Nombres complexes

03c-Complexes.pdf, 18 septembre 2024, 15:12

I. L'ensemble des nombres complexes

Définition de $\mathbb{C}$

La construction de l'ensemble des nombres complexes est hors-programme.
On admet donc qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$,

— muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$, ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$), avec lesquelles on calcule comme dans $\mathbb{R}$,

— possédant un élément noté i dont le carré vaut -1,

— dont tout élément, appelé *nombre complexe* ou *complexe*, s'écrit de manière unique sous la forme $x + \mathrm{i} \cdot y$ ou encore $x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.

Ainsi :

— pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathrm{i}y$; les réels x et y sont alors respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* du complexe z, et l'on note alors :

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im} z\,;$$

— si $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et si l'on pose $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $x' = \operatorname{Re} z'$, $y' = \operatorname{Im} z'$, alors (en utilisant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$) on a :

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y') \\ z\,z' &= (x\,x' - y\,y') + \mathrm{i}\,(x\,y' + y\,x')\,; \end{aligned}$$

— un complexe z est réel si et seulement si $\operatorname{Im} z = 0$ (autrement dit le réel x s'identifie au nombre complexe $x + 0\,\mathrm{i}$) ;

— en particulier, le complexe $0 + 0\,\mathrm{i}$ se note simplement 0. Il coïncide avec le 0 de $\mathbb{R}$. Un nombre complexe z est nul s'il est égal à 0, ce qui est encore équivalent à $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$;

— les complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés *imaginaires purs* ; z est donc imaginaire pur si, et seulement si, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{i}y$.
L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Conséquences de l'unicité de l'écriture

— Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

— On a, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z' & \text{et} & \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z', \\ \operatorname{Re}(z\,z') = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} z' - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} z' & \text{et} & \operatorname{Im}(z\,z') = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z' + \operatorname{Re} z' \operatorname{Im} z. \end{array}$$

— Pour tout complexe z, le complexe $-z = -\operatorname{Re} z - \mathrm{i} \operatorname{Im} z$ est appelé opposé de z. C'est l'unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$.

— Tout complexe $z \neq 0$ possède un inverse unique (pour la multiplication) car, si $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$, alors :

$$z' = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i \quad \text{vérifie} \quad z\,z' = z'\,z = 1.$$

Cet inverse z' est noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

— On en déduit, comme dans $\mathbb{R}$, que si les complexes z et z' vérifient $z\,z' = 0$, alors on a $z = 0$ ou $z' = 0$.
En effet, si $z \neq 0$, alors en multipliant l'égalité $z\,z' = 0$ par z^{-1}, on obtient $z' = 0$.

Attention.
Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'une relation d'ordre compatible avec les opérations, c'est-à-dire pour laquelle le produit de deux nombres positifs est positif et l'opposé d'un nombre positif est négatif.

Représentation géométrique

Munissons le plan usuel d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Tout point M est caractérisé par un unique couple de coordonnées (x, y) vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$:
  - — le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est alors appelé *affixe de* M ;
  - — le point M est appelé *l'image de* z et est souvent noté M_z.
- Pour un vecteur $\vec{u}$ s'écrivant $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est appelé *affixe du vecteur* $\vec{u}$.

Conjugué

1

Définition. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *conjugué* de z le complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = \operatorname{Re} z - \mathrm{i} \operatorname{Im} z$.

2

Proposition (Parties réelle et imaginaire en fonction du conjugué).
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

3

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a les équivalences

$$z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z \qquad \text{et} \qquad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$$

Un nombre complexe est réel si et seulement si son conjugué lui est égal.
Un nombre complexe est imaginair pur si et seulement si son conjugué est égal à son opposé.

4

Proposition (Règles de calcul).
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\overline{z}} = z$.

Pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \text{et} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ lorsque } z_2 \neq 0.$$

- **Remarque.** On en déduit, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \quad \overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{z_1 \cdots z_n} = \overline{z_1} \cdots \overline{z_n}.$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z\overline{z} \in \mathbb{R}^+$ car :

$$z\overline{z} = (\operatorname{Re} z + \mathrm{i}\operatorname{Im} z)(\operatorname{Re} z - \mathrm{i}\operatorname{Im} z) = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$$

Cela légitime la définition suivante.

5 **Définition.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Le *module* de z est le réel positif noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

- **Remarque importante.** Pour calculer $|z|$ ou l'utiliser, ne pas vouloir systématiquement appliquer la formule $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$; penser aussi à $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, ou encore à $|z|^2 = z\overline{z}$.
- **Remarque pratique.** Il n'est pas vrai que $\cancel{x = 1 \iff x^2 = 1}$. Mais pour $x \geqslant 0$, c'est bien vrai !
  D'où l'équivalence très pratique $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$.
- **Remarque facile.** Lorsque le complexe z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue et ils se notent l'un et l'autre $|z|$.
- **Interprétation géométrique du module.** Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors $|z_1 - z_2|$ est la distance entre les points M_{z_1} et M_{z_2}.

6 **Proposition.** Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
L'ensemble des points M_z tels que $|\omega - z| = r$ (resp. $|\omega - z| \leqslant r$) est le cercle (resp. le disque) de centre M_ω et de rayon r.

7 preuve **Proposition (Module d'un produit et d'un quotient).** Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{si } z_2 \neq 0$$

- **Remarque.** On en déduit, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \quad |z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n|$$

  En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left|z^n\right| = |z|^n$$

8 sol → 22 **Question.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$. On pose $z' = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$. Montrer l'équivalence $|z'| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$.
Démontrer géométriquement cette équivalence.

9 preuve **Proposition.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
- $z = 0 \iff |z| = 0$
- $\left|\operatorname{Re} z\right| \leqslant |z|$ et $\left|\operatorname{Im} z\right| \leqslant |z|$
- $\left|\operatorname{Re} z\right| = |z| \iff z \in \mathbb{R}$ et $\left|\operatorname{Im} z\right| = |z| \iff z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$
- $\operatorname{Re} z = |z| \iff z \in \mathbb{R}^+$ et $\operatorname{Im} z = |z| \iff z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^+$

10 preuve

Proposition (inverse et conjugué). Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un complexe non nul.
On a
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
En particulier, $\quad |z| = 1 \iff \dfrac{1}{z} = \overline{z}.$

- **Explication.** La première formule traduit le fait que « l'inverse et le conjugué, c'est presque pareil » ; ils sont égaux à un facteur multiplicatif près qui s'exprime en fonction du carré du module.
- **Sur le cercle trigo.** L'équivalence traduit le fait que, *sur le cercle trigonométrique*, le conjugué et l'inverse sont égaux ; et réciproquement.
- **Expression de l'inverse.** Lorsque z est écrit sous forme algébrique, disons $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels, alors l'inverse vaut :
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}\,y}{x^2 + y^2}.$$

11 sol → 23

Question. Soit a, b, c trois complexes de module 1. Montrer que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

12
preuve

Proposition (Inégalité triangulaire). Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
On a :

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| \qquad \text{inégalité de } \mathbb{R}^+$$

Le cas d'égalité :

$$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \iff \left(\exists \mu \in \mathbb{R}^+,\ z_1 = \mu z_2 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ z_2 = \lambda z_1\right)$$

- **Généralisation.** Il résulte de l'inégalité triangulaire, par une récurrence immédiate que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

- **Interprétation géométrique.**
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On appelle $M_{z_1+z_2}$ le point d'affixe z_1+z_2.
L'inégalité $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ correspond à :

$$OM_{z_1+z_2} \leqslant OM_{z_1} + M_{z_1}M_{z_1+z_2}$$

Remarque. La condition « il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$ » signifie géométriquement que les vecteurs $\overrightarrow{M_{z_1}M_{z_1+z_2}}$ et $\overrightarrow{OM_{z_1}}$ sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire que M_{z_1} appartient au segment $[OM_{z_1+z_2}]$.

13
preuve

Proposition (Seconde inégalité triangulaire). Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z-z'|.$$

14

Proposition (La totale !). Pour tous $\xi, \xi' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||\xi|-|\xi'|\big| \leqslant |\xi \pm \xi'| \leqslant |\xi|+|\xi'|.$$

II. L'ensemble $\mathbb{U}$

15 **Notation.** L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\}$$

Les règles de calcul sur les modules des produits et quotients de nombres complexes nous donnent immédiatement :

- Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est élément de $\mathbb{U}$.
- L'inverse de tout élément de $\mathbb{U}$ est élément de $\mathbb{U}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ non nul, on a $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

16 **Définition.** Pour tout réel θ, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ le nombre complexe défini par

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

- **Image de 0.** Lorsque $\theta = 0$, alors on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$.
  Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = 1$ (ceci est dû à la 2π-périodicité des fonctions cosinus et sinus).
- **Mieux.** On a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv 0 \ [2\pi]$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Cf. ci-dessus.

