Fonctions réelles

I. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, intervalle

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, vérifiant notamment :

— une propriété dite de « stabilité par translation » :

$$(T) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall\, h \in \mathbb{R}, \qquad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a + h \leqslant b + h$$

— une propriété dite de « stabilité par multiplication par un réel positif » :

$$(M) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \qquad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \leqslant \lambda b$$

En utilisant les propriétés (T) et (M), on peut prouver les implications suivantes :

$$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow\ a + c \leqslant b + d$$

$$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow\ 0 \leqslant ac \leqslant bd$$

Attention. Il n'y a pas de différence d'inégalités.

L'assertion suivante est fausse $\xcancel{\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow\ a - c \leqslant b - d}$

Intervalle

1 **Définition.** Un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in I, \quad x < y \ \Longrightarrow\ [x, y] \subset I$$

- **Intervalles triviaux (2 types).** L'ensemble vide et les singletons sont des intervalles, appelés intervalles triviaux.
- **Intervalles non triviaux (9 types).**
  Un intervalle est dit non trivial s'il est non vide et non réduit à un point.
  On admet que tout intervalle non trivial est de l'un des 9 types suivants :
  — un *segment* $[a, b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$;
  — un *intervalle ouvert* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, pour $a < b$;
  — un *intervalle semi-ouvert* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, pour $a < b$;
  — un *intervalle semi-ouvert* $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, pour $a < b$;
  — une *demi-droite fermée* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite fermée* $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite ouverte* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite ouverte* $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — la *droite* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Valeur absolue

- **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *valeur absolue* de x et on note $|x|$ le réel positif défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- **Racine du carré.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\sqrt{x^2} = |x|$.
- **Inégalité triangulaire.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

  avec égalité si et seulement si x et y ont même signe.
- **Une équivalence.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$. On a

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$$

- **Distance.** Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x représente la distance entre 0 et x sur la droite réelle.
- **Distance (bis).** Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x-y|$ représente la distance entre x et y sur la droite réelle.

II. Généralités sur les fonctions numériques

Une application $f : X \to \mathbb{R}$ où X est une partie de $\mathbb{R}$ est une *fonction réelle de la variable réelle*, ou encore *fonction numérique*.

Domaine de définition

Lorsque l'on considère une fonction de la variable réelle, il arrive souvent que l'on donne *seulement* une expression de f, par exemple « soit $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ ».
Il s'agit d'un abus de langage, car on sait que pour définir une application, on doit préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

— On cherche alors un ensemble de départ le plus naturel possible, que l'on appelle le *domaine de définition*. Il s'agit de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ a un sens.

— Par défaut, quand rien n'est précisé dans l'énoncé, l'ensemble d'arrivée d'une telle fonction est $\mathbb{R}$. En toute rigueur, il faudrait dire s'il s'agit de

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & [-3,+\infty[\\ x & \longmapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \quad \text{ou} \ldots$$

2 **Question.** On considère la fonction cotangente, notée cotan et définie par $\text{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.
Donner son ensemble de définition.
A-t-on l'égalité $\text{cotan} = \frac{1}{\tan}$?

Graphe d'une fonction de la variable réelle

Le *graphe* d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où X est une partie de $\mathbb{R}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\right\} = \left\{(x, f(x)),\ x \in X\right\}$$

On peut représenter le graphe de f dans le plan.
La courbe ainsi obtenue est appelée *courbe représentative* de f.

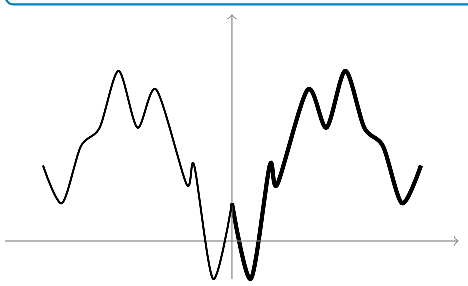
Parité, imparité

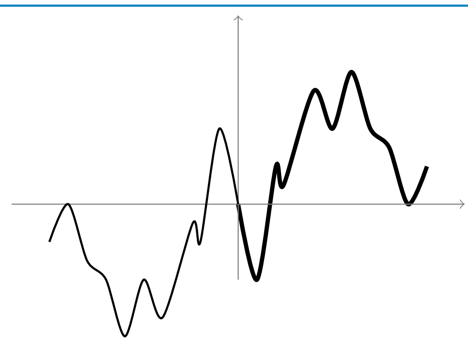
Désormais, X désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$. Idem pour Y.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3 **Définition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

