



Applications

exercices

Retour sur les ensembles

101 Intersection et union indexées par \mathbb{R}_+^*

Montrer que

$$\bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*}]-h, h[= \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*}]-h, h[= \mathbb{R}.$$

102 \mathcal{P} calligraphique

Soit E et F deux ensembles.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E \cup F) \supset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.
3. Donner un exemple où $\mathcal{P}(E \cup F) \neq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.
4. Montrer $(F \subset E \text{ ou } E \subset F) \iff \mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

103 Partition

Soit $f : E \rightarrow I$ une application surjective.

Pour tout $i \in I$, on pose $A_i = f^{(-1)}(\{i\})$.

Montrer que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E .

Des applications « concrètes »

104

Quiz

Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

$$\begin{array}{lll}
 f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & f_3: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\
 x \mapsto \exp(x) & z \mapsto \exp(z) & (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \\
 \\
 f_4: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 & f_5: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y) \mapsto (x + y, xy) & (x, y) \mapsto (x + y, xy)
 \end{array}$$

105

Une application bijective sur $(\mathbb{R}^*)^2$

Soit $f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$
 $(x, y) \mapsto (xy, xy^2)$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

106

Proposez un candidat!

Considérons $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

En une phrase, dire pourquoi f est bien définie.
 Déterminer une application $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.
 Que peut-on en déduire?

107

C'est l'identité que dans un sens!

Considérons

$$\begin{array}{ll}
 \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\
 n \mapsto n + 1 & n \mapsto \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{array}$$

- Déterminer les applications $\tau \circ \sigma$ et $\sigma \circ \tau$.
- L'application σ est-elle bijective? Et l'application τ ?

108

Homographie du disque unité

On pose :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Soit $a \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$. Considérons $f_a: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$

$$z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

- Montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

- En déduire que f_a est bien définie.
- Montrer que f_a est une application bijective et déterminer f_a^{-1} .
- Existe-t-il $b \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$ tel que $f_a^{-1} = f_b$?
- Déterminer l'image réciproque de \mathbb{U} par f_a , notée $f_a^{(-1)}(\mathbb{U})$.

109

Stricte monotonie et injectivité

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Montrer que f est injective.

110

Plus difficile

Pour une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note \hat{f} la fonction définie par $\hat{f}: x \mapsto f(-x)$.
 Montrer que l'application $\Phi: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est involutive.

$$f \mapsto \hat{\hat{f}}$$

Des applications « abstraites »

111 Une inclusion toujours vraie

Soit A une partie de E et $f \in F^E$.

1. Montrer l'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(\overline{A})$.
2. Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.

112 Avec le complémentaire

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$.

1. Montrer f injective $\implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. Montrer f surjective $\implies \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

113 Avec l'image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

1. Montrer que $(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{(-1)}(f(A)) = A) \iff f$ injective
2. Dans le même esprit, caractériser la surjectivité de f .

114 Injectivité et intersection

Soit $f \in F^E$. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

115 Composées

Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

116 f composée 3 fois

Soit $f \in E^E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Autres

117 Analyse-Synthèse

Trouver toutes les applications injectives f de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telles que

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$$

118 \mathbb{N}^2 est en bijection avec \mathbb{N}

$$\text{Soit } f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (p, q) \longmapsto 2^p(2q + 1)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q + 1)$.
On pourra procéder par récurrence forte sur n .
Conséquence pour f ?
2. Construire, à l'aide de f , une application bijective $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.
3. On dispose donc maintenant d'une bijection g de \mathbb{N}^2 vers \mathbb{N} .
On définit alors l'application $h : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$h : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N} \\ (a, b, c) \longmapsto h(a, b, c) = g(g(a, b), c)$$

- (a) Montrer que h est bijective.
 - (b) Déterminer $h^{-1}(2023)$.
4. Construire une application bijective $\varphi : \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}$.

119 Une application $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans \mathbb{Q}

$$\text{Soit } f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) \longmapsto p + \frac{1}{q}$$

L'application f est-elle injective, surjective ?

120 $[0, 1]$ est en bijection avec $[0, 1[$

1. Déterminer une bijection de $E_1 = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$ dans $E_2 = \{\frac{1}{n}, n \geq 2\}$.
2. Dédurre de la question précédente une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1[$.

On pourra noter A le complémentaire de $E_1 = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$ dans $[0, 1]$.

121 Produit cartésien d'applications

Soit E, F, G trois ensembles quelconques et $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications.

$$\text{On considère l'application } h : E \longrightarrow F \times G \\ t \longmapsto (f(t), g(t))$$

1. Prenons un exemple avec $E = \mathbb{R}$, $F = G = \mathbb{R}^+$, $f : t \mapsto t^2$ et $g : t \mapsto (t + 1)^2$.

$$\text{Ainsi } h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ t \longmapsto (t^2, (t + 1)^2)$$

- (a) Calculer $h(2)$.
- (b) Déterminer les antécédents de $(\frac{1}{4}, 1)$ par h .
- (c) L'application h est-elle surjective ?
- (d) L'application h est-elle injective ?

