Calculs

exercices

Sommes et produits

101 Sommes simples

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k$ (v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k$ (vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\,k$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}k$ (iv) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}2k$ (vi) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}2^k$ (viii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$

102 Produits simples

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner des expressions simples pour les produits suivants.

(i) $\displaystyle\prod_{k=-1000}^{1000}(n^2-n)$ (iv) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n}k^2$ (vii) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}2^k$ (x) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}$

(ii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$ (v) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$ (viii) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ (xi) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)$

(iii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^2$ (vi) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}e^{-k}$ (ix) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ (xii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(k(n+1-k)\Big)$

103 Somme des nombres impairs

Donner une formule (et la démontrer) pour la somme $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ des premiers nombres impairs.

104 Télescopage

En utilisant une somme télescopique, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kk!$.

105 Somme alternée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme simplifiée de $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

Il y aura peut-être une disjonction de cas en fonction de la parité de n.
On peut aussi donner une formule close avec la partie entière.

106 Somme géométrique et dérivée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Le but de cet exercice est de déterminer, de trois façons différentes, la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}k\,q^k.$$

1. Exprimer de deux façons différentes S_{n+1} en fonction de S_n, et en déduire la valeur de S_n.
   Une façon est naturelle. Pour l'autre, on pourra penser à un changement d'indice.
2. Calculer $(q-1)S_n$ et en déduire la valeur de S_n.
3. On considère la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k \end{array}$.
   Donner une formule pour la dérivée φ', et en déduire la valeur de S_n.

107 Somme des cubes

Utiliser la somme télescopique $(n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$ pour obtenir une formule pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

108 Différences finies

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reliées par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n en fonction des valeurs de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide des valeurs de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes suivantes :

(i) $\sum_{k=0}^{n+1} a_k$ (ii) $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ (iii) $\sum_{k=0}^{n} 2a_k$ (iv) $\sum_{k=0}^{n}(a_k - 1)$ (v) $\sum_{k=0}^{n}(a_k - k)$

109 Télescopage again

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad v_k = u_k + u_{k+1}.$
On suppose que $u_0 = 0$.

Par un calcul « formel », montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k = (-1)^n u_{n+1}.$

110 Puissances de i

On se place dans l'ensemble des nombres complexes.
En fonction de $n \in \mathbb{N}$, combien valent les quantités suivantes :

- i^n ;
- $1 + i + i^2 + \cdots + i^n$;
- $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^n$.

Coefficient binomial

111 **Une belle égalité**

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

112 **Minoration du coefficient binomial central**

Montrer $\quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}.$

Récurrence !

113 **Somme tronquée alternée des coeffs binomiaux**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On considère

$$S_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Calculer $S_{m,n}$.

Pour quelles valeurs de m et n savez-vous calculer cette somme ? Dans ce cas, quelle(s) preuve(s) connaissez-vous ? Sauriez-vous proposer une preuve par télescopie ?

Maintenant, adaptez la preuve par télescopie pour calculer S dans le cas général. Est-ce que votre formule est valable pour $n = 0$?

Avec les complexes

114 **Somme des distances à 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

115 **Somme de puissance de racines $n^{\text{ème}}$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^p$. Pour la culture, S_p peut aussi s'écrire $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$.
2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k, \ell \leqslant n-1 \\ k \neq \ell}} \xi_k \xi_\ell = 0$.

116 **C et Gamma**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Calculer les sommes :

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(x + ky) \qquad \text{et} \qquad \Gamma = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

117 **Deux sommes**

Soit $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k} \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{(\cos x)^k}.$$

118 **Somme alternée des coefficients binomiaux d'indices pairs**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^k$ et $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k$. On pose $z = R_n + \mathrm{i} I_n$.

1. Calculer z. On remarquera que $(-1)^k = \mathrm{i}^{2k}$.
2. En déduire $R_n^2 + I_n^2$.

Sommes doubles

119 Une somme double (1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

1. Calculer T_1, T_2, T_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer T_n en fonction de n.

120 Une somme double (2)

Simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i(n-j)$.