— La fonction f est *paire* lorsque $\begin{cases} X \text{ est symétrique par rapport à } 0 \quad \text{càd } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \forall x \in X,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

— La fonction f est *impaire* lorsque $\begin{cases} X \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in X,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$





4 **Question.** Soit X, Y deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit $f : X \to Y$ une bijection *impaire*.
Montrer que sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.

5 **Définition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

— Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel T est **une** *période* de f (ou encore f est T-*périodique*) lorsque :

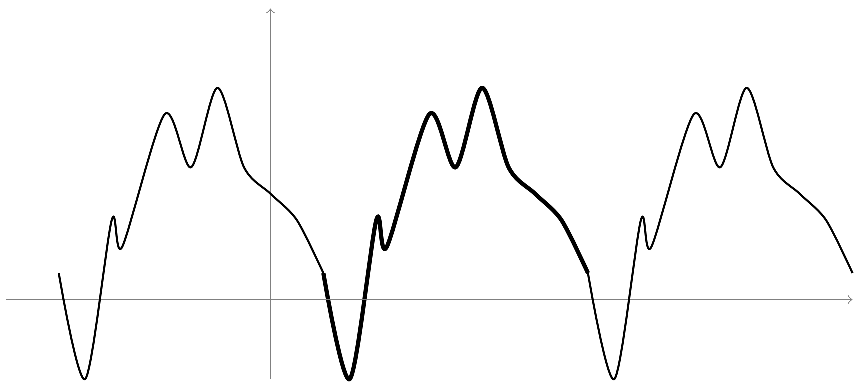
d'une part $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x + T \in X \iff x \in X$

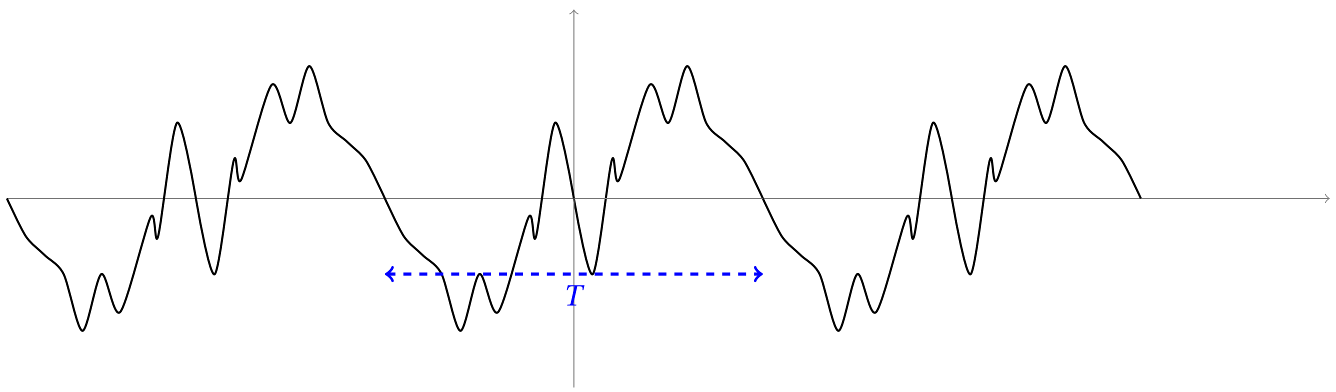
d'autre part $\quad \forall x \in X, \; f(x+T) = f(x)$

— La fonction f est *périodique* lorsqu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.

- **Cas particulier $X = \mathbb{R}$.** La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique lorsque $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x+T) = f(x)$.
- **Remarque.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Alors, on peut montrer (comment ?) que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in X, \quad f(x+kT) = f(x)$$





6 **Question.** On considère la fonction *partie fractionnaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array}$

Montrer que f est 1-périodique. Esquisser sa courbe représentative.

Rappel. Pour un réel $t \in \mathbb{R}$, la partie entière de t est l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant t < m+1$.