On revient au cas général.

2. (a) Montrer que si f **ou** g est injective, alors h est injective.
(b) La réciproque est-elle vraie ?
3. (a) Montrer que si h est surjective, alors f **et** g sont surjectives.
(b) La réciproque est-elle vraie ?

Avec $\mathcal{P}(E)$

122 Dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble non vide contenant un certain x_0 .

Considérons l'application $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$

$$A \mapsto \begin{cases} A & \text{si } x_0 \in A \\ \overline{A} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. L'application f est-elle surjective? Quelle est l'image de f ?
2. L'application f est-elle injective?
3. Exprimer $f \circ f$ en fonction de f .

123 Trace sur A

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $f_A : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

$$X \mapsto X \cap A$$

Montrer que l'application f_A est injective si et seulement si $A = E$.

Montrer que l'application f_A est surjective si et seulement si $A = E$.

124 Théorème de Cantor

1. Construire une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$.
Pour cela, raisonner par l'absurde en considérant une bijection $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

125 Traces sur les parties de E

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$$X \mapsto (X \cap A, X \cap B).$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1} .

126 Point fixe

Soit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion.

Montrer que f admet un point fixe.

Indication : considérer $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset f(A)\}$ et montrer que \mathcal{W} est stable par f et par réunion.

127 Applications images

Soit $f : E \rightarrow F$. On considère les applications

$$\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \quad \text{et} \quad \Psi : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$X \mapsto f(X) \qquad \qquad Y \mapsto f^{(-1)}(Y)$$

1. Montrer les équivalences f injective $\iff \Phi$ injective $\iff \Psi$ surjective.
2. Montrer les équivalences f surjective $\iff \Phi$ surjective $\iff \Psi$ injective.

128

Une homographie

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1+iz}{1-iz} \end{aligned}$$

- Déterminer l'ensemble des points fixes de f , c'est-à-dire l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = z$. On donnera ces complexes sous forme algébrique.
- La fonction f est-elle injective ?
 - Déterminer l'image de f .
 - La fonction f est-elle surjective ?
- Montrer $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.
 - Déterminer l'image réciproque de \mathbb{R} par f , notée $f^{-1}(\mathbb{R})$.
 - Déterminer $f^{-1}(\mathbb{D})$ où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

129

Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$.

$$z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

1. Montrer que $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.
2. Montrer que $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.
4. Déterminer $f^{(-1)}(\mathbb{R})$.

130

Soit E un ensemble non vide et $a \in E$.

Soit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$

$$X \mapsto \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. On suppose que E est un ensemble fini de cardinal n .
 On note $\mathcal{P}_p(E)$ (resp. $\mathcal{P}_i(E)$) l'ensemble des parties de E de cardinal pair (resp. impair).
 Montrer que $\text{card } \mathcal{P}_p(E) = \text{card } \mathcal{P}_i(E)$.

131

Soit E, F, G, H quatre ensembles et $s : E \rightarrow F$, $f : E \rightarrow H$, $i : G \rightarrow H$ et $g : F \rightarrow H$ telles que $i \circ f = g \circ s$ avec i injective et s surjective.

Montrer qu'il existe une unique application $h : F \rightarrow G$ telle que $f = h \circ s$ et $g = i \circ h$.

132

Olympiades 1977

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(f(n)) < f(n+1)$.

On souhaite montrer que $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq n, f(x) \geq n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $f(a) = \min \{f(x), x \in \llbracket n, +\infty \rrbracket\}$. Puis montrer que $a = n$.
3. En déduire que f est strictement croissante et conclure.

133

Énoncé difficile, solution facile!

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

On définit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ via $\varphi : n \mapsto f_n(n) + 1$.

Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi = f_p$.

Applications

corrigés

Montrons $\bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*}]-h, h[= \{0\}$.

Il s'agit d'une égalité entre deux ensembles.

On peut procéder par double inclusion (cela fonctionne très bien).

On peut également reformuler l'égalité avec une équivalence. Pour $x \in \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que

$$x \in \bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*}]-h, h[\iff x = 0$$

Pour montrer cette équivalence on montre les deux implications :

$$x = 0 \implies \forall h \in \mathbb{R}_+^*, x \in]-h, h[\quad \text{et} \quad x \neq 0 \implies \exists h \in \mathbb{R}_+^*, x \notin]-h, h[$$

Essayer de comprendre comment se traduisent ces deux implications sur l'égalité d'ensemble.