On doit trouver $\dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{24}$

121 Trois sommes doubles

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min(i,j) \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |i-j|$$

122 Faire ses gammes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$

(iii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$

(iv) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$

(v) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$

(vi) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$

(vii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (j-i)$

(viii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i)$

(ix) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |j-i|$

(x) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$

(xi) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$

(xii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j}$

(xiii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$

(xiv) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$

(xv) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 3^{i+j}$

123 Produits doubles

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple pour les produits suivants.

(i) $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}$

(ii) $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i^j$

(iii) $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$

124 Écart à la moyenne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer l'équivalence :
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 \iff \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i \neq j} |a_i a_j|$$
   (b) Montrer que
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2$$
2. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. Montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - m|\right)^2$$

Divers

125 Une inégalité

Sans récurrence, montrer $\forall n \geqslant 2,\ n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

126 Transformation d'Abel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.
On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Sans récurrence, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k = 2^{n+1}(n-1) + 2$.

127 Dérangement

Soit d la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1. Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1} \end{cases}$$

Montrer que les deux suites u et d sont égales.

2. A l'aide de la question précédente, montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \quad d_n = (n-1)\big(d_{n-1} + d_{n-2}\big)$$

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $f_n = n!$.
Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \quad f_n = (n-1)\big(f_{n-1} + f_{n-2}\big)$$

4. Les suites d et f sont-elles égales ?

128 Équation de Pell-Fermat

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ admet une infinité de solutions.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un couple $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2} y_n$.
2. Montrer l'unicité d'un tel couple.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
4. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.
5. Conclure.

129 Récurrence forte !

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes **strictement positifs** vérifiant :

$$(\star) \qquad \forall\, p \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{p} u_i^3 \;=\; \Big(\sum_{i=1}^{p} u_i\Big)^2$$

Montrer par récurrence forte $\;\forall\, n \geqslant 1,\; u_n = n$.

Exprimer u_{n+1}^3 en fonction de $\sum_{i=1}^{n} u_i^3$.

130 Somme trigonométrique sans annulation

Soit $n \geqslant 1$ et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}}{2^k} \neq 0$.

Raisonner par l'absurde et utiliser l'inégalité triangulaire.

131 Nombres de Fibonacci et triangle de Pascal

On définit la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \;=\; F_{n+1}$$

Illustrer cette égalité sur le triangle de Pascal.

Calculs
corrigés

103

Calculons $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

On a

$$\begin{aligned} S_n &= 2\sum_{k=1}^{n} k \ - \ \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Autre preuve. On peut aussi utiliser *directement* la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique (penser à $u_k = ak+b$ qui est bien le terme d'une suite arithmétique de raison a) :

$$\sum_{k=p}^{q} (ak+b) \ = \ (q-p+1)\frac{(ap+b)+(aq+b)}{2}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) \ = \ n \times \frac{1 \ + \ (2n-1)}{2} \ = \ n^2.$$

104

En écrivant $k = (k+1) - 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kk! \;=\; \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)k! - k!\big) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)! - k!\big) \;=\; (n+1)! - 0! \;=\; (n+1)! - 1$$

Distinguons deux cas.

Cas n pair, $n = 2p$.

On a

$$A_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k \;=\; \sum_{\ell=1}^{p} \Big(-(2\ell-1) + 2\ell\Big) \;=\; p$$

Cas n impair, $n = 2p+1$.