On montrera plus tard que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Autres propriétés

7 **Proposition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

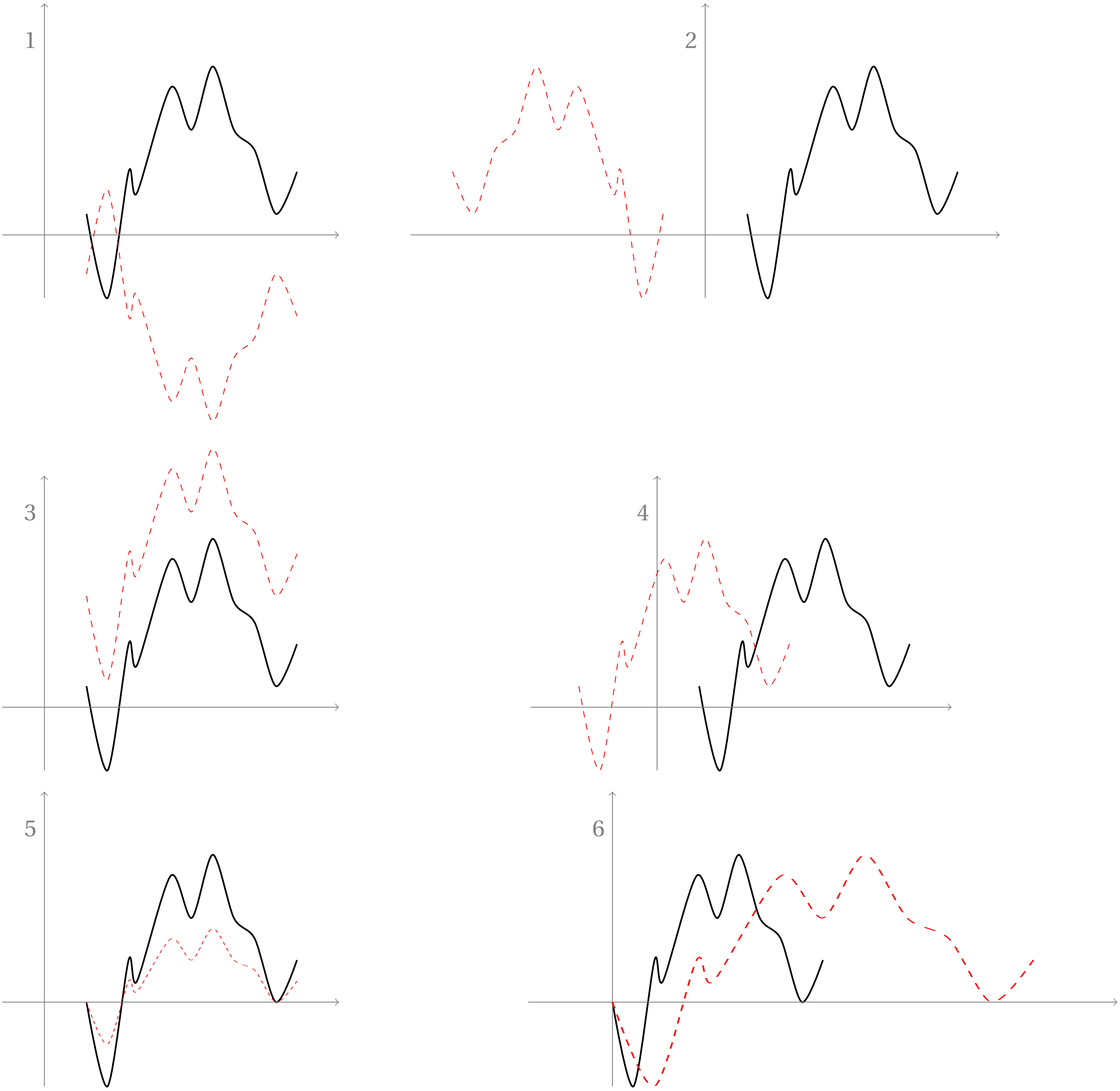
1. La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur X.
   Son graphe est l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $(O, \vec{\imath})$.

2. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur $\{-x, x \in X\}$.
   Son graphe est l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $(O, \vec{\jmath})$.