— Évidemment, on a $\forall h \in \mathbb{R}_+^*, 0 \in]-h, h[$.

— Soit $x \neq 0$. En posant $h = \frac{|x|}{2}$ qui est bien > 0 (car $x \neq 0$), on a $x \notin]-h, h[$.

Montrons $\bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*}]-h, h[= \mathbb{R}$.

□ Il est évident que $\bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*}]-h, h[= \mathbb{R}$.

□ Soit $x \in \mathbb{R}$, alors en posant $h_0 = |x| + 1$, on a $x \in]-h_0, h_0[$, donc a fortiori, $x \in \bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*}]-h, h[$.

1. Soit A un ensemble. On a les équivalences :

$$A \in \mathcal{P}(E \cap F) \iff A \subset E \cap F \iff A \subset E \text{ et } A \subset F \iff A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F).$$

2. Soit $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. Montrons que $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$ par disjonction de cas :

— si $A \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \subset E$, donc $A \subset E \cup F$;

— si $A \in \mathcal{P}(F)$, alors $A \subset F$, donc $A \subset E \cup F$.

3. Si l'on prend $E = \mathbb{R}_-$ et $F = \mathbb{R}_+$, alors :

$$[-1, 1] \in \mathcal{P}(E \cup F) \quad \text{mais} \quad [-1, 1] \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F).$$

4. — Supposons $F \subset E$ ou $E \subset F$.

Cas $F \subset E$. On a d'une part $E = E \cup F$, donc $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cup F)$. D'autre part, $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E)$ donc $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cup F)$.

Cas $E \subset F$. Alors $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

— Pour montrer l'autre implication, raisonnons par contraposition. Supposons $F \not\subset E$ et $E \not\subset F$. Il existe alors $e \in E \setminus F$ et $f \in F \setminus E$, et en posant $A = \{e, f\}$, on a :

$$A \in \mathcal{P}(E \cup F) \text{ et } A \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F),$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(E \cup F) \neq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

Attention à ne **pas** dire que $f(A_i) = \{i\}$.

En revanche, on peut reformuler A_i . On a $A_i = \{x \in E \mid f(x) = i\}$.

Il y a trois choses à montrer

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les } A_i \text{ recouvrent } E, \text{ c'est-à-dire } E = \bigcup_{i \in I} A_i \\ \text{les } A_i \text{ sont 2 à 2 disjoints, c'est-à-dire } \forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \\ \text{les } A_i \text{ sont non vides, c'est-à-dire } \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \end{array} \right.$$

— Montrons l'inclusion $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, l'autre inclusion est automatique.

Soit $x \in E$.

Montrons que $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, c'est-à-dire montrons $\exists i \in I, x \in A_i$.

Posons $i = f(x)$.

Alors i est bien dans I (car f est à valeurs dans I).

De plus, par définition de A_i , on a bien $x \in A_i$.

— Montrons $\forall i, j \in I, A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies i = j$

Soit $i, j \in I$.

Supposons $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

On peut donc trouver $x \in A_i \cap A_j$.

Par définition de A_k , on a donc $f(x) = i$ et $f(x) = j$.

D'où $i = j$.

— Soit $i \in I$. Montrons que A_i est non vide.

Comme f est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = i$.

Ainsi, $x \in A_i$.

- Pour f_1
 - f_1 est injective, car strictement monotone.
 - f_1 n'est pas surjective, car -3 n'a pas d'antécédent.
- Pour f_2
 - f_2 n'est pas injective. On a $\exp(0) = \exp(2i\pi)$ et $0 \neq 2i\pi$.
 - f_2 n'est pas surjective, car 0 n'a pas d'antécédent.
- L'application f_3 est bijective (déjà fait en classe) et son application réciproque est

$$f_3^{-1} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (s, d) \longmapsto \left(\frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2} \right)$$

- Pour f_4
 - f_4 n'est pas injective. On a $f_4(1, 0) = f_4(0, 1)$ et $(1, 0) \neq (0, 1)$.
 - f_4 est surjective d'après le cours, car le système « somme-produit » admet toujours des solutions dans \mathbb{C} .
- Pour f_5
 - f_5 n'est pas injective. On a $f_5(1, 0) = f_5(0, 1)$ et $(1, 0) \neq (0, 1)$.
 - f_5 n'est pas surjective. Le couple $(-1, 1)$ n'est pas atteint, car l'équation $z^2 - (-1)z + 1$ n'a pas de solution réelle.

• L'application f est bien définie, car lorsque n est pair, le nombre réel $\frac{n}{2}$ est bien un entier, et lorsque n est impair, le réel $-\frac{n+1}{2}$ est également un entier.

• En fait, il n'y a qu'une seule application g ! On le saura à la fin de l'exercice, ou bien au début en ayant conjecturé que l'application f est bijective.