Par sommation par paquets et en utilisant le cas précédent, on a

$$\begin{aligned} A_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k k \;&=\; \left(\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k\right) \;+\; (-1)^{2p+1}(2p+1) \\ &=\; p - (2p+1) \\ &=\; -(p+1) \end{aligned}$$

Bilan :

$$A_n \;=\; \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Bonus. Il y a une formule close, sans disjonction de cas :

$$A_n \;=\; (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

En effet,

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \;=\; \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \overset{\text{WHY}}{=} \frac{n}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Autre bonus. Il y a une autre formule close, sans disjonction de cas, et sans partie entière. Deux formules très pratiques :

$$(-1)^n \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad\qquad \frac{1-(-1)^n}{2} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme

$$A_n \;=\; \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} A_n \;&=\; (-1)^n \frac{n}{2} \;-\; \frac{1-(-1)^n}{2}\frac{1}{2} \\ &=\; \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} \end{aligned}$$

109

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En multipliant par $(-1)^k$ et avec un jeu d'écriture, on a :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \qquad (-1)^k v_k \;=\; (-1)^k u_k \;-\; (-1)^{k+1} u_{k+1}$$

Par somme télescopique entre 0 et n :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k \;=\; (-1)^0 u_0 \;-\; (-1)^{n+1} u_{n+1}$$

Comme $u_0 = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k \;=\; (-1)^n u_{n+1}$$

— On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \mod 4\ ; \\ i & \text{si } n \equiv 1 \mod 4\ ; \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \mod 4\ ; \\ -i & \text{si } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$.
La première question entraîne facilement $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = S_{n+4}$, et il reste simplement à calculer les premiers termes de la suite.
En utilisant la première question, on peut facilement calculer les premières valeurs de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	$1+i$	i	0	1	$1+i$	i	0	1	$1+i$	i

Bilan :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \mod 4\ ; \\ 1+i & \text{si } n \equiv 1 \mod 4\ ; \\ i & \text{si } n \equiv 2 \mod 4\ ; \\ 0 & \text{si } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On obtient

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^n = i^{1+2+3+\cdots+n} = i^{T_n}.$$

On a $T_{n+8} = T_n + (n+1) + \cdots + (n+8) = T_n + 8n + 28 \equiv T_n \mod 4$.
On en déduit que i^{T_n} ne dépend que du résidu de T_n modulo 8.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
i^{T_n}	1	i	$-i$	-1	-1	$-i$	i	1	1	i	$-i$

Bilan :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0, 7 \mod 8\ ; \\ i & \text{si } n \equiv 1, 6 \mod 8\ ; \\ -1 & \text{si } n \equiv 3, 4 \mod 8\ ; \\ -i & \text{si } n \equiv 2, 5 \mod 8. \end{cases}$$

111

On peut faire une récurrence sur n.
Pour l'hérédité, utiliser Pascal, puis la formule d'absorption, puis la somme alternée des coefficients binomiaux.

Minoration du coefficient binomial central : preuve par récurrence

Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$\mathcal{P}_n : \qquad « \ \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \ »$$

▷ **Initialisation.** Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
D'un côté, $\dfrac{4^1}{2\sqrt{1}} = 2$
De l'autre $\dbinom{2 \times 1}{1} = 2$
Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

▷ **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, càd $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, càd $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dbinom{2n+2}{n+1}$.

Avant de commencer un quelconque raisonnement, remarquons que l'on a

$$(\heartsuit) \qquad \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Partons de $\mathcal{P}_n$. On a :

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}$$

On essaie de faire apparaître le coefficient binomial central $\dbinom{2n+2}{n+1}$, à l'aide de $(\heartsuit)$.
Pour cela, on multiplie par $\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$. On a donc :

$$\frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n+2}{n+1}$$

Pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, il suffit de montrer que :

$$\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire à :

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leqslant 2n+1$$

▷ **Bilan.** D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{P}_n \text{ est vraie}$$

▷ **Hérédité, deuxième rédaction**
Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, càd $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, càd $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dbinom{2n+2}{n+1}$.