$\boxed{\Longrightarrow}$ L'égalité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$ fournit en identifiant parties réelle et imaginaire les égalités $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$

D'où $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$.

17 **Proposition (paramétrisation de $\mathbb{U}$).** Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$z \in \mathbb{U} \iff \left(\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \right)$$

18 **Proposition.** Soit θ et θ' deux réels.
On a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$$

19 preuve **Proposition.** Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}.$$

- **Remarque.** Le deuxième point est délicat à comprendre.
  Il y a un léger abus de notation dans $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$. En effet, on ne s'autorise officiellement que du $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathit{Truc}}$.
  Il faut donc comprendre que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$ désigne $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\beta)}$.

  La deuxième égalité dit donc que l'inverse de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ est le complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta'}$ avec $\beta' = -\beta$.

III. Formules d'Euler et de Moivre

20 **Proposition (Euler).** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

21 sol → 24 **Question.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. À l'aide de la formule d'Euler, linéariser $\cos^3\theta$, puis linéariser $\sin^3\theta$.

22 **Proposition (Angle moitié).** *à ne pas apprendre, à savoir retrouver*
Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}\, 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}p} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}\, 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\, 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left[-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

- Concrètement, pour retrouver ces formules, on force la factorisation par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}$. Le deuxième facteur est alors un réel ou un imaginaire pur.
- En considérant des expressions de la forme $\cos p \pm \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$ comme les parties réelles ou imaginaires de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm e^{\mathrm{i}q}$, on retrouve les formules trigonométriques qui en donnent une factorisation.

23 sol → 25 **Question.** Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Donner le module de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et faire un dessin pour illustrer le résultat.

24 preuve **Proposition (Formule de Moivre).**
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

ou encore

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

ou encore

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\right) \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\right)$$

- La première formulation paraît vide de sens, mais n'oublions pas que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est, a priori, une notation, et que l'on montre à présent que c'est une bonne notation, puisque se comportant comme l'exponentielle réelle !
- La deuxième formulation montre que l'on peut facilement élever à la puissance n un nombre complexe de module 1 (et donc, comme nous le verrons, tout nombre complexe !).
- La dernière formulation montre que l'on peut exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

25 sol → 26 **Question.** Montrer que $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

26 sol → 26 **Question.** Exprimer $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

IV. Forme trigonométrique, argument

27 **Proposition.**

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un complexe *non nul*. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

— Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $(r',\theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

On a :

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

28 **Définition.** Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
On appelle *forme trigonométrique* de z toute écriture de la forme :

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{aligned} \quad \text{avec} \begin{cases} r \in \mathbb{R}_+^* \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Un tel réel θ est appelé **un** argument de z.
Un tel réel r est appelé **le** module de z.

- Lorsqu'un nombre complexe z est mis sous forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $\begin{cases} r = OM_z \\ \theta \text{ est une mesure de l'angle } (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_z}) \end{cases}$ donc les réels r et θ forment un couple de *coordonnées polaires* de M_z.
- Le module d'un nombre complexe est défini de manière unique : tout complexe, même 0, possède un module.
- En revanche, on ne parle d'argument que pour un complexe **non nul**, et un tel réel n'est défini que modulo 2π.
- En imposant θ à appartenir à un $[0, 2\pi[$, on récupère de l'unicité et on pourrait alors parler de **l'**argument de z.
  Mais on pourrait aussi prendre $]-\pi, \pi]$ ou ....
  Donc, officiellement, en toute rigueur, on dit **un** argument.
  Mais il faut savoir être léger, et il nous arrivera tous, un jour, de parler de **l'**argument de z : dans ce cas, il faudra avoir en tête que c'est un abus de langage.
  Les mathématiciens ont quand même fait un choix pour pouvoir parler de **l'**argument d'un complexe non nul. Celui qui appartient à $]-\pi, \pi]$ s'appelle **l'argument principal**.
- Bien que 0 n'ait pas d'argument, on peut quand même écrire $0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, en prenant $r = 0$ (et $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque).
- Pour $z \in \mathbb{C}^*$, en notant θ un argument de z, on a :

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \theta \equiv 0 \ [\pi] \qquad \text{et} \qquad z \in \mathbb{R}_+^* \iff \theta \equiv 0 \ [2\pi] \qquad \text{et} \qquad z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^* \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

- **Reformulation.** La proposition précédente dit que :

  Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument à 2π-près.

- **Attention.** Si un complexe z s'écrit $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, il ne s'agit pas nécessairement de la forme trigonométrique de z.
  En effet, on a $|z| = |\rho|$ et donc :
  — si $\rho > 0$, alors $|z| = \rho$, et un argument de z est θ,
  — si $\rho < 0$, alors $|z| = -\rho$, et un argument de z est $\theta + \pi$,
  — si $\rho = 0$ alors $z = 0$, et z n'a pas d'argument.

29 **Question.** Soit $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.
sol → 26
Donner la forme trigonométrique de $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ en fonction de θ.

Il est aisé de calculer des produits, des quotients et des puissances de nombres complexes non nuls écrits sous forme trigonométrique. C'est ce que nous dit la proposition suivante.

30 **Proposition (Calculs).** Soit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Notons $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, alors on a :

$$\overline{z_1} = r_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} \qquad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} \qquad z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

On en déduit que

31 **Proposition.** Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On a :

- $\arg(\overline{z_1}) \equiv -\arg(z_1)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1)\ [2\pi]$
- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$

32 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $z_n = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^n$.
sol → 27
À quelle condition nécessaire et suffisante sur n, le complexe z_n appartient-il à $\mathbb{R}^-$?

33 **Proposition.**
preuve
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On écrit z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique $z = a + \mathrm{i}b$ et $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors, on a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x \ = \ r\cos(x-\theta).$$

- **À retenir.** En présence d'une quantité du type $a\cos x + b\sin x$, on peut considérer le nombre complexe z défini par $z = a + \mathrm{i}b$, puis trouver sa forme trigonométrique. Ensuite, il suffit de « donner un coup de partie réelle et de partie imaginaire ».

V. Exponentielle complexe

À ce stade du cours,

— on connaît e^z pour $z = x \in \mathbb{R}$ un réel (confer classe de $1^{\text{ère}}$),

— on a défini e^z pour $z = i\theta \in i\mathbb{R}$ un imaginaire pur.

Voyons comment définir e^z pour $z \in \mathbb{C}$ un complexe quelconque.

34 **Définition.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le nombre complexe e^z par :

$$e^z \;=\; e^{\operatorname{Re} z}\, e^{i \operatorname{Im} z}.$$

- La fonction exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$, notée encore exp
  - — prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$, puisque si $z \in \mathbb{R}$, alors on a $\operatorname{Im} z = 0$ et donc $e^{i \operatorname{Im} z} = 1$;
  - — est compatible avec la notation $e^{i\theta}$, puisque si $z = i\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ alors, on a $\operatorname{Re} z = 0$ et donc $e^{\operatorname{Re} z} = 1$.

35 **Proposition.** Soit $z \in \mathbb{C}$.

— Le module de e^z est $e^{\operatorname{Re} z} \in \mathbb{R}_+^*$.

— Un argument de e^z est $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

— Le complexe e^z est *non nul*.

36 sol → 27 **Question.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

37 **Proposition.**

— Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a $\quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Rappel. On a :

— $\forall\, y \in \dots, \quad \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x = y.$

— $\forall\, z \in \dots, \quad \exists\, \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = z.$

— $\forall\, a \in ???, \quad \exists\, z \in \mathbb{C}, \quad e^z = a.$

— $\forall\, x, x' \in \mathbb{R}, \quad e^x = e^{x'} \iff \dots\dots$

— $\forall\, \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \dots\dots$

— $\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^z = e^{z'} \iff ???$

38 preuve **Proposition.**

— Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = a$.

— Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.
On a
$$e^z = e^{z'} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad z = z' + i2k\pi.$$

39 sol → 28 **Question.** Résoudre l'équation $e^z = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

VI. Résolution d'équations

$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad x^2 = x'^2 \iff \ldots\ldots$ $\qquad\qquad$ $\forall Z, Z' \in \mathbb{C}, \quad Z^2 = Z'^2 \iff \ldots\ldots$

Équation du type $Z^2 = z_0$

40 **Définition.** Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *racine carrée* de z_0 tout complexe Z tel que $Z^2 = z_0$.

41 **Proposition (rappel).** Tout réel non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

- Le réel 0 n'admet qu'une seule racine carrée qui est 0.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors a admet exactement deux racines carrées qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ (rappelons que $\sqrt{a}$ désigne la racine positive de a).
- Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$. Alors a admet exactement deux racines carrées qui sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

Ce rappel est un cas particulier du résultat plus général suivant :

42 preuve **Proposition.** Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

- On ne sait pas, dans $\mathbb{C}$, privilégier l'une des deux racines d'un complexe z_0, contrairement à ce qui se passe lorsque $z_0 \in \mathbb{R}_+$ où l'on choisit, parmi les deux racines carrées de z_0, celle qui est positive que l'on note alors $\sqrt{z_0}$.
  Par suite :
  — il est impossible d'utiliser la notation $\sqrt{z_0}$ pour un complexe z_0 quelconque ;
  — il faut donc parler d'*une* (article indéfini) racine carrée de z_0 et non pas de *la* (article défini) racine carrée de z_0.