Considérons $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$m \mapsto \begin{cases} 2m & \text{si } m \text{ est positif} \\ -2m - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = \text{id}_{\mathbb{N}}(n)$. Je vous laisse faire le calcul.

Pour l'instant, on ne peut "rien" en déduire, si ce n'est que f est injective (et g surjective).

Mais en fait, on peut montrer que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{Z}}$.

Ainsi, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Supposons f strictement monotone. On va distinguer deux cas.

- Supposons f strictement croissante. Montrons que f est injective par contraposée, c'est-à-dire montrons

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

Soit $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x'$. Distinguons deux cas.

1. Si $x < x'$, la stricte croissance de f entraîne $f(x) < f(x')$.
2. Si $x > x'$, la stricte croissance de f entraîne $f(x) > f(x')$.

Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(x')$.

Cela démontre l'injectivité de f .

- On peut démontrer exactement de la même façon que si f est strictement décroissante, alors f est injective. Ramenons-nous plutôt astucieusement au cas que nous venons de traiter.

Si f est strictement décroissante, alors $-f$ est strictement croissante.

D'après le cas déjà traité, $-f$ est alors injective.

On a alors $f = (-\text{id}_{\mathbb{R}}) \circ (-f)$.

Ainsi, f apparaît comme la composée de deux fonctions injectives. Donc f est injective.

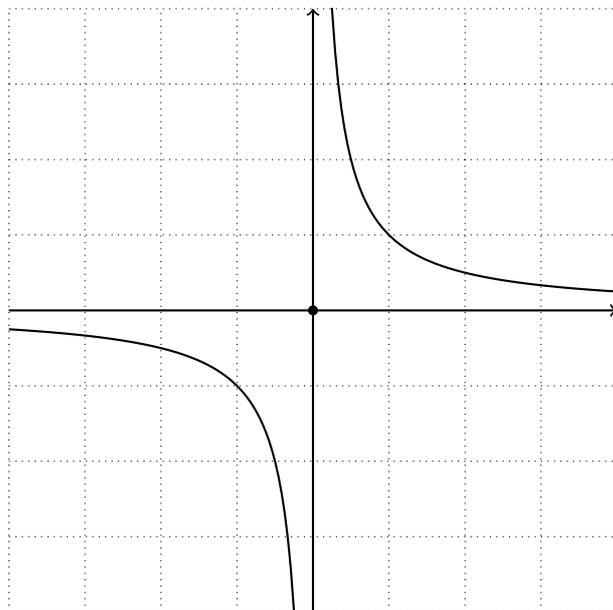
La réciproque de la question précédente est fausse : il existe des fonctions injectives non strictement monotones.

C'est par exemple le cas de la fonction

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est injective (elle est même bijective, ce que l'on peut montrer facilement en vérifiant que $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$), mais elle n'est pas strictement monotone :

- on a $3 > 1$, et pourtant $f(3) \leq f(1)$, donc elle n'est pas strictement croissante.
- on a $1 > -1$, et pourtant $f(1) \geq f(-1)$, donc elle n'est pas strictement décroissante.



Montrons que $\Phi \circ \Phi = \text{id}$.

Montrons donc que $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad \Phi \circ \Phi(f) = \text{id}(f)$.

C'est une égalité de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Prouvons-la en prenant $x \in \mathbb{R}$ et en montrant que $(\Phi \circ \Phi(f))(x) = \text{id}(f)(x)$.

On a

$$(\Phi \circ \Phi(f))(x) = \Phi(\Phi(f))(x) = \Phi(\widehat{f})(x) = \widehat{f}(-x) = f(-(-x)) = f(x)$$

Autre solution. On exploite le fait que $\widehat{f} = f \circ (-\text{id})$.

On a

$$\Phi \circ \Phi(f) = \Phi(\Phi(f)) = \Phi(\widehat{f}) = \widehat{f} \circ (-\text{id}) = (f \circ (-\text{id})) \circ (-\text{id}) = f$$

1. Soit $y \in f(E) \setminus f(A)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $y \notin f(A)$, on a $x \notin A$ (raisonner par l'absurde : si x était dans A , alors...).
On en déduit que $x \in \overline{A}$ puis $y \in f(\overline{A})$.
2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $A = \mathbb{R}^+$.
On a alors $f(A) = f(\mathbb{R})$ (car les deux parties sont égales à \mathbb{R}^+), donc $f(\mathbb{R}) \setminus f(A) = \emptyset$.
Pourtant, on a $\overline{A} = \mathbb{R}^{-*}$, donc $f(\overline{A}) = \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$.

Rappel :

Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, on a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

1. $\boxed{\implies}$ Supposons $\spadesuit \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$

Montrons que f est injective.

Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) \stackrel{*}{=} f(x')$.

