Calculs algébriques

I. Symboles $\sum$ et $\prod$

Définitions

- Étant donné des nombres réels $a_1, \dots, a_n$, il arrive fréquemment que l'on ait besoin de considérer leur somme et/ou leur produit. Une première possibilité est d'utiliser des points de suspension :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad\qquad a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

- Dans les notations ci-dessus, il faut bien comprendre que si n vaut 1, alors la somme et le produit considérés valent simplement a_1 (l'écriture du terme a_2 avant les points de suspension ne sert qu'à bien expliciter la liste utilisée).

  Pour pallier cet inconvénient et éviter toute ambiguïté, nous introduisons les notations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} = \prod_{k=1}^{n} x$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n, et l'on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

  On a ainsi

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040, \quad 8! = 40\,320, \quad 9! = 362\,880.$$

- Plus généralement, si p et q sont deux entiers vérifiant $p \leqslant q$, et si l'on dispose de $q - p + 1$ nombres réels numérotés de p à q, disons $a_p, \dots, a_q$, alors :
  — leur somme est notée $a_p + \cdots + a_q$, ou $\sum_{k=p}^{q} a_k$; « la somme des a_k pour k allant de p à q »
  — leur produit $a_p \times \cdots \times a_q$, ou $\prod_{k=p}^{q} a_k$ « le produit des a_k pour k allant de p à q »
- On utilise indifféremment les notations suivantes :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k, \quad \sum_{k \in [\![p,q]\!]} a_k, \quad \sum_{p \leqslant k \leqslant q} a_k, \qquad\qquad \prod_{k=p}^{q} a_k, \quad \prod_{k \in [\![p,q]\!]} a_k, \quad \prod_{p \leqslant k \leqslant q} a_k.$$

- Lorsque tous les termes de la famille $(a_k)_{k \in I}$ sont **égaux**, les calculs de $\sum_{k \in I} a_k$ et $\prod_{k \in I} a_k$ sont immédiats.

  Par exemple, que vaut $\prod_{k=1}^{m} 3$? Et $\sum_{k=0}^{m} 3$?

1 **Question.** Combien vaut $\prod_{k=1}^{n} (2k)$? Et le produit $n! \times \prod_{k=1}^{n} (n+k)$? Et le quotient $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$?

Cas d'une famille finie quelconque

- On étend les notions introduites ci-dessus au cas de n'importe quelle famille $(a_k)_{k\in I}$, où l'ensemble d'indexation I est *fini* et *non vide* :
  - — $\sum_{k\in I} a_k$ désigne la somme de tous les termes de la famille ;
  - — $\prod_{k\in I} a_k$ désigne le produit de tous les termes de la famille.
- La somme des termes de la famille $(k^2)_{k\in[\![-3,2]\!]}$ vaut :

$$\sum_{k\in[\![-3,2]\!]} k^2 \quad = \quad (-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2 \quad = \quad 19.$$

  On voit dans cet exemple que les termes d'une famille ne sont pas nécessairement deux à deux distincts. Une valeur peut donc être comptée plusieurs fois dans une somme.
- **Exemple.** Posons $I = \left\{k \in [\![1,7]\!] \mid k \text{ impair}\right\}$. Calculons $\sum_{k\in I} k$ que l'on peut noter également $\sum_{\substack{k\in[\![1,7]\!]\\ k \text{ impair}}} k$.

Somme vide, produit vide

- On étend les notions de somme et produit au cas où l'ensemble d'indexation est vide, en convenant qu'une somme vide vaut 0 et qu'un produit vide vaut 1 :

$$\sum_{k\in\varnothing} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k\in\varnothing} a_k = 1.$$

- Si $p = q+1$, on convient que $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$ et $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$.
- Cette convention permet d'étendre naturellement :
  - — la notation x^n pour $n = 0$ (où $x \in \mathbb{R}$) : $\quad x^0 = \prod_{k=1}^{0} x = 1$
  - — la notation $n!$ pour $n = 0$: $\quad 0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$

2 sol → 21 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant n!$$

Premières règles de calcul

Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ nous donnent les propriétés de calcul suivantes, qui ne sont pas à apprendre par cœur, mais à comprendre ! Pour cela, il ne faut pas hésiter à les vérifier en les écrivant avec des points de suspension.

