Programme de colle n° 5
semaine du 3 novembre 2025

Remarque pour les colleurs.
Le thème de la colle est « généralités sur les fonctions réelles » et « fonctions usuelles ».
Nous n'avons traité qu'un seul exercice sur les fonctions usuelles, donc soyez bienveillants.
Il y a bien sûr les exemples du cours.
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Preuves et petits exercices à connaître

Un peu du chapitre « Fonctions réelles »

- Soit D une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
  Si f est strictement monotone, alors elle est injective.
- Soit $f : X \to Y$ une bijection où X, Y sont des parties de $\mathbb{R}$.
  Si f est strictement monotone, alors f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f.
- Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors :
$$f \text{ est bornée } \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \left|f(x)\right| \leqslant K$$
- Soit $f : X \to \mathbb{R}$.
  Si f est strictement monotone, alors f induit une bijection de X dans $f(X)$, notée $\widehat{f}$.
  De plus, la bijection réciproque $\widehat{f}^{-1} : f(X) \to X$ est strictement monotone, de même sens de variation que f.

  Précision pour vous aider à comprendre. Le verbe « induire » signifie « provoque la naissance »
  • Si f est strictement monotone, alors f fait naître une bijection de X dans $f(X)$, notée $\widehat{f}$.
  C'est l'application $\widehat{f}: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & f(X) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

  • Autrement dit, encore.
  Posons $\widehat{f}: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & f(X) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. Si f est strictement monotone, alors $\widehat{f}$ est bijective.

Un peu du chapitre « Fonctions usuelles »

- Preuve de $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- Deux preuves de (en utilisant la dérivation, puis sans dériver avec la définition de Arctan)
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
- Étude de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$.
- Présentation d'une ou deux fonctions (définition, ensemble de définition, ensemble de dérivabilité, dérivée, tableau de variations, graphe et principales propriétés) parmi Arctan, Arcsin, Arccos, ch, sh et $x \mapsto x^{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch.	Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	