43 sol → 29 **Question.** Déterminer les racines carrées de $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

44 **Proposition.** Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
Si on connaît la forme algébrique de z_0, alors on peut déterminer les formes algébriques des deux racines carrées de z_0.

Preuve. On traite ici le cas $z_0 \notin \mathbb{R}$ (le cas $z_0 \in \mathbb{R}$ est traité en 41).
Écrivons z_0 sous forme algébrique $z_0 = x + \mathrm{i}y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$.

Analyse. Soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^2 = z_0$.
Écrivons $Z = X + \mathrm{i}\,Y$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.
En particulier, on en déduit
— l'égalité des modules : $X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (i)
— l'égalité des parties réelles : $X^2 - Y^2 = x$ (ii)
— l'égalité des parties imaginaires : $2XY = y$ (iii)
(comme $y \neq 0$, cela entraîne $X \neq 0$ et $Y \neq 0$).
Par somme et différence de (i) et (ii), on obtient X^2 et Y^2, et donc X et Y au signe près.
D'où quatre possibilités puisque $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, à savoir (X, Y), $(X, -Y)$, $(-X, Y)$, $(-X, -Y)$.
D'après (iii), le produit XY est du signe de y.
Parmi les quatre couples précédents, il n'y en a donc plus que deux.
D'où deux valeurs possibles pour Z.

Synthèse. Les deux racines carrées de z_0 trouvées dans l'analyse sont nécessairement solutions. En effet, on sait (d'après 42) qu'il y en a exactement deux. Comme on en a trouvé au plus deux, c'est qu'on les a toutes trouvées.

45 sol → 29 **Question.** Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $21 - 20\mathrm{i}$.

46 sol → 29 **Question.**

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $z = 1 + \mathrm{i}$.
2. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

47
preuve

Proposition. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{E}$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

— Si $\Delta \neq 0$, alors en appelant δ *une* racine carrée de Δ, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double $\dfrac{-b}{2a}$.

- Dans les deux cas, les solutions sont données par $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ en notant δ *un* complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.
  Un tel complexe δ existe, c'est là toute la différence avec le monde des réels !
- Si l'on remplace tous les $\mathbb{C}$ par des $\mathbb{R}$, le résultat est très similaire !
  Voici votre résultat de 1ère :

  Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

  $$ax^2 + bx + c = 0. \tag{E}$$

  On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

  — *Si $\Delta > 0$, alors en appelant δ* une *racine carrée de Δ, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :*

  $$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \textit{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a}.$$

  Note : il est d'usage de prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$, mais on pourrait prendre $\delta = -\sqrt{\Delta}$ ...

  — *Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double $\dfrac{-b}{2a}$.*

  — *Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'a pas de solution.*
- Si on garde les coefficients dans $\mathbb{R}$, mais que l'on cherche les solutions dans $\mathbb{C}$, on retrouve le théorème de Terminale :

  Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

  $$az^2 + bz + c = 0.$$

  On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

  — *Si $\Delta \neq 0$, alors en appelant δ* une *racine carrée de Δ, l'équation admet deux solutions distinctes :*

  $$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \textit{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a}.$$

  Note : il est d'usage de prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$ lorsque $\Delta > 0$ et de prendre $\delta = \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$ lorsque $\Delta < 0$.

  — *Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution double $\dfrac{-b}{2a}$.*
- **Exemple.** Résolvons l'équation $z^2 - (3+4\mathrm{i})\,z - 1 + 5\mathrm{i} = 0$.
  Le discriminant de l'équation est :

  $$\Delta \;=\; (3+4\mathrm{i})^2 - 4(-1+5\mathrm{i}) \;=\; -3+4\mathrm{i}.$$

  Déterminons une racine carrée de Δ, que l'on note $\delta = u + \mathrm{i}v$.
  En considérant le module, les parties réelle et imaginaire de $\delta^2 = \Delta$, on obtient :

  $$u^2+v^2 = 5, \quad u^2 - v^2 = -3 \quad \text{et} \quad 2uv = 4.$$

  Par somme et différence, on en déduit $u^2 = 1$ et $v^2 = 4$, et donc : $u = \pm 1$ et $v = \pm 2$.
  Le signe de uv entraîne que les deux racines carrées de Δ sont $\delta = \pm(1+2\mathrm{i})$.
  Ainsi, **une** racine carrée de Δ est $1+2\mathrm{i}$.
  Les solutions sont $\dfrac{(3+4\mathrm{i}) \pm (1+2\mathrm{i})}{2}$, c'est-à-dire $\quad 2+3\mathrm{i} \quad$ et $\quad 1+\mathrm{i}$.

48
sol → 30

Question. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $6z^2 - (5-\mathrm{i})z + 2 - \dfrac{5\mathrm{i}}{6} = 0$.

49 preuve

Proposition. Soit a, b et c trois complexes, avec $a \neq 0$.
Notons z_1 et z_2 les solutions (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.
Alors on a :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

On utilise ce résultat sous plusieurs formes.

- Si z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, et si l'on connaît une de ces racines, alors on peut facilement en déduire l'autre.
- Si l'on sait que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on peut exprimer toute expression symétrique en z_1 et z_2 (c'est-à-dire invariante quand on échange z_1 et z_2), en fonction de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, et donc de a, b et c, sans avoir à expliciter z_1 et z_2.

50 sol → 30

Défi. On considère l'équation $z^2 - \sqrt{78}z + 13 = 0$ de discriminant > 0. On note z_1, z_2 ses deux racines. Sans expliciter z_1 et z_2, calculer $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2$.

51 preuve

Proposition. Soit $s, p \in \mathbb{C}$.
On a l'équivalence :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \qquad \begin{cases} z_1 + z_2 & = s \\ z_1 z_2 & = p \end{cases} \iff z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de } z^2 - sz + p = 0$$

- Si l'on change tous les $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$ dans la proposition précédente, l'équivalence reste vraie.
  Le seul changement est que l'équation $x^2 - sx + p = 0$ n'a pas nécessairement de solution ; elle en a si et seulement si $s^2 - 4p \geqslant 0$.
- **Exemple.** Existe-t-il $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$?

  Même question avec $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Racines n-èmes d'un nombre complexe

Dans toute cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$.

52 **Définition.**

— Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *racine $n^{\text{ème}}$* de z_0 tout complexe Z tel que $Z^n = z_0$.

— Les racines $n^{\text{ème}}$ de 1 sont encore appelées *racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.*
L'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$

$$\mathbb{U}_n = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\right\}$$

53 **Proposition (à propos de $\mathbb{U}_3$).**

— Les racines cubiques de l'unité sont

$$1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \overline{\mathrm{j}}$$

— Les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ sont j et $\overline{\mathrm{j}}$.
En particulier, $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

— La somme des racines cubiques de l'unité vaut 0.

— Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

$$z^3 = z'^3 \iff \left(z = z' \quad \text{ou} \quad z = \mathrm{j}z' \quad \text{ou} \quad z = \mathrm{j}^2 z'\right)$$

54 **Proposition (Description de $\mathbb{U}_n$).**
Il existe exactement n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, qui sont les complexes :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^k, \quad \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

- Autrement dit :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right\}_{k \in [\![0,n-1]\!]} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{U}_n \text{ possède } n \text{ éléments}$$

- On a aussi

$$\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

55 preuve **Proposition (Somme des racines de l'unité).**
Soit $n \geqslant 2$.

— Soit ξ une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1. Alors on a :

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0.$$

— La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est égale à 0 :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

56 sol → 31 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines $n^{\text{ème}}$ de 1.

57 **Proposition.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.
On a
$$z^n = z'^n \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} z'$$
On a aussi
$$z^n = z'^n \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} z'$$

58 preuve **Proposition.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

— Le complexe z_0 admet au moins une racine $n^{\text{ème}}$.

— Notons ω_0 une racine $n^{\text{ème}}$ de z_0 (cela existe !). Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence :
$$z^n = z_0 \iff \exists \xi \in \mathbb{U}_n, \ z = \omega_0 \, \xi$$

- *Pour trouver toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de z_0, il suffit donc d'en exhiber une et de la multiplier par toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.*

59 sol → 31 **Question.** Déterminer les racines cinquièmes de $1 + \mathrm{i}$. Illustrer votre réponse.

60 sol → 31 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$.