- Grâce à la commutativité et l'associativité des lois + et ×, on a :

$$\sum_{k\in I}(a_k+b_k) = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k\, b_k) = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)\left(\prod_{k\in I} b_k\right).$$

Lorsque $I=\{1,2\}$, on a

$$\underbrace{a_1+b_1}_{\text{terme pour } k=1} + \underbrace{a_2+b_2}_{\text{terme pour } k=2} = (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{a_1 b_1}_{\text{terme pour } k=1} \times \underbrace{a_2 b_2}_{\text{terme pour } k=2} = (a_1 a_2)(b_1 b_2)$$

- En notant n le nombre d'éléments de I :

$$\sum_{k\in I}(\lambda+a_k) = \sum_{k\in I}\lambda + \sum_{k\in I} a_k = n\lambda + \sum_{k\in I} a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(\lambda a_k) = \left(\prod_{k\in I}\lambda\right)\left(\prod_{k\in I} a_k\right) = \lambda^n \prod_{k\in I} a_k$$

Lorsque $I=\{1,2\}$, on a

$$\underbrace{\lambda+a_1}_{\text{terme pour } k=1} + \underbrace{\lambda+a_2}_{\text{terme pour } k=2} = 2\lambda + (a_1+a_2) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\lambda a_1}_{\text{terme pour } k=1} \times \underbrace{\lambda a_2}_{\text{terme pour } k=2} = \lambda^2 \times (a_1 a_2)$$

- **Diverses opérations** ($\lambda\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{N}$) :

$$\sum_{k\in I}(\lambda\, a_k) = \lambda\sum_{k\in I} a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k)^p = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^p$$

Lorsque $I=\{1,2\}$, on a

$$\underbrace{\lambda a_1}_{\text{terme pour } k=1} + \underbrace{\lambda a_2}_{\text{terme pour } k=2} = \lambda(a_1+a_2) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{a_1^p}_{\text{terme pour } k=1} \times \underbrace{a_2^p}_{\text{terme pour } k=2} = (a_1 a_2)^p$$

- **Relation de Chasles.** Pour $p\leqslant r\leqslant q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=p}^{q} a_k = \left(\prod_{k=p}^{r} a_k\right)\left(\prod_{k=r+1}^{q} a_k\right).$$

Lorsque $p=1$, $r=3$ et $q=5$, on a

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = (a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5) \qquad \text{et} \qquad a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5 = (a_1\times a_2\times a_3)\times(a_4\times a_5)$$

- **Sommation par paquets.** Pour I_1 et I_2 deux ensembles finis disjoints, alors :

$$\sum_{k\in I_1\sqcup I_2} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I_1\sqcup I_2} a_k = \prod_{k\in I_1} a_k \times \prod_{k\in I_2} a_k.$$

Lorsque $I_1=\{k\in[\![1,5]\!] \mid k \text{ pair}\}$ et $I_2=\{k\in[\![1,5]\!] \mid k \text{ impair}\}$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = (a_2+a_4)+(a_1+a_3+a_5) \qquad \text{et} \qquad a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5 = (a_2\times a_4)\times(a_1\times a_3\times a_5)$$

- **Linéarité de la somme :**

$$\sum_{k\in I}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k\in I} a_k + \mu\sum_{k\in I} b_k$$

3 sol → 21 **Question.** *(Produit des entiers pairs, produit des entiers impairs)*
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère :

$$A_n = \prod_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} k \qquad \text{et} \qquad B_n = \prod_{\substack{k \in [\![1,2n+1]\!] \\ k \text{ impair}}} k$$

Exprimer A_n, puis B_n à l'aide de $n!$.

4 sol → 21 **Question.** Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Changements d'indice

Décalage d'indice

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \dots \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \frac{1}{j} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \sum_{j=1}^{n} \dots$$

5 sol → 23 **Question.** Soit $n \geqslant 2$.
En remarquant que $\dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}$, simplifier la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.
La formule trouvée est-elle encore valable pour $n = 1$?