On cherche à montrer que $x = x'$, ou encore que $\{x\} = \{x'\}$.

L'hypothèse $f(x) = f(x')$ se réécrit :

$$\{f(x)\} = \{f(x')\}$$

Ou encore :

$$f(\{x\}) = f(\{x'\})$$

D'où l'égalité des images réciproques suivantes :

$$f^{(-1)}(f(\{x\})) = f^{(-1)}(f(\{x'\}))$$

On applique l'hypothèse \spadesuit , à gauche avec $A = \{x\} \in \mathcal{P}(E)$ et à droite avec $A = \{x'\} \in \mathcal{P}(E)$, et on obtient

$$\{x\} = \{x'\}$$

D'où $x = x'$.

$\boxed{\impliedby}$ Supposons f injective.

Montrons que $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On cherche à montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$ l'autre inclusion est tjs vraie.

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Montrons que $x \in A$

Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in f(A)$.

Donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$.

Par injectivité de f , on obtient $x = a \in A$.

Donc $x \in A$.

2. $\boxed{\implies}$ Supposons $\heartsuit (\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B)$.

Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$.

On pose $B = \{y\} \in \mathcal{P}(F)$. Appliquons \heartsuit à cette partie B .

On a alors $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

En particulier, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ en effet, si cette partie était vide, son image directe par f le serait aussi, or elle vaut $\{y\}$.

Puisque $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$.

Ce x est un élément de E qui vérifie $f(x) \in \{y\}$ càd $f(x) = y$.

$\boxed{\impliedby}$ Supposons f surjective.

Montrons que $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.

On cherche à montrer que $B \subset f(f^{-1}(B))$ l'autre inclusion est tjs vraie.

Soit $y \in B$. Montrons que $y \in f(f^{-1}(B))$

Comme f est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Donc $f(x) \in B$.

Donc $x \in f^{-1}(B)$.

Comme y s'écrit $f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$, on a $y \in f(f^{-1}(B))$.

- Supposons f injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est vraie en toute généralité.
Je vous laisse la remonter.
 - Montrons l'autre inclusion. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Montrons que $y \in f(A \cap B)$.
 - Comme $y \in f(A)$, on peut trouver $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
 - Comme $y \in f(B)$, on peut trouver $b \in B$ tel que $y = f(b)$.
 On a donc $f(a) = f(b)$.
L'injectivité de f entraîne alors $a = b$.
Ainsi, l'élément $a = b$ appartient à $A \cap B$.
D'où $y \in f(A \cap B)$.
- Montrons l'implication réciproque. Supposons donc :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

et montrons que f est injective.

Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.

Posons $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. D'après l'hypothèse, on a :

$$f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$$

ce qui se réécrit

$$f(\{x\} \cap \{x'\}) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$$

Comme $f(x) = f(x')$ par hypothèse, l'ensemble de droite est *non vide*.

Donc à gauche, l'ensemble est non vide, donc $\{x\} \cap \{x'\}$ est *non vide*.

Donc $x = x'$.

D'où l'injectivité de f .

1. Première solution.

Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.

Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$.

Comme l'élément $g(y)$ appartient à G , la surjectivité de $g \circ f$ nous permet de trouver $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$. On a alors :

$$g(y) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Comme g est injective, on en déduit que $y = f(x)$.

Cela prouve que f est surjective.

Autre solution efficace.

D'après un exercice de cours qu'il faut savoir refaire, l'hypothèse $g \circ f$ surjective implique que g est surjective.

Comme ici, on suppose en plus g injective, on obtient que g est bijective.

Donc g^{-1} existe.

On peut donc écrire $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$.

De plus, $g \circ f$ surjective (hypothèse de l'énoncé) et g^{-1} est surjective (car bijective).

Par composée d'applications surjectives, on en déduit que f est surjective.

2. Solution efficace.

D'après un exercice de cours qu'il faut savoir refaire, l'hypothèse $g \circ f$ injective implique que f est injective.

Comme ici, on suppose en plus f surjective, on obtient que f est bijective.

Donc f^{-1} existe.

On peut donc écrire $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$.

De plus, $g \circ f$ injective (hypothèse de l'énoncé) et f^{-1} est injective (car bijective).

Par composée d'applications injectives, on en déduit que g est injective.

Autre solution.

Supposons $g \circ f$ injective et f surjective.

Montrons que g est injective.

Soit $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$.

Comme f est surjective, on peut trouver $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

Comme $g(y_1) = g(y_2)$, on a $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

Par injectivité de $g \circ f$, on a donc $x_1 = x_2$.

On en déduit $f(x_1) = f(x_2)$, c'est-à-dire $y_1 = y_2$.

On a donc prouvé que g est injective.

\Rightarrow Supposons f injective.