Avant de commencer un quelconque raisonnement, remarquons que l'on a

$$(\heartsuit) \qquad \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Partons de $\mathcal{P}_n$. On a :

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}$$

On essaie de faire apparaître le membre gauche de l'inégalité de $\mathcal{P}_{n+1}$, à savoir $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$
Pour cela, on multiplie par $\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$. On a donc :

$$\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\binom{2n}{n}$$

Pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, il suffit de montrer que :

$$\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\binom{2n}{n} \leqslant \binom{2n+2}{n+1}$$

ce qui est équivalent, à l'aide de $(\heartsuit)$, à

$$\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

c'est-à-dire à :

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leqslant 2n+1$$

▷ **Hérédité, troisième rédaction**
Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, càd $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, càd $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dbinom{2n+2}{n+1}$.

Avant de commencer un quelconque raisonnement, remarquons que l'on a

$$(\heartsuit) \qquad \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Reformulons $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n+1} \quad & \overset{\heartsuit}{\iff} \quad \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} \\ & \overset{\text{calcul}}{\iff} \quad \frac{4^n\sqrt{n+1}}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Démarrons notre raisonnement en partant de $\mathcal{P}_n$ qui dit $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
A l'aide des équivalences ci-dessus, pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, on voit qu'il suffit de montrer que

$$\frac{4^n\sqrt{n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire à

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leqslant 2n+1$$

ce qui est vrai (de manière générale, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a $2\sqrt{xy} \leqslant x+y$).

114

En factorisant par l'angle moitié, on obtient que la somme vaut $2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

La somme est alors calculable (comment ?).
Finalement, on trouve que

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|\omega-1| \;=\; 2\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

où $\mathrm{cotan}\,x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ pour $x\not\equiv 0\ [\pi]$.

1. Les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité sont les complexes $\xi_k = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   On a donc

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n}}\right)^k = \begin{cases} \dfrac{1-(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n}}} & \text{si } \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n}} \neq 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1^k & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \not\equiv 0\ [n] \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On note $S' = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k, \ell \leqslant n-1 \\ k \neq \ell}} \xi_k \xi_\ell$.

   On a (WHY ?)

$$S_1^2 = S_2 + S'$$

   Comme $n \geqslant 3$, les entiers $p \in \{1, 2\}$ sont tels que $p \not\equiv 0\ [n]$.
   Donc $S_1 = S_2 = 0$ d'après la question précédente.
   D'où $S' = 0$.

116

On a :

$$\begin{array}{rcll}
\Gamma & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+ky) & \\
 & = & \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\right) & \\
 & = & \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right)^{k} 1^{n-k}\right) & \\
 & = & \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})^{n}\right) & \text{Newton} \\
 & = & \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{y}{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{y}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{y}{2}})^{n}\right) & \text{angle moitié} \\
 & = & \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+n\frac{y}{2})}\left(2\cos(\frac{y}{2})\right)^{n}\right) & \text{Euler} \\
 & = & 2^{n}\cos(x+n\frac{y}{2})\cos^{n}(\frac{y}{2}). &
\end{array}$$

117

On a :

$$S + \mathrm{i}T = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{(\cos x)^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cos x}\right)^k.$$

On a l'équivalence

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cos x} = 1 \iff \cos x + \mathrm{i}\sin x = \cos x \iff \sin x = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi]$$

— Si $x \equiv 0\ [\pi]$, alors $S + \mathrm{i}T = n+1$, donc $S = n+1$ et $T = 0$.

— Sinon :

$$\begin{aligned} S + \mathrm{i}T &= \frac{1 - \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{\cos^n x} \times \frac{\cos^{n+1} x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}}{\cos x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \\ &= \frac{1}{\cos^n x} \times \frac{\cos^{n+1} x - \cos((n+1)x) - \mathrm{i}\sin((n+1)x)}{-\mathrm{i}\sin x} \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} + \mathrm{i}\,\frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x}. \end{aligned}$$

D'où

$$S = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} \quad \text{et} \quad T = \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x}$$