VII. Un peu de géométrie

Alignement et orthogonalité

61 preuve **Proposition.** Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2.
Alors le complexe $\frac{z_2}{z_1}$ a pour argument toute mesure de l'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, ce que l'on peut résumer :
$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \ [2\pi]$$
En particulier :

— les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$;

— les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

62 **Proposition.** Soit A, B et C trois points du plan, distincts et d'affixes respectives a, b et c.
Le complexe $\frac{c-a}{b-a}$ a pour argument toute mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
En particulier :

— les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$;

— les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Transformations remarquables du plan

Soit F une application du plan dans lui-même.
On peut lui associer une unique application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' on ait

$$M' = F(M) \iff z' = f(z)$$

Réciproquement, l'application f caractérise F. On dit que F est *représentée par f dans le plan complexe*.

Translation

63 **Définition.** Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La *translation* de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

64 preuve **Proposition.** Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et b son affixe. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b \end{array}$

Homothétie

65 **Définition.** Soit Ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'*homothétie* de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

66 preuve **Proposition.** L'homothétie de centre Ω, d'affixe ω, et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est représentée dans le plan complexe par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \lambda(z-\omega)+\omega \end{array}$

- En particulier, une homothétie de centre O est représentée par une application de la forme $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- La symétrie par rapport au point Ω, d'affixe ω, est l'homothétie de centre Ω et de rapport -1. Elle est donc représentée par l'application $z \mapsto -z+2\omega$.

Rotation

67 **Définition.** Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La *rotation* de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω, et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que :

$$\Omega M = \Omega M' \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi].$$

68 preuve **Proposition.** La rotation de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ est représentée dans le plan complexe par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}$

- En particulier, une rotation de centre O est représentée par une application de la forme $z \mapsto az$, avec a complexe de module 1.

69 sol → 33 **Question.** Déterminer l'application qui représente la rotation de centre $1+\mathrm{i}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Composée d'une rotation et d'une homothétie

70 preuve

Proposition. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et F la transformation du plan représentée par $f : z \mapsto a\,z$.

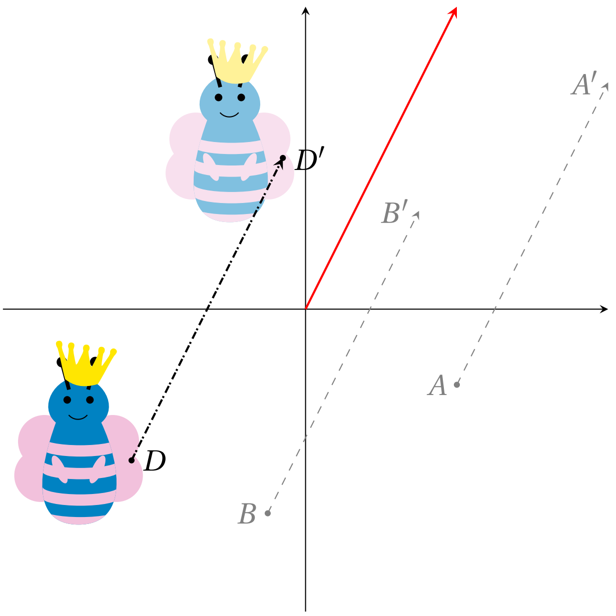
- Si $a = 1$, alors l'application F est l'identité du plan.
- Si $a \neq 1$, alors l'application F s'écrit alors $F = H \circ R = R \circ H$, avec :
  - R la rotation de centre O et d'angle α, où α est un argument de a,
  - H l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.

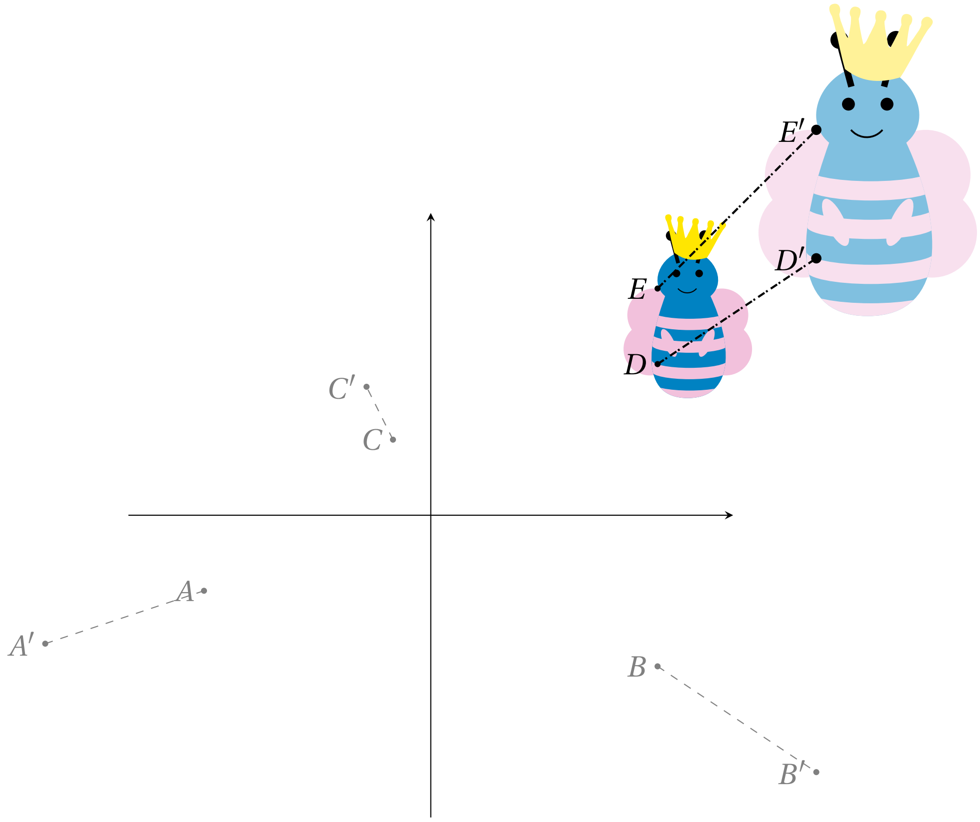
- Examinons deux cas particuliers de la proposition précédente dans laquelle $a \in \mathbb{C}^*$;
  - si a est un *réel*, alors l'application F est l'homothétie de centre O et de rapport a (si $a = 1$, on obtient l'identité).;
  - si le complexe a est de module 1, l'application F est la rotation de centre O et d'angle α (si $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$, alors F est l'identité).

- **Exemple.** Caractérisons l'application F dont l'expression complexe est $z \mapsto (-\sqrt{3} + \mathrm{i})z$.
  On a $-\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
  L'application F est donc la composée
  - de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et
  - de la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

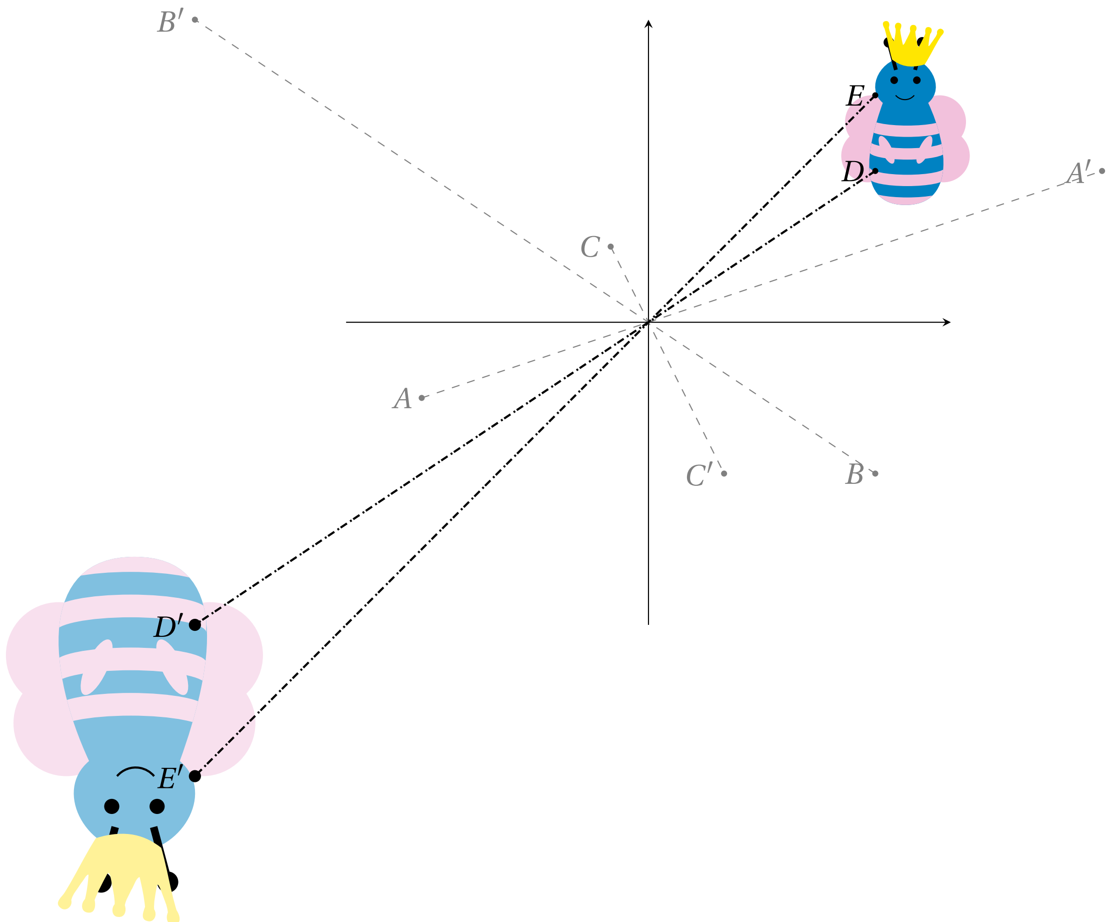
71 preuve

Proposition.
L'application $z \mapsto \overline{z}$ représente la symétrie par rapport à la droite $(O, \vec{\imath})$.