Symétrisation

On a l'égalité

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$$

qui s'écrit à l'aide de symboles Σ sous la forme :

....

Exemple. On a

$$\sum_{\ell=1}^{n} (n-\ell)^2 = \sum_{k=\dots}^{\dots} k^2 \qquad \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{\dots}^{\dots} j$$

Sommation par paquets

- **Cas général.** Ici, I désigne un ensemble fini d'entiers. Étant donné une somme $\sum_{k\in I} a_k$, il peut être intéressant de traiter séparément les termes d'indice pair et ceux d'indice impair ; cela consiste à écrire :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ impair}}} a_k.$$

- **Cas particulier.** Considérons la somme $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k$ dans laquelle on souhaite séparer les termes d'indice pair et ceux d'indice impair.
  On peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = \sum_{\substack{k\in[\![1,2n+1]\!]\\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{k\in[\![1,2n+1]\!]\\ k \text{ impair}}} a_k.$$

  Pour rendre la formule plus explicite, constatons que, dans l'ensemble $[\![1,2n+1]\!]$:
  - les éléments pairs sont les entiers de la forme $2p$ avec $1 \leqslant 2p \leqslant 2n+1$, autrement dit $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant n+\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, puisque p est un entier, $1 \leqslant p \leqslant n$;
  - les éléments impairs sont les entiers de la forme $2q+1$ avec $1 \leqslant 2q+1 \leqslant 2n+1$, autrement dit $0 \leqslant q \leqslant n$.

  On aboutit à la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = \sum_{p=1}^{n} a_{2p} + \sum_{q=0}^{n} a_{2q+1}.$$

- **Autre exemple.** Considérons $\sum_{k=1}^{2n} a_k$ qui contient un nombre pair de termes.
  Parfois, il peut être judicieux de grouper les termes par deux, via l'écriture

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{\cdots} (a_\ell + a_{\ell+1})$$

6 sol → 23 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

Télescopage

Dans ce qui suit, on suppose $p \leqslant q$.

- On appelle *somme télescopique* toute somme de la forme $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k)$.

  L'intérêt de ce type de somme est que sa simplification est immédiate, car tous les termes, sauf le premier et le dernier, se simplifient. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) &= (a_{q+1} - a_q) + (a_q - a_{q-1}) + \cdots + (a_{p+2} - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_p) \\ &= a_{q+1} - a_p.\end{aligned}$$

  Une autre manière de voir les choses est la suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\ &= \sum_{j=p+1}^{q+1} a_j - \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad [j = k+1] \text{ dans la première somme} \\ &= a_{q+1} + \underbrace{\sum_{j=p+1}^{q} a_j - \sum_{k=p+1}^{q} a_k}_{=0} - a_p \\ &= a_{q+1} - a_p.\end{aligned}$$

- On appelle *produit télescopique* tout produit de la forme $\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, où les a_k sont supposés tous non nuls. La simplification d'un tel produit est immédiate. De façon analogue au calcul précédent, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \cdots \frac{a_q}{a_{q-1}} \cdot \frac{a_{q+1}}{a_q} \\ &= \frac{a_{q+1}}{a_p}\end{aligned}$$

  que je vous laisse écrire de manière plus formelle, si cela vous fait plaisir.

- **À l'oral.** En écrivant des pointillés dans sa tête (ou sur son brouillon), on a :

$$\sum_{k=3}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \ldots \qquad \sum_{k=3}^{n} \left(\ln k - \ln(k+1)\right) = \ldots \qquad \sum_{k=3}^{n} \left(\sqrt{k-1} - \sqrt{k}\right) = \ldots$$

7 sol → 25 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

8 sol → 25 **Question.** Déterminer deux nombres a et b vérifiant : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une écriture simplifiée de $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Erreurs classiques

9 **Attention.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Calculer $S_{n+1} - S_n$ et $C_{n+1} - C_n$.