3. Soit $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x) + b$ est définie sur X.
   Son graphe est l'image du graphe de f par la translation de vecteur $b\vec{\jmath}$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x + a)$ est définie sur $\{x - a, x \in X\}$.
   Son graphe est l'image du graphe de f par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.

En trait plein, la courbe de f et en pointillés, la courbe de g.



8 **Question.** Esquisser le graphe des fonctions $x \mapsto \sin(x) - 3$ $\quad x \mapsto \sin(\pi x)$ $\quad x \mapsto \sqrt{x-1}$.

9 **Proposition.**

— Le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a+h \in \mathscr{D}_f \\ a-h \in \mathscr{D}_f \end{cases} \implies f(a+h) = f(a-h)$$

— Le graphe de f est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b) si et seulement si

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a+h \in \mathscr{D}_f \\ a-h \in \mathscr{D}_f \end{cases} \implies \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$$

Opérations sur les fonctions à valeurs réelles

10 **Définitions.**

— On note $\mathbb{R}^X$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.

— **Loi + Loi · Loi ×**

Soit $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^X$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

— On appelle *somme de f et g*, et on note $f+g$, la fonction définie par :

$$f+g: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

— On appelle *multiplication de f par le scalaire λ*, et on note $\lambda \cdot f$ ou encore λf, la fonction définie par :

$$\lambda f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

— On appelle *produit de f et g*, et on note $f \times g$ ou encore fg, la fonction définie par :

$$fg: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

— On appelle *valeur absolue de f*, et on note $|f|$, la fonction définie par :

$$|f|: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array}$$

— Si f ne s'annule pas sur X, on appelle *inverse* f, et on note $\frac{1}{f}$, la fonction définie par :

$$\frac{1}{f}: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array}$$

— La relation d'ordre utilisée sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathbb{R}^X$.

Pour $f, g \in \mathbb{R}^X$, on définit la relation $f \preccurlyeq g$ (notée encore $f \leqslant g$) par :

$$\forall x \in X, \ f(x) \leqslant g(x).$$

- **Attention.** La relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}^X$ n'est pas totale : étant donné deux fonctions f et g de $\mathbb{R}^X$, il se peut que ni $f \leqslant g$, ni $g \leqslant f$ ne soient vérifiées. Exemple ?
- **Warning.** Pour $f \in \mathbb{R}^X$, on n'*utilisera pas* la notation « $f > 0$ ». Celle-ci serait beaucoup trop ambiguë.
  - — Elle pourrait signifier $f \geqslant 0$ et $f \neq 0$, ce qui est le cas de la fonction carrée $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
  - — Elle pourrait également signifier que f est à valeurs strictement positives, ce qui n'est pas le cas de la fonction carrée.

11 **Question.** Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit f et g deux fonctions T-périodiques définies sur X.
Montrer que $f+g$ et fg sont T-périodiques.

12 **Définition**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$
Une combinaison linéaire des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ est une fonction de la forme $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

- **Exemple.** Une *fonction polynomiale* est une combinaison linéaire de fonctions $x \mapsto x^k$ où $k \in \mathbb{N}$.

Monotonie

13 **Définition.** Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est :

— *croissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$

— *strictement croissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$

— *décroissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$

— *strictement décroissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$

— *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

- **Astuce.** La fonction f est décroissante si et seulement si la fonction $-f$ est croissante.
- **Attention.** La fonction inverse $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

14 **Proposition (Monotonie et opérations).**
Soit f et g deux fonctions définies sur X et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.
De plus, si l'une d'elle est strictement croissante, alors la somme est strictement croissante.

— Si f et g sont *positives* et croissantes, alors la fonction fg est croissante.

— Si f et g sont *positives* et décroissantes, alors la fonction fg est décroissante.

— Si $\lambda \geqslant 0$ et f croissante, alors λf est croissante.

— Si $\lambda > 0$ et f strictement croissante, alors λf est strictement croissante.

— Si $\lambda \leqslant 0$ et f croissante, alors λf est décroissante.

— Si $\lambda < 0$ et f strictement croissante, alors λf est strictement décroissante.

15 **Question.** Soit f et g deux fonctions croissantes et négatives définies sur X.
sol → 19
Que peut-on dire de la monotonie de la fonction fg ?

16 **Proposition (Monotonie et composée).**
La composée de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante.
La composée de deux fonctions monotones de sens de variation contraire est décroissante.