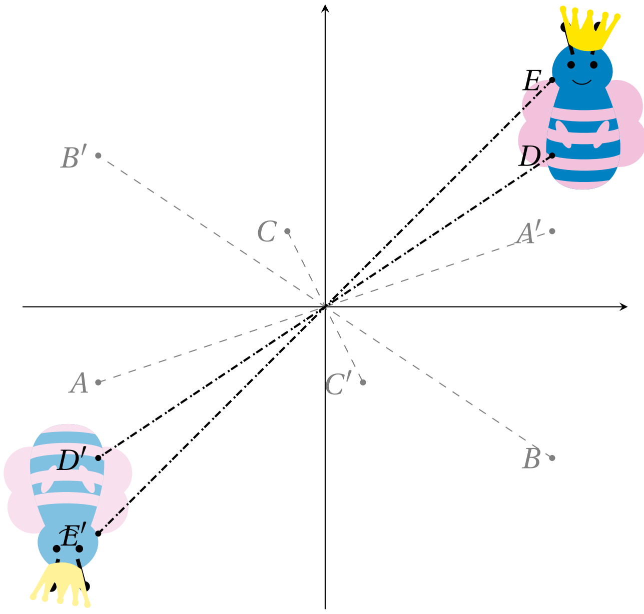


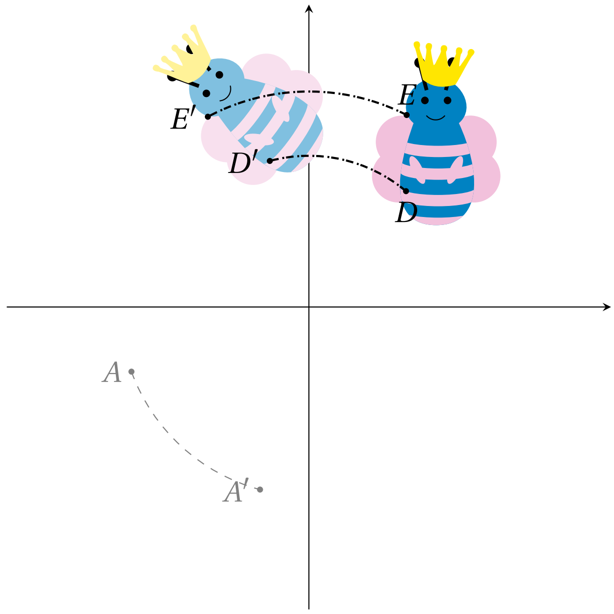


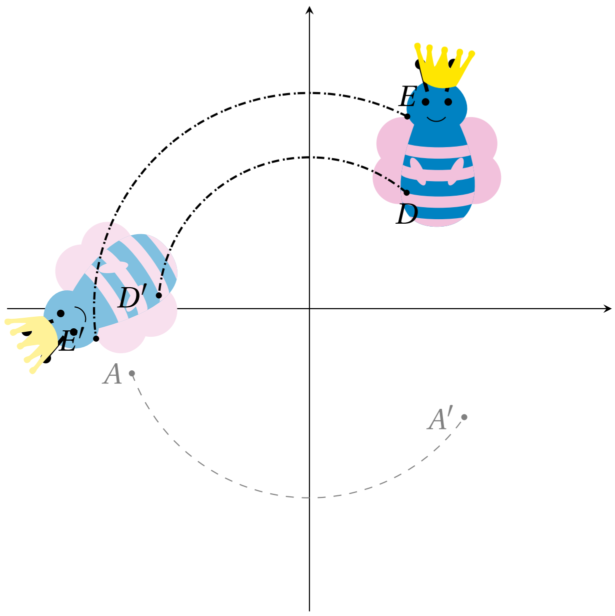
E'
E
D'
D
C'
C
A
A'
B
B'

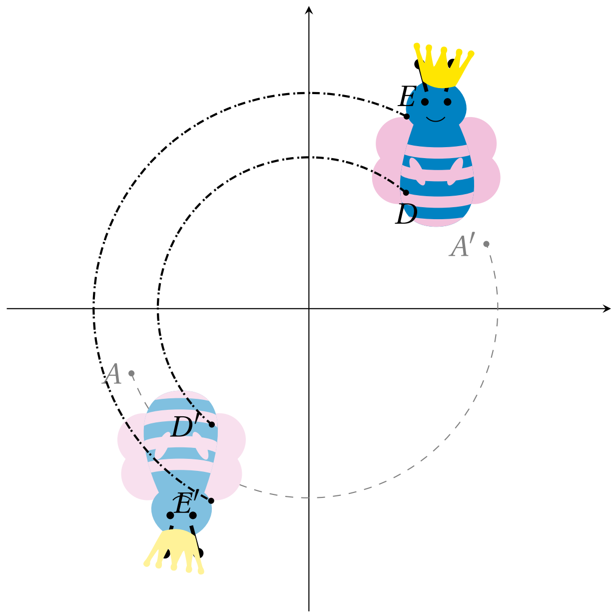


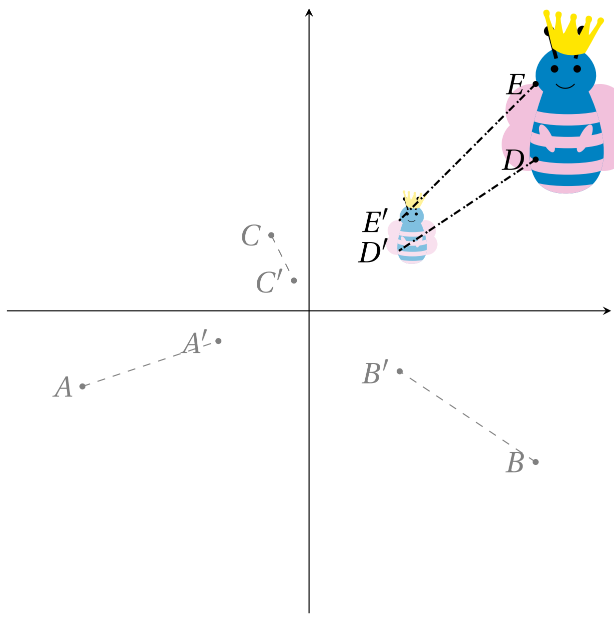
B'
E
D
A'
C
A
C'
B
D'
E'

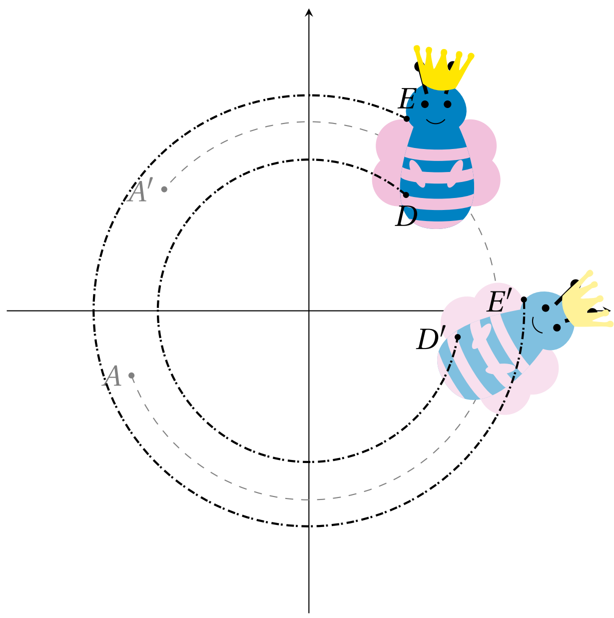

E
D
B'
C
A'
A
C'
B
D'
E'


E'
E
D'
D
A
A'


E
D
D'
E'
A
A'


E
D
A'
A
D'
E'


E
D
E'
D'
C
C'
A'
A
B'
B


E
D
A'
E'
D'
A

Nombres complexes

preuve et éléments de correction

7

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

— On a
$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} \times z_2 \overline{z_2} = \left(|z_1||z_2|\right)^2.$$
Comme $|z_1 z_2|$ et $|z_1||z_2|$ sont des réels positifs, on en déduit $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

— En supposant $z_2 \neq 0$, on a $z_1 = \dfrac{z_1}{z_2} z_2$ et donc $|z_1| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| |z_2|$.
On en déduit le résultat en divisant par $|z_2|$ qui est non nul.