10 **Attention.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $A_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Un élève propose la solution suivante :

On fait le changement de variables $j = 2k-1$ et on a alors

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{j=1}^{2n-1} j = \frac{(2n-1)(2n)}{2} = (2n-1)n.$$

Un camarade lui répond :

Tu as dû faire une erreur…
En effet, pour $n = 2$, on a $A_2 = 1+3 = 4$, et avec ta formule, tu trouves :

$$(2n-1)n = (2 \times 2 - 1) \times 2 = 6.$$

II. Quelques calculs remarquables

Somme des termes d'une suite arithmétique

11 **Proposition.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Remarque.** La formule peut bien sûr s'adapter très facilement lorsque la somme commence à 0. On a $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **Preuve.** Le résultat est évident pour $n = 0$, puisqu'une somme qui porte sur l'ensemble vide vaut 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Optons pour une démonstration intuitive, en utilisant des points de suspension.
Notons S la somme considérée, et sommons une fois dans un sens, et une fois dans l'autre ; puis ajoutons !

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

On a donc $2S = n(n+1)$, c'est-à-dire $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **Preuve écrite formellement.** Posons $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On a

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) && \text{changement d'indice } [j = n-k+1] \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) && \text{on renomme } j \text{ en } k \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (n+1) && \text{linéarité du symbole } \Sigma \\ &= n(n+1) && \text{somme dont le terme général est constant} \end{aligned}$$

D'où $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

12 **Proposition.** Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$.

— On a
$$\sum_{k=p}^{q} k = \frac{(q-p+1)(p+q)}{2}.$$

— Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On a
$$\sum_{k=p}^{q} u_k = (q-p+1)\,\frac{u_p + u_q}{2}.$$

- **À retenir.**

La somme des termes *consécutifs* d'une suite arithmétique est égale à

$$\frac{\text{nb termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{d}^{\text{er}} \text{ terme})}{2}$$

Somme des premières puissances

13
preuve

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Somme des termes d'une suite géométrique

14
preuve

Proposition. Soit $q \in \mathbb{C}$. Soit $m \leqslant n$ deux entiers. On a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\[2ex] n-m+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **À retenir.**

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut $\dfrac{\textit{1}^{er}\textit{ t. présent} - \textit{1}^{er}\textit{ t. absent}}{1-q}$

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut 1er *t.* $\times \dfrac{1-q^{\textit{nb de t.}}}{1-q}$

15
sol → 27

Question. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Formule de Bernoulli

16
preuve

Proposition (Bernoulli). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}.$$

- **Pour la culture.** Cette formule peut aussi être écrite

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{i+j=n-1} a^i\, b^j$$

où la somme porte sur les couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $i + j = n - 1$.
En effet, un tel couple peut s'écrire $(k, n-1-k)$ d'où l'égalité des deux sommes.

- **Remarque.** *Factorisation de* $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.
Comme $2n+1$ est impair, on a $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$.
Ainsi, en appliquant la formule de Bernoulli, on a

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= \big(a - (-b)\big) \sum_{k=0}^{2n} a^k\, (-b)^{(2n+1)-1-k} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k}\, a^k\, b^{2n-k} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\, a^k\, b^{2n-k} && (k \text{ et } 2n-k \text{ ont la même parité}). \end{aligned}$$

III. Sommes doubles

Sommes rectangulaires

On a, jusqu'ici, considéré des sommes simples, c'est-à-dire des sommes qui sont indexées par un seul indice.
On va maintenant considérer des sommes indexées par deux indices.
Considérons ce tableau

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$

La somme des éléments de ce tableau est notée

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,j}$$

On peut évaluer cette somme de plusieurs façons :

— on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les trois sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}\right)$$

— on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,j}\right)$$

17 **À retenir.** Le calcul d'une somme double sur un rectangle se ramène au calcul de deux sommes simples imbriquées.

- La somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$ notée encore $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$, peut s'écrire à l'aide de deux $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) \qquad \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

- La somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}$ notée encore $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$, peut s'écrire à l'aide de deux $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

18 **Question.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer $S_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$.

