

Programme de colle n° 8

semaine du 25 novembre 2024

Remarque pour les colleurs.

Le thème de la colle est « matrices et systèmes linéaires » et encore un peu de « nombres réels ».

le critère d'inversibilité en terme de $AX = 0$ (avec le noyau, donc!) n'a pas encore été vu. Et pour la plupart des exercices, on peut s'en passer.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Un peu du chapitre « matrices »

- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaison linéaire et par produit. Idem pour triangulaires inférieures et diagonales.
- Toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'implication

$$\left(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(AM) = 0 \right) \implies A = 0$$

- À quelle condition (nécessaire et suffisante), la matrice $T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array} \right]$ est-elle inversible? Preuve.

- Montrer, à la main, que la matrice $U = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & a & b & c & d \\ 0 & 1 & e & f & g \\ 0 & 0 & 1 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ est inversible et que $V = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & a & b & c & d \\ 0 & 1 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ ne l'est pas.

- Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. On a l'équivalence

$$A \in \text{GL}_2(\mathbb{K}) \iff ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

On pourra utiliser le lemme suivant :

Pour une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ quelconque carrée de taille 2, on a l'égalité

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0$$

- Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \end{cases}$ (pour les élèves : tous les calculs sont sur le poly!).

Un peu (beaucoup?!) du chapitre « Suites numériques »

- Preuve epsilonlesque de :
Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $u_{2n} \rightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.
- Preuve epsilonlesque de l'unicité de la limite :
Soit u une suite et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \rightarrow \ell_1$ et $u_n \rightarrow \ell_2$. Alors $\ell_1 = \ell_2$.
- Enoncé et preuve du théorème des Gendarmes.
- Preuve du théorème de la limite monotone (disons pour une suite croissante).
- Preuve du théorème de convergence des suites adjacentes.
- Savoir faire les calculs de cet exercice :

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ Déterminer u_n en fonction de n .

- Savoir refaire cet exercice :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, prouver que l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n .
Montrer que la suite (x_n) est monotone.*
- Savoir refaire ce mini-exercice :
Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$ Donner une expression de u_n .

Nombres réels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Notations $\sup X$, $\inf X$.
On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.
Matrices élémentaires.

Produit matriciel; bilinéarité, associativité.

Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Transposée d'une matrice.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .
Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.

Notation A^T .

b) Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.

c) Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.
Système compatible.

Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A .

On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

d) Ensemble des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrice identité, matrice scalaire.
Matrices symétriques, antisymétriques.
Formule du binôme.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.

Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.

Notation I_n .

Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Application au calcul de puissances.

CONTENUS

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.

Inverse d'une transposée.

Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Notation $GL_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Toute technicité est exclue.

Cas particulier des matrices diagonales.