- **Preuve.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ telle que $f(X) \subset Y$.
Soit $x, x' \in X$ tels que $x \leqslant x'$. Le tableau suivant récapitule les 4 cas possibles :

	f croissante	f décroissante
	$f(x) \leqslant f(x')$	$f(x) \geqslant f(x')$
g croissante	$g\big(f(x)\big) \leqslant g\big(f(x')\big)$	$g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(x')\big)$
g décroissante	$g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(x')\big)$	$g\big(f(x)\big) \leqslant g\big(f(x')\big)$

On fait de même pour la stricte monotonie avec, partout, des inégalités strictes.

17 **Proposition (Monotonie et inverse).** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.
Si f est une fonction monotone à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (ou dans $\mathbb{R}_-^*$), alors la fonction $\frac{1}{f}$ est également monotone, de monotonie opposée à celle de f.

- **Attention.** Lorsque f est monotone à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on ne peut rien dire de la monotonie de $\frac{1}{f}$.

18 **Question.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. Soit $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

— Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\}, \quad f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

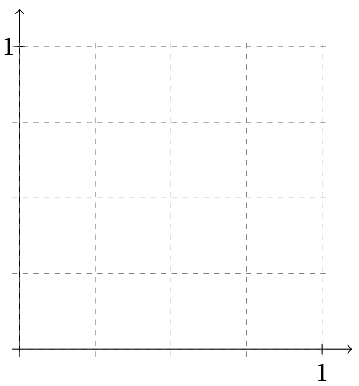
— Étudier les variations de f. Tracer le graphe de f.

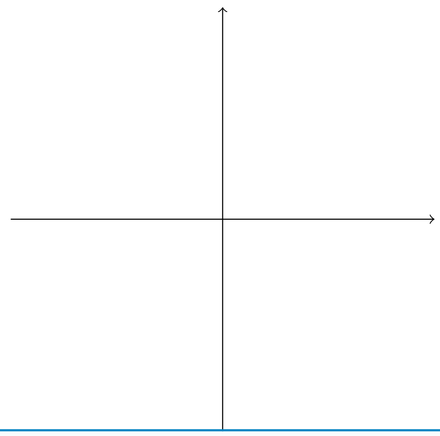
— Prouver la propriété de symétrie du graphe de f.

Cas des fonctions strictement monotones

19 preuve **Lemme.** Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.

- **Attention.** La réciproque est fausse.
  Donner une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective (a fortiori, injective) sans être monotone.
  Donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective (a fortiori, injective) sans être monotone.



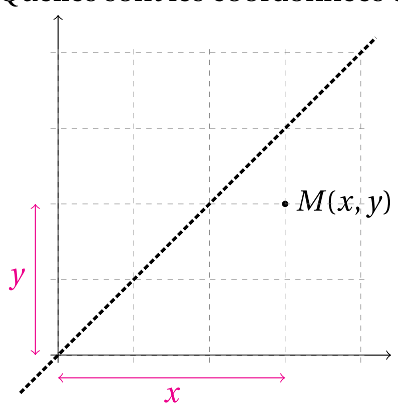


20 **Lemme.** Soit $f : X \to Y$ une bijection.
Si f est strictement monotone, alors f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f.

21 **Proposition (injectivité des fonctions strictement monotone).** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone, alors f induit une bijection de X dans $f(X)$, notée $\widehat{f}$.
De plus, la bijection réciproque $\widehat{f}^{-1} : f(X) \to X$ est strictement monotone, de même sens de variation que f.

22 **Proposition.** Soit $f : X \to Y$ une bijection.
Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

- **Rappel.** Soit $M(x, y)$. Notons M' le symétrique de M par rapport à la première bissectrice.
  Quelles sont les coordonnées de M' ?



Fonctions majorées, minorées, bornées

23 **Définition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

— f est *majorée* lorsque $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ f(x) \leqslant M$,

— f est *minorée* lorsque $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ f(x) \geqslant m$,

— f est *bornée* lorsque f est majorée et minorée.