BILAN :

$$S = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [\pi] \\ \dfrac{\sin((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad T = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0\ [\pi] \\ \dfrac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On a :

$$\begin{aligned}
z &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^k \;+\; \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \\
&\overset{\text{rmq}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \mathrm{i}^{2k} \;+\; \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \mathrm{i}^{2k+1} \\
&= \sum_{\substack{p \in [\![0,\, 2n+1]\!] \\ p \text{ pair}}} \binom{2n+1}{p} \mathrm{i}^p \;+\; \sum_{\substack{q \in [\![0,\, 2n+1]\!] \\ q \text{ impair}}} \binom{2n+1}{q} \mathrm{i}^q \\
&= \sum_{\substack{r \in [\![0,\, 2n+1]\!] \\ r \text{ pair ou } r \text{ impair}}} \binom{2n+1}{r} \mathrm{i}^r \\
&= \sum_{r=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{r} \mathrm{i}^r \\
&\overset{\text{Newton}}{=} (1+\mathrm{i})^{2n+1}
\end{aligned}$$

2. On a $R_n^2 + I_n^2 = |z|^2 = \left|(1+\mathrm{i})^{2n+1}\right|^2 = \left(|1+\mathrm{i}|^2\right)^{2n+1} = 2^{2n+1}$.

119

1. $T_1 = 0$ (la somme porte sur l'ensemble vide)
   $T_2 = 1 \times 2 = 2$
   $T_3 = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 = 11$
2. $T_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\Big(\sum_{i=1}^{j-1} i\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{j(j-1)}{2} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3 - j^2) \;=\; \dots \;=\; \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i(n-j)}$$

On a $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i(n-j)$

Exprimons cette somme double comme deux sommes simples en commençant par la variable j

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i(n-j)$$

WHY.

$$= \sum_{j=1}^{n} (n-j) \sum_{i=1}^{j} i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (n-j) \frac{j(j+1)}{2}.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(n-j)(j^2+j)}_{-j^3 + (n-1)j^2 + nj}$$

$$= \frac{1}{2} \left(- \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n-1) \sum_{j=1}^{n} j^2 + n \sum_{j=1}^{n} j \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(- \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n-1)\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\,\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$=$ factorisation et mise au m̄ déno
par $n(n+1)$ (à savoir 12)

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{-3n(n+1) + 2(n-1)(2n+1) + 6n}{12}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{24}\left(n^2 + n - 2\right)$$

WHY

$$= \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{24}$$

121

• La première somme

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}\\
&= \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

• La troisième somme
Par sommation par paquets, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |i-j| &= \sum_{i<j}|i-j| + \sum_{i=j}|i-j| + \sum_{j<i}|i-j|\\
&= 2\sum_{i<j}|i-j|\\
&= 2\sum_{i<j}(j-i)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n-i}k\right) && [k=j-i]\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(i^2-(2n+1)i+n(n+1)\big)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)n\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)}$$

On a toujours :

$$\sum_{i,j} \cdots = \sum_{i<j} \cdots + \sum_{i=j} \cdots + \sum_{i>j} \cdots$$

De plus, qd $i<j$, $\min(i,j) = i$

qd $i=j$, $\min(i,j) = i = j$

qd $i>j$, $\min(i,j) = j$

Ainsi :

$$\sum_{i,j} \min(i,j) = \underbrace{\sum_{i<j} i} + \sum_{i=j} i + \underbrace{\sum_{i>j} j}$$

- Ces deux sommes sont égales à $\sum_{k<l} k$ (WHY?)

- la somme $\sum_{i=j} i$ est une somme <u>simple</u> et vaut $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

On a donc le résultat partiel :

$$\sum_{i,j} \min(i,j) = 2\sum_{k<l} k + \frac{n(n+1)}{2}$$

Calculons à présent $\sum_{k<l} k$.

Cette somme double vaut $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} k$

ou encore $\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{l-1} k$. Quelle expression "choisir" ? (il y en a peut-être une meilleure que l'autre !)