Un cas particulier

Un cas particulier intéressant est celui où la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est telle qu'il existe deux familles $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad a_{i,j} = b_i\, c_j.$$

En sommant les éléments de ce tableau $\begin{array}{c|c|c} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ \hline b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3 \end{array}$, on trouve ....

19 **Proposition.** Soit $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ deux familles de réels. On a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_i\, c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} c_j\right).$$

20 sol → 27 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} i\, 2^j$.

21 **Proposition (Le carré d'une somme simple est une somme double).**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels. On a

- $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_i x_j$
- $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2 + \sum_{i\neq j} x_i x_j$
- $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$

Généralisation : somme rectangulaire quelconque

Ce qui a été énoncé dans le cas $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ se généralise à un produit cartésien $I \times J$, où I et J sont des ensembles finis.

— une somme double rectangulaire se ramène à deux sommes simples imbriquées :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

— le cas où la famille est de la forme $(b_i\, c_j)_{(i,j)\in I\times J}$ mène à un produit de deux sommes simples :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i\, c_j = \left(\sum_{i\in I} b_i\right)\left(\sum_{j\in J} c_j\right)$$

Sommes triangulaires

Considérons ce tableau

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
		$a_{3,3}$	$a_{3,4}$
			$a_{4,4}$

La somme des éléments de ce tableau est notée

$$S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} a_{i,j}$$

On peut évaluer cette somme de plusieurs façons :

— on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=i}^{4} a_{i,j} \right)$$

— on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right)$$

22 **À retenir.** Le calcul d'une somme double sur un *triangle* se ramène au calcul de deux sommes simples imbriquées *dont le deuxième indice dépend du premier.*
On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right)$$

Cette ligne est à voir comme une **interversion** de signes $\sum$.

23 sol → 27 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j} \right)$. Que vaut S_2 ? Simplifier S_n.

24 sol → 28 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S = \sum_{i=1}^{n} i\, 2^i$.
En écrivant i comme une somme de 1, montrer que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.

IV. Coefficients binomiaux

Définition et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que *factorielle* n est le nombre entier $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. On a en particulier $0! = 1$.

25 **Définition.** Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

Le *coefficient binomial « p parmi n »* noté $\binom{n}{p}$ est le nombre (rationnel, a priori) défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ termes}}}{p!} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Convention.** On étend la définition à $p \in \mathbb{Z}$. On convient que $\binom{n}{p} = 0$ pour tout $p < 0$.
- Pour $n, p \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ peut s'interpréter comme le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. De manière informelle, cela signifie qu'il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir p objets parmi n. Confer le chapitre « Dénombrement ».

26 preuve **Proposition.**

- **Petites valeurs de k.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- **Symétrie**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- **Formule d'absorption, dite aussi « formule du capitaine »**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{Z},\quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

- **Formule du triangle de Pascal**

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- **C'est un entier !**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

- **Remarque.** La formule du capitaine peut aussi s'écrire sous cette forme, peut-être plus facile à retenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{\forall k \in \mathbb{Z}^*},\quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

- **Savoir s'adapter !**

Il faut savoir « translater » de tête les indices, et passer d'un membre à un autre.
Par exemple, la formule du triangle de Pascal s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Par exemple, la formule du capitaine de l'énoncé peut aussi s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \binom{n}{k} = \frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

27
sol → 28
Question. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

28 **Proposition (Formule du binôme de Newton).** On a :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- **Preuve.** Fixons $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathscr{H}_n$ la propriété :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Initialisation. On a $\mathscr{H}_0$ (WHY ?)
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}_n$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \Bigg(a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1}} \Bigg) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \right) \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{\binom{n+1}{k}} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

- **Autre expression utile.**
On a

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

- **Remarque super importante pour la suite de l'année !**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x+1)^n = x^n + n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{k} x^k + \cdots + n x + 1$$

Dit autrement, le coefficient en x^k de $(1+x)^n$ vaut $\binom{n}{k}$.

V. Des résultats classiques en guise d'exercices

Sommes de coefficients binomiaux

29 **Exercice.**

- **Somme des coeffs. binomiaux sur une même ligne**
  On a
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
  La somme des coefficients de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n.