- **Astuce.** La fonction f est minorée si et seulement si $-f$ est majorée.
- **Interprétation géométrique.** La fonction f est majorée si et seulement si son graphe se trouve en dessous d'une droite horizontale.
  Plus précisément, la fonction f est majorée par M si et seulement si son graphe se trouve en dessous de la droite d'équation $y = M$.
- **Majorant.** Un réel M tel que $\forall x \in X,\ f(x) \leqslant M$ est, s'il existe, un *majorant* de f.
  On définit de même un *minorant* de f.

24 **Proposition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ est bornée} \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \left|f(x)\right| \leqslant K$$

Autrement dit, f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

25 **Proposition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$.
Si f et g sont bornées, alors $f + g$ et fg sont alors bornées.

La somme et le produit de deux fonctions bornées est une fonction bornée.

26 **Définition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

— f admet un *maximum* en $a \in X$ lorsque $\forall x \in X,\ f(x) \leqslant f(a)$.

— f admet un *minimum* en $a \in X$ lorsque $\forall x \in X,\ f(x) \geqslant f(a)$.

— f admet un *extremum* en a, lorsque f admet un maximum en a ou un minimum en a.

- **Définition.** Si f admet un *maximum* en $a \in X$, alors le réel $f(a)$ est unique et est appelé le maximum de f.
  Il est noté $\max\limits_X f$ ou $\max\limits_{x \in X} f(x)$.
  On définit de même le minimum d'une fonction.
- **Exemple.** La fonction cos admet :
  — un maximum, 1, qui est atteint en tous les multiples de 2π ;
  — un minimum, -1, atteint en tous les points de la forme $\pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- **Attention.** Une fonction majorée n'admet pas nécessairement de maximum.

27 **Question.** Soit f la fonction définie sur $[3, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
La fonction f est minorée par 0.
Montrer qu'elle n'admet pas de minimum.

III. Continuité

Ici, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (on dit aussi un intervalle d'intérieur non vide).
Autrement dit, les extrémités de I sont distinctes : ainsi, I contient au moins deux points, en fait une infinité.

28 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

- On dit que f est *continue en a* lorsque f admet une limite en a.
  Dans ce cas, cette limite vaut nécessairement $f(a)$.
  Autrement dit, f est continue en a lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
- On dit que f est *continue sur I* lorsque f est continue en tout point de I.
- On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Opérations

29 **Proposition (Continuité et opérations).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont continues sur I, alors $f + g$, λf et fg sont continues sur I.
- Si de plus, f ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I.

30 **Proposition (Continuité et composition).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \text{ à valeurs dans } J \\ g \text{ est continue sur } J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

31 **Proposition (continuité de la bijection réciproque).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone, alors f induit une bijection de I dans $f(I)$, notée $\widehat{f}$.
Si de plus f est continue sur I, alors

- $J = f(I)$ est un intervalle
- la bijection réciproque $\widehat{f}^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

Théorème des valeurs intermédiaires

32 preuve

> **Théorème des valeurs intermédiaires.**
>
> **La version « basique »**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
> Soit $a, b \in I$ tel que $a \leqslant b$.
> Alors pour tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y_0$.
>
> **La version « sophistiquée »**
> L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarques.

- Ce théorème dit que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est « l'image de quelqu'un ».
- On ne suppose rien sur la position de $f(a)$ vis-à-vis de $f(b)$.
- Une autre façon de retenir cet énoncé :

  Si f est continue sur un intervalle, alors toute valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f est une valeur atteinte par f.

- Il n'y a pas d'unicité dans ce théorème. Ce théorème est un THÉORÈME D'EXISTENCE.
- Une condition suffisante d'unicité : « la fonction f est strictement monotone ».

33 sol → 19 **Question.** Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

34 sol → 20 **Question.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue* telle que $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x)\big)^2 = 1$.
Que dire de f ?
Avez-vous utilisé l'hypothèse de continuité ? Si non, c'est mauvais signe !

Un exemple de bijection

35 **Question.** Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^3 - \sqrt{x} + 1 \end{array}$ induit une bijection $\widehat{f}$ de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J à préciser.

IV. Dérivation

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle non trivial (non vide, non réduit à un point).