Montrons que f est surjective, c'est-à-dire $\forall y \in E, \exists x \in E, y = f(x)$.

Soit $y \in E$.

Par hypothèse de l'énoncé, on a $f \circ f \circ f = f$, d'où $(f \circ f \circ f)(y) = f(y)$.

On écrit cette dernière égalité sous la forme $f(f(f(y))) = f(y)$.

Par injectivité de f , on a $f(f(y)) = y$.

Posons $x = f(y)$.

★ On a $x \in E$

★ On a $f(x) = f(f(y)) = y$.

Donc f est surjective.

\Leftarrow Supposons f surjective.

Montrons que f est injective.

Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.

Par surjectivité de f , on peut trouver $t \in E$ tel que $x = f(t)$.

Par surjectivité de f , on peut trouver $t' \in E$ tel que $x' = f(t')$.

On a alors

$$f(f(t)) = f(f(t'))$$

Appliquons f , on a alors

$$f(f(f(t))) = f(f(f(t')))$$

ce que l'on réécrit sous la forme

$$(f \circ f \circ f)(t) = (f \circ f \circ f)(t')$$

Par hypothèse, on a $f \circ f \circ f = f$, d'où $f(t) = f(t')$.

D'où $x = x'$.

Autre solution

\Rightarrow Supposons f injective.

Montrons que f est surjective.

En fait, montrons que f est bijective.

En fait, de chez en fait, montrons que $f \circ f = \text{id}_E$.

Pour cela, montrons que $\forall x \in E, f \circ f(x) = \text{id}_E(x)$.

Soit $x \in E$.

On a $f(f(f(x))) = f(x)$ d'après l'hypothèse de l'énoncé.

Comme f est injective, on en déduit $f(f(x)) = x$.

C'est-à-dire $f \circ f(x) = \text{id}_E(x)$.

\Leftarrow Supposons f surjective.

Montrons que f est injective.

En fait, montrons que f est bijective.

En fait, de chez en fait, montrons que $f \circ f = \text{id}_E$.

Pour cela, montrons que $\forall x \in E, f \circ f(x) = \text{id}_E(x)$.

Soit $x \in E$ (ici, moralement, x est dans l'ensemble de départ, mais on va le voir dans un instant comme un élément de l'ensemble d'arrivée).

Comme f est surjective, on peut trouver $t \in E$ tel que $x = f(t)$ (ici, il FAUT voir le x comme un élément de l'ensemble d'arrivée).

On a alors :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f \circ f(f(t)) \\ &= (f \circ f \circ f)(t) \\ &= f(t) \\ &= x \end{aligned}$$

Analyse. Soit f une application injective vérifiant (\star) .

Montrons que $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Par récurrence forte, montrons que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_p : \ll f(p) = p \gg$$

Initialisation. \mathcal{H}_0 est vraie. En effet, on a $f(0) \in \mathbb{N}$ et $f(0) \leq 0$, d'où $f(0) = 0$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$ sont vraies. Montrons \mathcal{H}_{p+1} .

D'après $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$, on a :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \dots \quad f(p) = p$$

et d'après (\star) avec $n = p + 1$, on a $f(p + 1) \in \llbracket 0, p + 1 \rrbracket$.

Comme f est injective, l'image de $f(p + 1)$ est nécessairement égale à $p + 1$.

D'où \mathcal{H}_{p+1} .

Bilan de l'Analyse. Une application injective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} vérifiant (\star) appartient à $\{\text{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Synthèse. La fonction identité est injective et vérifie (\star) .

Bilan. L'ensemble des applications injectives de \mathbb{N} dans \mathbb{N} vérifiant (\star) est $\{\text{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Autre façon de présenter la solution.

On va montrer que $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ injective vérifiant } (\star)\} = \{\text{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Montrons cette égalité par double inclusion.

\square Soit f une application injective vérifiant (\star) .

Montrons que $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Par récurrence forte etc...

Ainsi, f appartient à $\{\text{id}_{\mathbb{N}}\}$.

\square La fonction identité est injective et vérifie (\star) .

Bilan. L'ensemble des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} injectives vérifiant (\star) est $\{\text{id}_{\mathbb{N}}\}$.

- Montrons que f est injective.

Soit (p, q) et (p', q') tels que $f(p, q) = f(p', q')$.

On a donc

$$p + \frac{1}{q} = p' + \frac{1}{q'} \text{ c'est-à-dire } p' - p = \frac{1}{q} - \frac{1}{q'}$$

Or $0 < \frac{1}{q'} \leq 1$ et $-1 \leq -\frac{1}{q} < 0$. Donc, en sommant ces inégalités, on obtient :

$$-1 < \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} < 1$$

On a donc $|p - p'| < 1$. Or $p - p'$ est un entier, d'où $p - p' = 0$, puis $p = p'$.