- **Somme alternée des coeffs. binomiaux sur une même ligne**
  On a
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$
  La somme alternée des coefficients binomiaux sur une même ligne est nulle, sauf pour la ligne n° 0

- **Somme des coeffs. binomiaux d'indices pairs (et impairs)**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose
  $$S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p+1}$$
  On a
  $$S_n = 2^{n-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^{n-1}$$

- **Formule de Pascal généralisée**
  On a
  $$\forall m \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=c}^{m} \binom{i}{c} = \binom{m+1}{c+1}$$

- **Autres sommes**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
  $$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

- **Formule de Vandermonde**
  $$\forall n, m, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

30 **La formule du capitaine.**
Soit $c, j, n \in \mathbb{N}$ avec $c \leqslant j \leqslant n$. On a la formule suivante :

$$\binom{n}{j}\binom{j}{c} = \binom{n}{c}\binom{n-c}{j-c}$$

Plus tard dans l'année, on prouvera cette égalité en récitant le petit texte suivant
« Pour constituer une équipe de j joueurs ayant c capitaines (avec n joueurs à disposition), on peut procéder de deux façons :

- commencer par choisir les j joueurs (parmi les n à disposition), puis parmi ces j joueurs, choisir les c capitaines
- ou bien, commencer par choisir les c capitaines (parmi les n joueurs à disposition), puis choisir $j-c$ joueurs parmi les $n-c$ joueurs restants. »

31 **La formule d'inversion de Pascal.**
Soit (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Il existe une formule permettant d'« inverser » la formule précédente et ainsi exprimer a_n en fonction des b_k :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

Une remarque anecdotique. La formule s'écrit aussi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k$$

Pour le fun, si on veut retenir cette formule, on peut se dire que c'est la même que l'égalité initiale, mais avec des suites "signées", c'est-à-dire $a'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b'_k$ avec $u'_i = (-1)^i u_i$.

32 **L'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels.
On a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Pour $n = 1$, cela dit $(a_1 b_1)^2 \leqslant a_1^2 b_1^2$, ce qui est évident.

Pour $n = 2$, cela dit $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$, ce qui n'est **pas** évident.

Calculs algébriques

preuve et éléments de correction

2

On a

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad k! \leqslant (n-1)!$$

Par somme de ces n inégalités, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (n-1)!}_{n\times(n-1)!}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant n!$$

3

• Par définition, on a $A_n = \prod_{k=1}^{n} (2k)$.
D'après les règles de calculs du symbole $\prod$, on a :

$$A_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n\, n!$$

• On utilise le jeu d'écriture suivant $B_n = \dfrac{B_n}{1}$ et l'on multiplie en haut et en bas par A_n, de sorte que $B_n = \dfrac{A_n \times B_n}{A_n}$.
On voit apparaître :

— au numérateur, le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n+1$, c'est-à-dire $(2n+1)!$

— au dénominateur A_n, c'est-à-dire $2^n\, n!$

On en déduit :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

4

Optons pour un raisonnement direct en fixant $n \in \mathbb{N}$.
Le cas où $n = 0$ est évident car les deux produits portent sur l'ensemble vide, donc sont égaux à 1.
Passons au cas où $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités (je vous préviens, j'en fais 10 fois trop, donc vous pouvez enlever des étapes !)

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(4k-2) &= 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= 2^n \prod_{\substack{j\in[\![1,2n]\!] \\ j \text{ impair}}} j \\
&= 2^n \frac{\prod\limits_{j\in[\![1,2n]\!]} j}{\prod\limits_{\substack{j\in[\![1,2n]\!] \\ j \text{ pair}}} j} \\
&= 2^n \frac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} \\
&= 2^n \frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} \\
&= \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)}{1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n} \\
&= \prod_{j\in[\![n+1,2n]\!]} j \\
&= \prod_{k=1}^{n}(n+k)
\end{aligned}$$

BILAN. On a montré que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

• **Autre solution.** Un élève (Louis Cayol, HEC 2023) me propose un raisonnement par récurrence, essayons !

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathscr{H}_n$ la propriété

$$\mathscr{H}_n : \quad « \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k) »$$

Initialisation. Montrons $\mathscr{H}_0$.