Ici, on peut se dire que la 1ère expression est mieux mais je vous invite à regarder la 2ème aussi !

$$\sum_{k<l} k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \underbrace{k}_{\text{indépendant de } l}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{l=k+1}^{n} 1 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k \left[n - (k+1) + 1 \right]}_{-k^2 + nk}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + n \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\sum_{k<\ell} k = - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \left(- (2n+1) + 3n \right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

Reprenons :

$$\sum_{i,j} \min(i,j) = 2 \frac{n(n+1)(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \left[2(n-1) + 3 \right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rmq Il est absolument dingue que l'on retrouve la somme des carrés. On vient de montrer, sans le savoir, que $\sum_{i,j} \min(i,j) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

1. On pose $A_{-1}=0$ de sorte que pour tout $n\in\mathbb{N}$ (y compris $n=0$), on a $a_n=A_n-A_{n-1}$.
   On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=0}^{n} \left(A_k - A_{k-1}\right) B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{j=-1}^{n-1} A_j B_{j+1} && [j=k-1] \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} A_j B_{j+1} && \text{terme pour } j=-1 \text{ est nul} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(B_k - B_{k+1}\right) && \text{paquets dans la 1}^{\text{ère}} \text{ somme puis linéarité} \\
&= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k && \text{définition de } b_k
\end{aligned}$$

   Résumons : pour faire ce calcul, il faut essayer de ne pas faire apparaître de somme double, autrement dit il faut transformer a_k en $A_k - A_{k-1}$.

2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $a_k=2^k$ et $B_k=k$.

   Alors $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$ et $b_n=B_{n+1}-B_n=(n+1)-n=1$.

   D'après la question 1, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \left(2^{n+1}-1\right) n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{k+1}-1\right) \\
&= \left(2^{n+1}-1\right) n - 2\left(2^n-1\right) + n \\
&= 2^{n+1}(n-1)+2
\end{aligned}$$

129

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{« } u_n = n \text{ »}$$

Montrons, par récurrence forte, que $\quad \forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}_n$.

Initialisation. Je vous laisse montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Il y a un petit argument à donner. Lequel ?

Hérédité.
Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ sont vraies.
Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} u_i^3 & = & \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i\right)^2 & \text{hypothèse } (\star) \text{ avec } p = n+1 \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3 \ + \ u_{n+1}^3 & = & \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \ + \ u_{n+1}\right)^2 & \text{paquets (à gauche et à droite)} \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3 \ + \ u_{n+1}^3 & = & \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2 \ + \ 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)u_{n+1} \ + \ u_{n+1}^2 & \text{identité remarquable} \\
u_{n+1}^3 & = & \displaystyle 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)u_{n+1} \ + \ u_{n+1}^2 & \text{simplification grâce à } (\star) \text{ avec } p = n \\
u_{n+1}^2 & = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} u_i \ + \ u_{n+1} & \text{car } u_{n+1} \neq 0 \\
u_{n+1}^2 & = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} i \ + \ u_{n+1} & \text{d'après } \mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2,\ \dots,\ \mathcal{P}_n. \\
u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) & = & 0 & \text{calculs}
\end{array}$$

On obtient que u_{n+1} est solution de l'équation $x^2 - x - n(n+1) = 0$, équation qui a pour solutions $n+1$ et $-n$.
Donc

$$u_{n+1} = n+1 \qquad \text{ou} \qquad u_{n+1} = -n$$

Or u est à termes strictement positifs, donc $u_{n+1} = n+1$.
Et on a démontré $\mathcal{P}_{n+1}$.

Supposons par l'absurde que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} = 0$.

On peut écrire l'égalité sous la forme $\frac{e^{i\theta_1}}{2} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} = 0$, donc

$$-\frac{e^{i\theta_1}}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k}. \tag{$\star$}$$

Or,

— d'un côté, $\left|-\frac{e^{i\theta_1}}{2}\right| = \frac{1}{2}$;

— de l'autre,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k}\right| &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \left|\frac{e^{i\theta_k}}{2^k}\right| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&\leqslant \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ainsi, on obtient une contradiction en appliquant le module de part et d'autre de l'égalité ($\star$), ce qui conclut la preuve.