Nombre dérivé, fonction dérivée

36 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

- Le *taux d'accroissement* de f en a est la fonction τ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par :

$$\begin{array}{ccl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{array}$$

- La fonction f est *dérivable en a* lorsque son taux d'accroissement en a, possède une limite finie en a.
  Cette limite s'appelle alors *nombre dérivé* de f en a et se note $f'(a)$.
- On dit que f est *dérivable sur I* lorsque f est dérivable en tout point de I.
  La fonction définie sur I par $a \mapsto f'(a)$ est appelée fonction dérivée de f, et est notée f'.
- On note $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

- La notation « $'$ » ne s'applique qu'aux fonctions. On peut écrire $f'(x)$, ~~mais surtout pas $f(x)'$.~~

Interprétations de la dérivée

Tangente à une courbe

Étant donné une fonction f définie sur I, pour $x \in I \setminus \{a\}$, la droite joignant les points $A\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.$ et $M\left|\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix}\right.$ (avec $a \neq x$) a pour pente :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- Supposons f dérivable en a.
  - Alors la pente a pour limite $f'(a)$ quand $x \to a$.
  - Le vecteur de composantes $\big(1, \tau_a(x)\big)$ est un vecteur directeur de la corde (AM),
    et il « tend » vers $\big(1, f'(a)\big)$.
  - La droite passant par A et de pente $f'(a)$ est, par définition, la *tangente en A* à la courbe d'équation $y = f(x)$.
    C'est la « position limite » des cordes (AM) lorsque le point M tend vers A.
    Une équation de cette tangente est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
  - La tangente en A est *horizontale* si et seulement si $f'(a) = 0$.
- Supposons f non dérivable en a.
  Si f est continue en a et possède un taux d'accroissement en a qui tend vers $\pm\infty$, alors les cordes possèdent « une position limite verticale » que l'on appelle encore tangente à la courbe en A.
  On parle alors de tangente *verticale*. Dans ces conditions, une équation de la tangente est $x = a$.

Approximation de la fonction

Par définition de $f'(a)$, le quotient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'écrit $f'(a) + \varepsilon(x)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 en a.
Dit autrement, on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a) + (x - a)\,\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

On utilise souvent cela en Physique et en SI, en disant que $x \mapsto f(a) + f'(a)\,(x - a)$ est la « meilleure approximation linéaire » de f en a, ou une approximation au premier ordre de f au voisinage de a.

Opérations

37 **Proposition (opérations).** Soit $f, g \in \mathbb{R}^I$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors :

— la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

— la fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

— pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

— pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, si f ne s'annule pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.

— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

38 **Proposition (dérivée d'une composée).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

— Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ g \text{ est dérivable en } f(a) \end{cases}$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$

— Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \text{ à valeurs dans } J \\ g \text{ est dérivable sur } J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

39 **Question.**
Soit a, b, c, d quatre réels, avec $c \neq 0$.
Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$ et déterminer f'.

40 **Question.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

— Si f est paire, montrer que f' est impaire.

— Si f est impaire, montrer que f' est paire.

— Si f est T-périodique, montrer que f' est T-périodique.

41 **Proposition (Dérivabilité d'une bijection réciproque)**
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective continue.

— Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a.
Alors
$$f^{-1} \text{ est dérivable en } f(a) \iff f'(a) \neq 0$$
Dans ce cas, $\left(f^{-1}\right)'\big(f(a)\big) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

— On a :
$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f' \text{ ne s'annule pas sur } I \end{cases} \implies f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \quad \text{et} \quad \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Monotonie et dérivation

42 **Proposition (monotonie sur un intervalle)**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On a :

$$f \text{ est croissante sur } I \iff f' \text{ est positive sur } I$$

$$f \text{ est décroissante sur } I \iff f' \text{ est négative sur } I$$

43 **Proposition (constance sur un intervalle)**

— Soit $h : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

$$h \text{ est constante sur } I \iff h' \text{ est nulle sur } I$$

— Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle.
Si $f' = g'$, alors f et g diffèrent d'une constante.

44 **Proposition (condition suffisante de stricte monotonie)** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

- **Attention.** Dans tous ces énoncés, l'hypothèse « I est un intervalle » est indispensable.
- **Attention bis.** On ne donne qu'une condition suffisante de stricte monotonie.
Il existe une caractérisation (cf. plus tard !).

Dérivées successives

45 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On définit par récurrence les *dérivées successives de f* sous réserve d'existence en posant :

- $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$, si elle existe, est appelée *dérivée n-ième de f* ou *dérivée de f d'ordre n*.

