Programme de colle n° 6

semaine du 11 novembre 2024

Remarque pour les colleurs.
Le thème de la colle est « fonctions usuelles » et « nombres réels ».
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Un peu du chapitre « Fonctions usuelles »

- Preuve de $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- En **admettant** que $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, savoir prouver $\frac{(\ln x)^b}{x^a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ pour $a, b > 0$.
- Définition de la fonction Arctangente ; variations ; graphe ; dérivabilité
- Définition de la fonction Arcsinus ; variations ; graphe ; dérivabilité
- Définition de la fonction Arccosinus ; variations ; graphe ; dérivabilité
- Deux preuves de (en utilisant la dérivation, puis sans dériver avec la définition de Arctan)

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Étude de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$.
- Présentation des fonctions ch et sh : définition, variations, graphe, dérivabilité
- Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles dérivables sur I.
  Montrer que la fonction complexe $f : t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$ est dérivable sur I et donner sa dérivée.

Un peu du chapitre « Nombres réels »

- Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que $\forall a \in A, \ \forall b \in B, \ a \leqslant b$.
  Montrer que A est majorée, que B est minorée et montrer que $\sup A \leqslant \inf B$.
- Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On définit la partie $A + B$ comme on imagine.
  Montrer $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ en ayant justifié l'existence des bornes sup.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch.	Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

Nombres réels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	