |
| Ensemble, appartenance. Ensemble vide.<br>Inclusion. Partie (ou sous-ensemble). | |
| Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire. | Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et $A^c$ pour le complémentaire. |
| Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. | |
| Ensemble des parties d'un ensemble. | Notation $\mathscr{P}(E)$. |
| Recouvrement disjoint, partition | |

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **d) Applications** | |
| Application d'un ensemble dans un ensemble.<br>Graphe d'une application. | Le point de vue est intuitif : une application de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un unique élément de $F$.<br>Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.<br>Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et $F^E$. |
| Famille d'éléments d'un ensemble. | |
| Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. | Notation $\mathbb{1}_A$. |
| Restriction et prolongement. | Notation $f\|_A$. |
| Image directe. | Notation $f(A)$. |
| Image réciproque. | Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre. |
| Composition.<br>Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. | |
| Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée. | Notation $f^{-1}$. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque. |

## Compléments de calcul algébrique

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Sommes et produits** | |
| Somme et produit d'une famille finie de nombres réels. | Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où $I$ est vide. |
| Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. | Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension. |
| Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.<br>Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$. | |
| Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. | Exemples de sommes triangulaires. |
| Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.<br>Formule du binôme dans $\mathbb{R}$. | Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$. |

**Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes**

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Généralités sur les fonctions** | |
| Ensemble de définition. | |
| Représentation graphique d'une fonction $f$ à valeurs réelles. | Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de $f$ celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$. |
| Parité, imparité, périodicité. | Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude. |
| Somme, produit, composée. | |
| Monotonie (large et stricte). | |
| Fonctions majorées, minorées, bornées. | Traduction géométrique de ces propriétés.<br>La fonction $f$ est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée. |