8

On a
$$|z'|^2 = z'\overline{z'} = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \cdot \frac{\overline{z}+\mathrm{i}}{\overline{z}-\mathrm{i}} = \frac{z\overline{z}+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\overline{z}+1}{z\overline{z}-\mathrm{i}z+\mathrm{i}\overline{z}+1}.$$
On a donc les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
|z'| = 1 &\iff |z'|^2 = 1 \\
&\iff z\overline{z}+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\overline{z}+1 = z\overline{z}-\mathrm{i}z+\mathrm{i}\overline{z}+1 \\
&\iff 2\mathrm{i}(z-\overline{z}) = 0 \\
&\iff z = \overline{z} \\
&\iff z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$
D'où l'équivalence $|z'| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$.

Preuve géométrique.
Notons A, B, M les points d'affixe $\mathrm{i}, -\mathrm{i}, z$.
On a les équivalences
$$|z'| = 1 \iff |z-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}| \iff MA = MB$$
La dernière condition signifie que M appartient à la médiatrice de $[AB]$, qui est ici (au vu des affixes de A et B) la droite $(O, \vec{\imath})$, axe des abscisses. D'où les équivalences :
$$\begin{aligned}
|z'| = 1 &\iff M \text{ appartient à l'axe des abscisses} \\
&\iff z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

9

Écrivons z sous forme algébrique $x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
On a $|z|^2 = x^2 + y^2$. Les deux premiers résultats sont alors évidents, et les deux derniers découlent des inégalités :
$$|\mathrm{Re}\, z| = |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$
$$|\mathrm{Im}\, z| = |y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$$
Les cas d'égalité :
$$|\mathrm{Re}\, z| = |z| \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2+y^2} \iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}$$

10

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

On a alors $\overline{z} \neq 0$ et donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

On a

$$|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\overline{z} = 1 \iff \frac{1}{z} = \overline{z}$$

11

Comme a, b, c sont de module 1, on a $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$, $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$, $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\left|ab+bc+ca\right| &= \left|\overline{ab+bc+ca}\right| && \text{car pour tout } z \in \mathbb{C}, \text{ on a } |z| = |\overline{z}| \\
&= |\overline{a}\overline{b}+\overline{b}\overline{c}+\overline{c}\overline{a}| && \text{car le conjugué se comporte bien avec la somme et le produit} \\
&= \left|\tfrac{1}{ab}+\tfrac{1}{bc}+\tfrac{1}{ca}\right| && \text{cf. remarque intiale} \\
&= \left|\tfrac{a+b+c}{abc}\right| && \text{calculs} \\
&= \tfrac{|a+b+c|}{|abc|} && \text{Le module d'un quotient est le quotient des modules} \\
&= |a+b+c| && \text{car } |abc| = |a||b||c| = 1^3 = 1
\end{aligned}$$

12

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes.
Il s'agit de montrer une inégalité qui a lieu dans $\mathbb{R}^+$ (WHY ?).
Examinons le carré de chacun des deux membres.

— On a, d'une part :

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}),
\end{aligned}$$

— et, d'autre part :

$$\begin{aligned}
(|z_1|+|z_2|)^2 &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}|
\end{aligned}$$

On a donc les équivalences

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| &\iff \big(|z_1+z_2|\big)^2 \leqslant \big(|z_1|+|z_2|\big)^2 \\
&\iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1\overline{z_2}|
\end{aligned}$$

L'assertion finale est vraie, car on sait que l'on a $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$ pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$. L'assertion initiale est donc vraie également et c'est exactement l'inégalité triangulaire.

Cas d'égalité D'après ce qui précède, on

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| &\iff \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}| \\
&\iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^+ \\
&\iff (z_1 = 0 \text{ et } z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^+) \text{ ou } (z_1 \neq 0 \text{ et } z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^+) \\
&\iff z_1 = 0 \text{ ou } (z_1 \neq 0 \text{ et } \frac{1}{|z_1|^2} \times \overline{z_1} z_2 \in \mathbb{R}^+) \\
&\iff z_1 = 0 \text{ ou } (z_1 \neq 0 \text{ et } \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^+) \\
&\iff z_1 = 0 \text{ ou } \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

13

En écrivant $z_1 = z_1 - z_2 + z_2$, le point .... donne :

$$|z_1| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2| \qquad \text{et donc} \qquad |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

En échangeant les rôles de z_1 et z_2, on en déduit :

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

et donc la double inégalité :

$$-\big|z_1 - z_2\big| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \quad \text{ou encore} \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

19

Soit α et β deux réels. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} &= (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\
&= \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

En particulier $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, ce qui prouve que $\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$. Puis

$$\frac{\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}$$

Enfin, la dernière relation est une conséquence immédiate des deux premières.

21

On a

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\Big((\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}) + 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\Big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\big)
\end{aligned}$$

et de même :

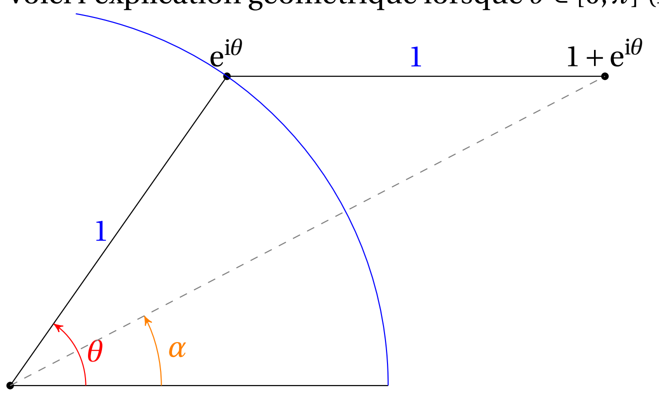
$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\Big((e^{3i\theta}-e^{-3i\theta})-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\Big)\\ &= \frac{1}{4}\big(-\sin(3\theta)+3\sin\theta\big).\end{aligned}$$

23

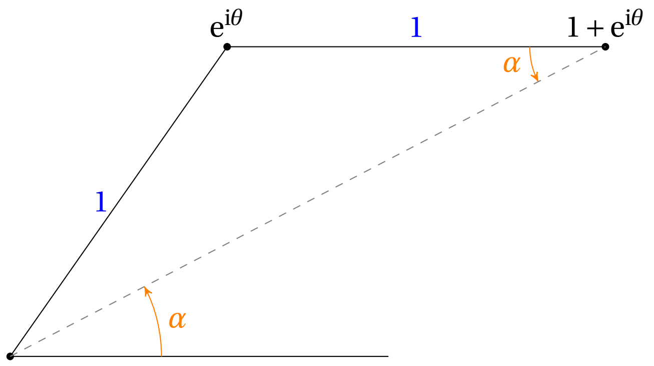
En factorisant par l'angle moitié, on a $1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\, 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Soit $\theta\in[0,2\pi[$. En prenant le module, on obtient :

$$|1+e^{i\theta}| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2} & \text{si } \theta\in[0,\pi[\\ -2\cos\frac{\theta}{2} & \text{si } \theta\in]\pi,2\pi[\\ 0 & \text{si } \theta=\pi\end{cases}$$

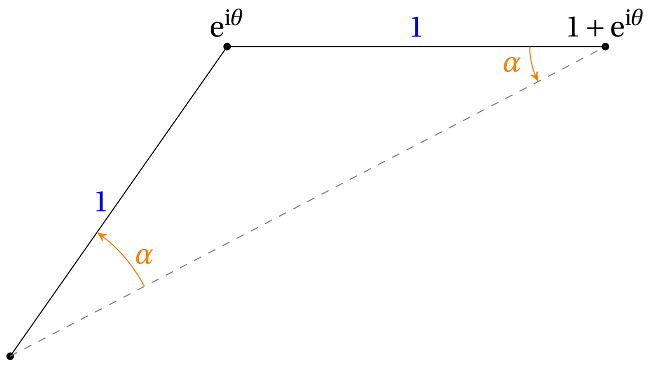
Voici l'explication géométrique lorsque $\theta\in[0,\pi]$ (le lecteur adaptera le dessin lorsque θ est dans $]\pi,2\pi[$)



Sur le dessin, α est un argument de $1+e^{i\theta}$. C'est également une mesure de l'angle en haut à droite de la figure (angles alternes-internes avec deux droites parallèles).