En utilisant $f(p, q) = f(p', q')$, on tire $q = q'$.

- Montrons que f n'est pas surjective.

Le rationnel $\frac{2}{3}$ n'a pas d'antécédents.

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $\frac{2}{3}$ s'écrive $p + \frac{1}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On a toujours $p < p + \frac{1}{q} \leq p + 1$. Et comme $p + \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$, on aurait nécessairement $p = 0$.

D'où $\frac{2}{3} = \frac{1}{q}$ puis $q = \frac{3}{2}$. D'où la contradiction car $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Considérons

$$g : E_1 = \left\{ \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\} \longrightarrow E_2 = \left\{ \frac{1}{n}, n \geq 2 \right\}$$

$$\frac{1}{n} \longmapsto \frac{1}{n+1}$$

Cette application g est bien définie.

De plus, elle est bijective de bijection réciproque $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n-1}$.

2. Notons A le complémentaire de $\left\{ \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$ dans $[0, 1]$ de sorte que

$$[0, 1] = \underbrace{\left\{ \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}}_{E_1} \cup A$$

Remarquons que A vérifie également :

$$[0, 1[= \underbrace{\left\{ \frac{1}{n}, n \geq 2 \right\}}_{E_2} \cup A$$

Considérons l'application suivante (qui est bien définie) :

$$h : [0, 1] \longrightarrow [0, 1[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } x \text{ s'écrit } \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon, c'est-à-dire } x \in A \end{cases}$$

$$\text{Posons } \varphi : [0, 1[\longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } x \text{ s'écrit } \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors φ est bien définie.

Je vous laisse vérifier que $h \circ \varphi = \text{id}_{[0,1[}$ et $\varphi \circ h = \text{id}_{[0,1]}$.

Cela montre que h est bijective.

1. L'application f n'est pas surjective.

La partie vide n'est pas dans l'image de f .

Prouvons-le en utilisant un raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(A) = \emptyset$.

Distinguons deux cas.

— Cas $x_0 \in A$.

Alors $f(A) = A$. Or $f(A) = \emptyset$. D'où $A = \emptyset$. Ainsi, l'ensemble vide contient x_0 .

C'est absurde.

— Cas $x_0 \notin A$.

Alors $x_0 \in \bar{A}$ et $f(A) = \bar{A}$. Or $f(A) = \emptyset$. D'où $\bar{A} = \emptyset$. Ainsi, l'ensemble vide contient x_0 .

C'est absurde.

2. L'application f n'est pas injective.

En effet, $f(\emptyset) = E$ et $f(E) = E$ et pourtant $E \neq \emptyset$ (d'après l'énoncé).

3. Montrons que $f \circ f = f$.

Déjà, les applications $f \circ f$ et f ont même ensemble de départ et d'arrivée.

Montrons qu'elles ont même expression.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

Montrons que $(f \circ f)(A) = f(A)$.

Vu la définition de f , on procède par disjonction de cas.

— Cas $x_0 \in A$.

Alors $f(A) = A$.

On a donc $x_0 \in f(A)$, d'où $f(f(A)) = f(A)$.

Dans ce cas, on a donc $(f \circ f)(A) = f(A)$.

— Cas $x_0 \notin A$, c'est-à-dire $x_0 \in \bar{A}$.

Alors $f(A) = \bar{A}$.

On a donc $x_0 \in f(A)$, d'où $f(f(A)) = f(A)$.

Dans ce cas, on a donc $(f \circ f)(A) = f(A)$.

- Supposons $A = E$, alors f est l'identité de $\mathcal{P}(E)$; elle est donc injective.
- Supposons f injective. On a $f(A) = f(E)$ (car $f(A) = A \cap A = A$ et $f(E) = E \cap A = A$). Par injectivité de f , on a $A = E$.
- Supposons $A = E$, alors f est l'identité de $\mathcal{P}(E)$; elle est donc surjective.
- Supposons f surjective. Montrons que $A = E$.
Montrons surtout $E \subset A$!
Par surjectivité de f , il existe $X_0 \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X_0) = E$, c'est-à-dire $X_0 \cap A = E$, d'où $E \subset A$.

1. Montrons que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.

\Rightarrow Supposons f injective.

Montrons $A \cup B = E$.

On a d'une part $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$.

Et d'autre part $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$.

Ainsi, $f(A \cup B) = f(E)$.

Par injectivité de f , on en déduit $A \cup B = E$.

\Leftarrow Supposons $A \cup B = E$ et montrons que f est injective.

Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $f(X_1) = f(X_2)$.

On a donc $(X_1 \cap A, X_1 \cap B) = (X_2 \cap A, X_2 \cap B)$.