Le membre gauche vaut $\prod\limits_{k=1}^{0}(4k-2) = 1$, car le produit porte sur l'ensemble vide.

Le membre droit vaut $\prod\limits_{k=1}^{0}(0+k) = 1$, car le produit porte sur l'ensemble vide.

Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}_n$. Montrons $\mathscr{H}_{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) &= \prod_{k=1}^{n}(4k-2)\times\big(4(n+1)-2\big) \\
&= \prod_{k=1}^{n}(n+k)\times 2(2n+1) && \text{d'après } \mathscr{H}_n \\
&= (n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)\times 2(2n+1) \\
&= (n+2)(n+3)\cdots(2n)\times(2n+1)\times 2(n+1) \\
&= (n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2) \\
&= \prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{H}_{n+1}$.

Bilan On a montré que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

5

On a

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) && \text{calcul} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} && \text{linéarité du symbole } \Sigma \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j} && \text{changement d'indice } j=k+2 \text{ dans la deuxième somme} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} && \text{variable muette dans la deuxième somme} \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)-\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) && \text{car } n\geqslant 2 \\
&= \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

À l'avant-dernière égalité du calcul précédent, on notera la justification « $n\geqslant 2$ ». En effet, pour pouvoir sortir deux termes des sommes $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$, celles-ci doivent en comporter au moins deux.

Pour $n=1$, on a $S=\frac{2}{3}$. Et la formule donne $\frac{2}{3}$. La formule est donc encore valable pour $n=1$, chose que l'on justifie a posteriori !

Solution 1, en utilisant le point précédent. Remarquons que l'on a :

$$S = -1+2-3+4-5+6-\cdots-(2n-1)+2n.$$

En regroupant les termes deux à deux, il vient :

$$\begin{aligned} S &= (-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+\big(-(2n-1)+2n\big) \\ &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ termes}} \\ &= n. \end{aligned}$$

Le plus souvent, pour mettre en évidence un regroupement de termes pertinent, il est plus facile d'utiliser l'écriture avec des points de suspension. Effectuer une sommation par paquets revient alors à placer judicieusement les parenthèses.

On peut aussi rédiger cela de manière un peu plus formelle.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k \\ &= \sum_{\substack{\ell\in[\![1,2n]\!] \\ \ell \text{ impair}}} \big((-1)^\ell \ell + (-1)^{\ell+1}(\ell+1)\big) \\ &= \sum_{\substack{\ell\in[\![1,2n]\!] \\ \ell \text{ impair}}} \big(-\ell + (\ell+1)\big) \\ &= \sum_{\substack{\ell\in[\![1,2n]\!] \\ \ell \text{ impair}}} 1 \\ &= \text{nombre d'entiers impairs compris entre 1 et } 2n \\ &= n \end{aligned}$$

Dans cette solution 1, il y a donc n paquets comportant chacun 2 termes.

Solution 2, en faisant deux paquets.

Dans cette solution 2, il y a 2 paquets comportant chacun n termes.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k \\
&= \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} (-1)^k k + \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} (-1)^k k \\
&= \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} k - \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} k \\
&= \sum_{p=1}^{n} (2p) - \sum_{q=1}^{n} (2q-1) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \Big((2p) - (2q-1)\Big) \\
&= n
\end{aligned}
$$

7

On a

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln k\Big) \\
&= \ln(n+1) - \ln 1 \qquad \text{par télescopage} \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}
$$

8

Au brouillon. En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k} = \frac{ka+(k+1)b}{k(k+1)} = \frac{k(a+b)+b}{k(k+1)}.$$

Sur la copie. On a (partir du membre droit pour le voir) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Donc le couple $(a, b) = (-1, 1)$ convient.

On a donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &\overset{\text{WHY}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} && \text{par télescopage} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

13

• **Preuve de la somme des carrés.**
Une preuve par récurrence est envisageable, mais nécessite de connaître à l'avance le résultat. Nous optons pour une autre démonstration, qui consiste à calculer de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$.