Par ailleurs, on voit un triangle isocèle de côté 1, donc on retrouve α à ses deux angles de base.



Ainsi, $\alpha+\alpha=\theta$. D'où $\alpha=\frac{\theta}{2}$.

24

On démontre la relation $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$:

- pour $n\in\mathbb{N}$, par récurrence, en utilisant ...
- par passage à l'inverse, pour n entier négatif.

25

On écrit $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique, à savoir $e^{i\frac{\pi}{3}}$, et on utilise la formule de Moivre !
On a :

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = \left(\exp\frac{i\pi}{3}\right)^{100} = \exp\left(\frac{100i\pi}{3}\right).$$

Comme $\frac{100\pi}{3} = \frac{(96+4)\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, on a donc :

$$\exp\left(\frac{100i\pi}{3}\right) = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right) = -\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par transitivité, on obtient l'égalité $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

26

En écrivant que $\sin(4\theta)=\mathrm{Im}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^4\right)$ et en utilisant la formule $(a+b)^4=\dots$, on trouve

$$\begin{array}{rcl}\sin(4\theta) & = & 4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta\\ & = & 4\cos\theta\sin\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\end{array}$$

S'arrêter là dans le calcul, sinon, on ne répondrait plus à la question !

29

En factorisant par l'angle moitié, on a :

$$z \;=\; 1+e^{i\theta} \;=\; e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{\frac{-i\theta}{2}}) \;=\; e^{i\frac{\theta}{2}}\,2\cos\frac{\theta}{2}$$

Par un jeu d'écriture, on dispose des deux égalités (WHY ?)

$$z \;=\; 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad z \;=\; -2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i(\pi+\frac{\theta}{2})}$$

▷ Cas où $\theta\in[0,\pi[$.
Alors $\frac{\theta}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}[$ (le premier quadrant), et ainsi $\cos\frac{\theta}{2}>0$.
Ainsi, la forme trigonométrique de z est $2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$, autrement dit :

$$|z| = 2\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad \arg(z)\equiv\frac{\theta}{2}\ (2\pi)$$

▷ Cas où $\theta\in]\pi,2\pi[$.
Alors $\frac{\theta}{2}\in]\frac{\pi}{2},\pi[$ (le deuxième quadrant), et ainsi $\cos\frac{\theta}{2}<0$.

Ainsi, la forme trigonométrique de z est $-2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\frac{\theta}{2})}$, autrement dit :

$$|z| = -2\cos\tfrac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad \arg(z) \equiv \pi + \frac{\theta}{2}\ (2\pi)$$

On peut résumer cela en :

$$\text{la forme trigonométrique de } z \text{ est } \begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \in [0,\pi[\\ -2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\frac{\theta}{2})} & \text{si } \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

32

On a l'équivalence $\quad z_n \in \mathbb{R}^- \iff \arg(z_n) \equiv \pi\ [2\pi]$.
Or $z_n = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ d'où :

$$\begin{aligned} \arg(z_n) &\equiv n \arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\ [2\pi] \\ &\equiv n\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} z_n \in \mathbb{R}^- &\iff n\frac{\pi}{3} \equiv \pi\ [2\pi] \\ &\iff n \equiv 3\ [6] \end{aligned}$$

33

Par identification de parties réelle et imaginaire de z, on a

$$a = r\cos\theta \quad \text{et} \quad b = r\sin\theta$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\cos x + b\sin x &= r\cos\theta\cos x + r\sin\theta\sin x \\ &= r\cos(x-\theta) \end{aligned}$$

Enjoy!

36

Le membre gauche vaut :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\overline{z}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\overline{z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\overline{z}} && \text{par définition de l'exp. complexe} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z} && \text{par définition du conjugué} \end{aligned}$$

Le membre droit vaut :

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{e}^{z}} &= \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z}} && \text{par définition de l'exp. complexe} \\ &= \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}}\ \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z}} && \text{par propriété du conjugué} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z} && \text{conjugué d'un réel} \\ & && \text{conjugué d'un } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux.
D'où l'égalité.

38

Écrivons a sous forme trigonométrique $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

— Brouillon. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = a &\iff \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} z} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ &\iff \operatorname{Re} z = r \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z \equiv \theta\ [2\pi] \end{aligned}$$

Candidat : $z = \ln r + \mathrm{i}\theta$, licite car $r > 0$.
Puis on vérifie que $\mathrm{e}^z = a$.

— On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = a &\iff \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z_0} \\ &\iff \mathrm{e}^{z-z_0} = 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z-z_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im}(z-z_0)} = 1 \\ &\iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z-z_0) = 0 \\ \operatorname{Im}(z-z_0) \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \\ &\iff z - z_0 \in \mathrm{i}2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

39

Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i} &\iff \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \\ &\iff x = \ln(\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad y \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

42

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = r\,e^{\mathrm{i}\theta}$.
On cherche les $Z \in \mathbb{C}$ tels que $Z^2 = z$.
Comme z est non nul, un complexe Z solution est nécessairement non nul.
Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $Z = \rho\,e^{\mathrm{i}\varphi}$.
On a

$$\begin{aligned} Z^2 = z &\iff \rho^2\,e^{2i\varphi} = r\,e^{\mathrm{i}\theta} \\ &\iff \rho^2 = r \text{ et } 2\varphi \equiv \theta\ [2\pi] \\ &\iff \rho = \sqrt{r} \text{ et } \varphi \equiv \frac{\theta}{2}\ [\pi] \\ &\iff Z = \sqrt{r}\,e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \text{ ou } Z = \sqrt{r}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Autre preuve. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = r\,e^{\mathrm{i}\theta}$.
Soit $Z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} Z^2 = z &\iff Z^2 = \left(\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)^2 \\ &\iff \left(Z - \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)\left(Z + \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \\ &\iff Z = \sqrt{r}\,e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \text{ ou } Z = -\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

43

On a $1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\exp\left(-i\,\frac{\pi}{3}\right)$.
On en déduit que les racines carrées de $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont $\pm\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, c'est-à-dire $\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.

45

Soit $Z=X+\mathrm{i}Y$ tel que $Z^2=21-20\mathrm{i}$.
Alors, en traduisant l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires, on a :

$$\begin{cases} X^2+Y^2 &= \sqrt{21^2+20^2}=29 \\ X^2-Y^2 &= 21 \\ 2XY &= -20 \end{cases}$$

Par somme et différence, on en déduit $X^2=25$ et $Y^2=4$, et donc $X=\pm 5$ et $Y=\pm 2$.
Comme $2XY\leqslant 0$, on a $(X,Y)=(5,-2)$ ou $(X,Y)=(-5,2)$.
Ainsi, les racines carrées *potentielles* de $21-20\mathrm{i}$ sont $5-2\mathrm{i}$ et $-5+2\mathrm{i}$.
Comme on sait par ailleurs qu'il y en a exactement deux, ce sont exactement celles-là.

46

1. **Analyse.** Soit $Z\in\mathbb{C}$ tel que $Z^2=1+\mathrm{i}$.
   Écrivons Z sous forme algébrique $Z=X+\mathrm{i}Y$ avec $X,Y\in\mathbb{R}$.
   Alors, en traduisant l'égalité des modules, des parties réelle, imaginaire, on obtient :

$$X^2+Y^2=\sqrt{2}$$
$$X^2-Y^2=1$$
$$2XY=1$$

   Par somme et différence des lignes 1 et 2, on déduit $X^2=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $Y^2=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$.
   Comme $XY\geqslant 0$, on a :

$$Z=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\qquad\text{ou}\qquad Z=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}.$$

   Synthèse. Les deux nombres complexes sont nécessairement des racines carrées de $1+\mathrm{i}$, car on sait que l'équation $Z^2=1+\mathrm{i}$ admet exactement deux solutions (proposition 42). Comme on en a trouvé au plus deux, c'est qu'on les a toutes trouvées.
2. On a $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc les racines carrées de $1+\mathrm{i}$ sont $2^{\frac14}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $-2^{\frac14}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.
   On compare avec les deux racines carrées trouvées à la question précédente, qui sont exprimées sous forme algébrique.
   Puisque $\cos\dfrac{\pi}{8}>0$, on a $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}=2^{\frac14}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.
   En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a donc :

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=2^{\frac14}\cos\frac{\pi}{8}\qquad\text{et}\qquad\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=2^{\frac14}\sin\frac{\pi}{8}$$

   d'où

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}\overset{\text{WHY}}{=}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\qquad\text{et}\qquad\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}\overset{\text{WHY}}{=}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

47

Transformons un peu le membre gauche de l'équation.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) && \text{où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta \text{ (qui existe!)} \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\delta}{2a}\right)\right)\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\delta}{2a}\right)\right) \\ &= a\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad \frac{-b-\delta}{2a}.$$

qui sont distinctes si $\Delta \neq 0$, et égales si $\Delta = 0$.