D'où :

$$\begin{cases} X_1 \cap A = X_2 \cap A \\ X_1 \cap B = X_2 \cap B \end{cases}$$

On a alors $(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B)$.

D'où $X_1 \cap (A \cup B) = X_2 \cap (A \cup B)$.

Comme $A \cup B = E$, on en déduit $X_1 = X_2$.

D'où l'injectivité de f .

Remarque. On peut aussi écrire : $X_1 = X_1 \cap E$

$$\begin{aligned} &= X_1 \cap (A \cup B) \\ &= (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) \\ &= (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) \\ &= X_2 \cap (A \cup B) \\ &= X_2 \cap E \\ &= X_2. \end{aligned}$$

2. Montrons que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

\Rightarrow Supposons f surjective.

On peut donc trouver une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $(A, \emptyset) = f(X)$.

On a alors :

$$(A, \emptyset) = (X \cap A, X \cap B) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} X \cap A = A \\ X \cap B = \emptyset \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} A \subset X \\ X \subset \overline{B} \end{cases}$$

Par transitivité, on a $A \subset \overline{B}$, ce qui signifie exactement $A \cap B = \emptyset$.

Ma vieille solution, où j'essaie de symétriser le plus possible.

On peut donc trouver une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $(\emptyset, A \cap B) = f(X)$.

On a alors :

$$(\emptyset, A \cap B) = (X \cap A, X \cap B) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \emptyset = X \cap A \\ A \cap B = X \cap B \end{cases}$$

En intersectant la première ligne avec B et la seconde avec A , on obtient :

$$\begin{cases} \emptyset \cap B = (X \cap A) \cap B \\ (A \cap B) \cap A = (X \cap B) \cap A \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \emptyset = X \cap A \cap B \\ A \cap B = X \cap A \cap B \end{cases}$$

D'où $A \cap B = \emptyset$.

\Leftarrow Supposons $A \cap B = \emptyset$ et montrons que f est surjective.

Soit $(Y_A, Y_B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Posons $X = Y_A \cup Y_B$.

★ On a $X \in \mathcal{P}(E)$.

★ Montrons que $f(X) = (Y_A, Y_B)$. On a

$$X \cap A = (Y_A \cup Y_B) \cap A = (Y_A \cap A) \cup (Y_B \cap A).$$

— Comme $Y_A \subset A$, on a $Y_A \cap A = Y_A$.

— Comme $Y_B \subset B$ et $A \cap B = \emptyset$, on a $Y_B \cap A = \emptyset$.

On en déduit $X \cap A = Y_A$.

On prouve de même $X \cap B = Y_B$.

On en déduit $f(X) = (Y_A, Y_B)$.

D'où la surjectivité de f .

3. L'application f est bijective si, et seulement si, elle est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$

Dans ce cas, en examinant la preuve de la surjectivité, on obtient que f^{-1} est l'application :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ (Y_A, Y_B) &\longmapsto Y_A \cup Y_B \end{aligned}$$

Exercice de colle de François Sarcos (2022-2023, promo 2024)

- Montrons que \mathcal{W} est stable par f , c'ad $\forall A \in \mathcal{W}, f(A) \in \mathcal{W}$.

Soit $A \in \mathcal{W}$.

Puisque $A \in \mathcal{W}$, on a $A \subset f(A)$.

Par croissance de f , on a $f(A) \subset f(f(A))$.

Donc $f(A) \in \mathcal{W}$.

- Montrons que \mathcal{W} est stable par réunion.

Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{W}^I$. Montrons que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{W}$.

D'une part, par définition de \mathcal{W} , on a

$$\forall i \in I, A_i \subset f(A_i)$$

D'autre part, comme on a toujours $A_i \subset \bigcup_{j \in I} A_j$, la croissance de f implique

$$\forall i \in I, f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{j \in I} A_j\right)$$

Par transitivité, on a

$$\forall i \in I, A_i \subset f\left(\bigcup_{j \in I} A_j\right)$$

Ainsi, $\bigcup_{i \in I} A_i \subset f\left(\bigcup_{j \in I} A_j\right)$.

- Considérons $R = \bigcup_{A \in \mathcal{W}} A$.

Autrement dit, R est la réunion de toutes les parties appartenant à \mathcal{W} .

- Comme \mathcal{W} est stable par réunion, on a $R \in \mathcal{W}$. Ainsi, $R \subset f(R)$.

- Reprenons ce que l'on a obtenu au point précédent, à savoir $R \in \mathcal{W}$.

Comme \mathcal{W} est stable par f , on en déduit $f(R) \in \mathcal{W}$.

Ainsi, $f(R)$ est une partie de \mathcal{W} , donc est dans R (qui est la réunion des parties de \mathcal{W}).

En maths : $f(R) \subset R$.

Les deux points précédents fournissent $f(R) = R$.