▷ La formule est évidemment vraie pour $n = 0$, puisqu'une somme portant sur l'ensemble vide est nulle.
▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1).$$

— À gauche, on reconnaît une somme télescopique $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 1$.

— À droite, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1) &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n. \end{aligned}$$

En identifiant les deux membres, on obtient

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Isolons $3\sum_{k=1}^{n} k^2$ puis simplifions :

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right) \\ &= (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right) \\ &= (n+1)\frac{n(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne la formule souhaitée $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14

On a, par télescopage :

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} q^k \;=\; \sum_{k=m}^{n}(q^k - q^{k+1}) \;=\; q^m - q^{n+1}.$$

15

On a

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) \overset{\text{WHY}}{=} \operatorname{Im}\Big(\sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k\Big)$$

En calculant la somme des termes d'une suite géométrique, on finit par obtenir après factorisation par l'angle moitié :

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) \;=\; \begin{cases} \sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin(\frac{\theta}{2})} & \text{si } \theta\notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

16

On a, en partant du membre de droite de l'égalité souhaitée :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique qui vaut $a^n b^0 - a^0 b^n$, *i.e.* $a^n - b^n$.

20

On est dans les conditions de la proposition précédente, d'où :

$$S \;=\; \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} 2^j\Big) \;=\; \frac{n(n+1)}{2}(2^{n+1}-2) \;=\; n(n+1)(2^n-1).$$

23

Sous cette forme le calcul est difficile car à i fixé, nous ne connaissons pas d'expression simple pour la somme $\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$. Intervertissons les deux symboles $\sum$:

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\leqslant j\leqslant n}}\frac{1}{j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant j}}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}.$$

Le calcul est alors immédiat, car pour $j\in[\![1,n]\!]$ fixé, on a $\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j} = 1$. On obtient :

$$S = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

24

À i fixé, on a $\sum_{j=1}^{i} 2^i = i\,2^i$, ce qui explique que $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$.
Intervertissons les deux symboles $\sum$:

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant i}} 2^i = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} 2^i = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\leqslant i\leqslant n}} 2^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^i.$$

La somme interne est le somme des termes d'une suite géométrique, que l'on sait donc calculer : $\sum_{i=j}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2^j$.
On obtient :

$$S = \sum_{j=1}^{n}(2^{n+1} - 2^j) = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j$$

et donc, à nouveau en reconnaissant une somme géométrique (la seconde somme ci-dessus) :

$$S = n\,2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

26

C'est un entier !
Montrons

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

par récurrence sur n, en posant

$$\mathscr{H}_n : \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Initialisation. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$\binom{k}{0} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $\mathscr{H}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}_n$.
Montrons $\mathscr{H}_{n+1}$, c'est-à-dire $\forall\, \ell \in \mathbb{Z}$, $\binom{n+1}{\ell} \in \mathbb{Z}$.
Soit $\ell \in \mathbb{Z}$.
D'après la formule du triangle de Pascal, on a

$$\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell}$$

D'après $\mathscr{H}_n$ avec $k = \ell - 1$ (qui est bien un élément de $\mathbb{Z}$), on a $\binom{n}{\ell-1} \in \mathbb{N}$.
D'après $\mathscr{H}_n$ avec $k = \ell$ (qui est bien un élément de $\mathbb{Z}$), on a $\binom{n}{\ell} \in \mathbb{N}$.
Par somme de deux entiers naturels, on en déduit que $\binom{n+1}{\ell} \in \mathbb{N}$.
D'où $\mathscr{H}_{n+1}$.

27

Première solution, maladroite. Faire une disjonction de cas sur k, puis utiliser et utiliser la formule avec les factorielles dans le cas où $k \in [\![1, n+1]\!]$.

Deuxième solution, plus élégante. Utilisons uniquement les formules déjà prouvées dans ce cours.

Partons du membre droit :

$$\begin{aligned}
\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} &= \left(\frac{n+1}{k}-1\right)\binom{n}{k-1} \\
&= \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-1} \\
&= \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1} && \text{formule du capitaine} \\
&= \binom{n}{k} && \text{formule du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$