48

Le discriminant vaut $\Delta = -24+10\mathrm{i}$.
Déterminons une racine carrée de Δ, que l'on note δ.
Écrivons δ sous forme algébrique $\delta = a+\mathrm{i}\,b$.
En prenant le module, la partie réelle et la partie imaginaire de l'égalité $\delta^2 = \Delta$, on obtient :

$$a^2+b^2 = \sqrt{24^2+10^2} = 26, \qquad a^2-b^2 = -24, \qquad \text{et} \qquad 2ab = 10,$$

ce qui donne $a = \pm 1$, $b = \pm 5$ et $ab > 0$.
Ainsi, **UNE** racine carrée de Δ est $1+5\mathrm{i}$.
Les solutions de l'équation sont donc :

$$\frac{1}{12}\big((5-\mathrm{i}) \pm (1+5\mathrm{i})\big) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\mathrm{i} \;\text{ et }\; \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

49

D'après le théorème 47, on a, à la numérotation près,

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Calculons la somme ! On trouve

$$z_1+z_2 = -\frac{b}{a}$$

Calculons le produit. Comme $b^2-\delta^2 = b^2-\Delta = 4ac$, on obtient $z_1z_2 = \frac{c}{a}$.

50

On a :

$$z_1^2+z_2^2-z_1z_2 \;=\; (z_1+z_2)^2-3\,z_1z_2 \;=\; \sqrt{78}^2-3\times 13=39$$

51

Calmement, par double implication !

55

- Comme $\xi \neq 1$, on a $1+\xi+\xi^2+\cdots+\xi^{n-1}=\dfrac{1-\xi^n}{1-\xi}$, ce qui vaut 0 car $\xi^n=1$.
- On pose $\xi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. Comme $n \geqslant 2$, on a $\xi \neq 1$. Les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité sont alors $1,\xi,\ldots,\xi^{n-1}$ et, d'après le premier point, leur somme est nulle.

56

Le produit des racines $n^{\text{ème}}$ de 1 est égal à :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2\pi}{n}k}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi}\\ &= (-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

58

- Dans le cas où $z=0$, le résultat est évident puisque le nombre complexe 0 a une seule racine $n^{\text{ème}}$ qui est 0, et que $\{\omega_0\,\xi,\xi\in\mathbb{U}_n\}=\{0\}$.
- Supposons donc $z\neq 0$. Donc $\omega_0\neq 0$.

  Comme $\omega_0^n=z$, l'équation $\omega^n=z$ s'écrit aussi $\omega^n=\omega_0^n$ ou encore à $\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^n=1$.

  On en déduit on a $\omega^n=z$ si et seulement si

$$\exists\xi\in\mathbb{U}_n,\ \frac{\omega}{\omega_0}=\xi\quad\text{ou encore}\quad\exists\xi\in\mathbb{U}_n,\ \omega=\xi\,\omega_0.$$

59

Comme $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, l'ensemble de ses racines cinquièmes est :

$$\left\{2^{\frac{1}{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)},\ k\in[\![0,4]\!]\right\}.$$

60

On remarque que -1 est une solution évidente, autrement dit, -1 est une racine $2n+1^{\text{ème}}$ de -1 !!
On a donc les équivalences

$$\begin{aligned} z^{2n+1}+1=0 \quad &\iff \quad z^{2n+1}=-1 \\ &\iff \quad z^{2n+1}=(-1)^{2n+1} \\ &\iff \quad \left(\frac{z}{-1}\right)^{2n+1}=1 \\ &\iff \quad -z\in\mathbb{U}_{2n+1} \\ &\iff \quad \exists\, k\in[\![0,2n]\!],\ -z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{2n+1}} \\ &\iff \quad \exists\, k\in[\![0,2n]\!],\ z=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{2n+1}} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\left\{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{2n+1}},k\in[\![0,2n]\!]\right\} \quad \text{que l'on peut aussi écrire} \quad \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\frac{2k\pi}{2n+1})},k\in[\![0,2n]\!]\right\}$$

Autre solution. On peut aussi écrire -1 sous forme trigonométrique, c'est-à-dire $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, et en déduire que $-1=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n+1}}\right)^{2n+1}$. Puis, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} z^{2n+1}+1=0 \quad &\iff \quad z^{2n+1}=-1 \\ &\iff \quad z^{2n+1}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n+1}}\right)^{2n+1} \\ &\iff \quad \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n+1}}}\in\mathbb{U}_{2n+1} \\ &\iff \quad \exists\,\ell\in[\![0,2n]\!],\ z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n+1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\ell\pi}{2n+1}} \end{aligned}$$

Avec cette rédaction, on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2n+1}+\frac{2\ell\pi}{2n+1})},\ell\in[\![0,2n]\!]\right\}$$

Question. On peut s'interroger sur l'égalité suivante :

$$\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\frac{2k\pi}{2n+1})},k\in[\![0,2n]\!]\right\} \;=\; \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2n+1}+\frac{2\ell\pi}{2n+1})},\ell\in[\![0,2n]\!]\right\}$$

Il y a bien égalité. Pour cela, comparer les exposants en mettant tout le monde avec le dénominateur $2n+1$.
La clé de l'inclusion $\boxed{\subset}$ réside dans l'égalité $(2n+1)\pi+2k\pi$ s'écrit $\pi+2\ell\pi$ avec $\ell=k+n$. Pour l'autre inclusion, je vous laisse faire.

61

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1,\vec{u}_2) &= (\vec{u}_1,\vec{\imath})+(\vec{\imath},\vec{u}_2) \\ &= -(\vec{\imath},\vec{u}_1)+(\vec{\imath},\vec{u}_2) \\ &\equiv -\arg z_1+\arg z_2\ [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\ [2\pi] \end{aligned}$$

On a les équivalences

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2 \text{ sont colinéaires} \quad &\iff \quad (\vec{u}_1,\vec{u}_2)\equiv 0\ [\pi] \\ &\iff \quad \arg\left(\tfrac{z_2}{z_1}\right)\equiv 0\ [\pi] \\ &\iff \quad \frac{z_2}{z_1}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

64

Notons F la translation de vecteur $\vec{u}$.
Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'. On a les équivalences

$$\begin{aligned} M' = F(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \\ &\iff z' - z = b \\ &\iff z' = z + b \\ &\iff z' = f(z) \end{aligned}$$

en posant $f : z \mapsto z + b$.

66

Soit M un point d'affixe z. Soit M' un point d'affixe z'.
On a les équivalences

$$\begin{aligned} M' = F(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z' - \omega = \lambda(z - \omega) \\ &\iff z' = \lambda(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$

68

Soit M un point d'affixe z. Soit M' un point d'affixe z'.

— Cas $M \neq \Omega$.
On a les équivalences

$$\begin{aligned} M' = F(M) &\iff \Omega M = \Omega M' \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]. \\ &\iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \\ &\iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ &\iff z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$

— Cas $M = \Omega$.
On a bien l'équivalence

$$\underbrace{M' = F(M)}_{M' = \Omega} \iff \underbrace{z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega}_{z' = \omega}$$

69

Il s'agit de $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{i}(z - 1 - \mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} \ = \ \mathrm{i}z + 2 \end{array}$.

70

— Lorsque $a = 1$, F est représentée par $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. C'est l'identité du plan.

— Supposons $a \neq 1$.

Vérifions que $F = H \circ R$ en montrant que $f = h \circ \rho$ où $f : z \mapsto az$ et $h : z \mapsto |a|z$ et $\rho : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $h \circ \rho(z) = h(\rho(z)) = h(|a|z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times (|a|z) = az$.

On montre de même l'égalité $F = R \circ H$.

71

Notons M et M' les points d'affixes respectives z et z'.
En notant F la symétrie par rapport à la droite $(O, \vec{\imath})$, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
M' = F(M) &\iff (O,\vec{\imath}) \text{ est la médiatrice de } [MM'] \\
&\iff \text{le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (O,\vec{\imath}) \text{ et } \overrightarrow{MM'} \text{ et } \vec{\imath} \text{ sont orthogonaux} \\
&\iff \frac{z+z'}{2} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{z-z'}{1} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \\
&\iff z+z' \in \mathbb{R} \text{ et } z-z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \\
&\iff z' = \overline{z}
\end{aligned}$$

Justifions la dernière équivalence, qui paraît naturelle, mais encore faut-il assurer le coup !

$$\begin{aligned}
z+z' \in \mathbb{R} \text{ et } z-z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff \begin{cases} z+z' = \overline{z} + \overline{z'} \\ z-z' = -\overline{z} + \overline{z'} \end{cases} \\
&\iff z = \overline{z'} \text{ et } z' = \overline{z} \\
&\iff z' = \overline{z}
\end{aligned}$$