- **Convention.** Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est 0 fois dérivable et $f^{(0)} = f$.

46 **Question.** Montrer le résultat suivant.

— Soit $h : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

$$h \text{ est affine} \iff h'' \text{ est nulle}$$

— Soit f et g des fonctions deux fois dérivables sur un intervalle.
Si $f'' = g''$, alors f et g diffèrent d'une fonction affine.

V. Étude de fonctions

On peut être amené à faire l'étude d'une fonction pour :

— tracer son graphe ;

— déterminer si une équation admet une/des solutions et éventuellement les encadrer ;

— établir des inégalités ;

— déterminer l'image d'une fonction etc.

Voici le plan d'étude général :

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction.
2. Étudier l'éventuelle parité/périodicité afin de réduire le domaine d'étude.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction. Calculer sa dérivée ; en donner une expression factorisée puis étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations.
5. Déterminer les éventuelles limites et les extrema locaux.
6. Tracer la courbe en commençant par placer les éléments remarquables (extrema, tangentes horizontales, asymptotes, etc.)

Fonctions réelles

preuve et éléments de correction

15

Le plus simple est de se ramener à des fonctions positives.
Puisque les fonctions f et g sont croissantes et négatives, les fonctions $-f$ et $-g$ sont décroissantes et positives.
Ainsi, la fonction $(-f)(-g)$ est décroissante.
Autrement dit, la fonction fg est décroissante.

19

Soit $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$.
Quitte à échanger x et x', on peut supposer $x < x'$.
Puisque la fonction f est strictement monotone, on a ou bien $f(x) < f(x')$ (cas croissant), ou bien $f(x) < f(x')$ (cas décroissant). Dans tous les cas, on a $f(x) \neq f(x')$.
Par définition, cela implique que f est injective.

Nouvelle rédaction, pour la culture. Montrons que f est injective, càd montrons que

$$\forall x, x' \in X, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

Soit $x, x' \in X$ tel que $x \neq x'$.
On a alors, par stricte monotonie de f,

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \text{ est } \begin{cases} > 0 & \text{si } f \text{ est strictement croissante} \\ < 0 & \text{si } f \text{ est strictement décroissante} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a $\dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'} \neq 0$, donc $f(x) \neq f(x')$.

32

$\implies$ Supposons la version « basique ».

Montrons la version « sophistiquée ». Pour cela, donnons-nous une fonction continue et I un intervalle et montrons que $f(I)$ est un intervalle.

Posons $J = f(I)$ pour alléger les notations. Montrons que J est un intervalle.
Soit $y, y' \in J$. Prenons un élément y_0 compris entre y et y' et montrons que $y_0 \in J$.
Comme y est dans $f(I)$, il s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in I$. Idem pour y' qui s'écrit $f(x')$ avec $x' \in I$.
Par construction, ce réel y_0 est compris entre $f(x)$ et $f(x')$, donc par le TVI basique, il existe x_0 compris entre x et x' tel que $y_0 = f(x_0)$.
On vérifie que x_0 est dans I :
on a $x, x' \in I$ et x_0 compris entre x et x'. Comme I est un intervalle, on en déduit $x_0 \in I$.
Par conséquent, y_0, qui s'écrit $f(x_0)$, est dans $f(I)$, donc est dans J.

$\impliedby$ Supposons la version « sophistiquée ».

Montrons la version « basique » : montrons que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un élément de $[a, b]$.

Soit y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Il s'agit de montrer que $y_0 \in J \overset{\text{def}}{=} f\big([a, b]\big)$.
D'après la version « sophistiquée », J est un intervalle (car $[a, b]$ est un intervalle et f est continue) et qui contient bien sûr $f(a)$ et $f(b)$.
Le fait que « J est un intervalle » fournit le fait que $y_0 \in J$.
Par définition de J, le réel y_0 s'écrit $f(c)$ avec $c \in [a, b]$.

33

On considère une fonction auxiliaire, à savoir $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$

Avec cette nouvelle fonction, la question se reformule en « montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ ».

— La fonction g est continue ; en effet, g est la somme de f et $x \mapsto -x$ qui sont continues.

— 0 est une valeur intermédiaire entre $g(0)$ et $g(1)$; en effet, comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on a en particulier $f(0) \in [0,1]$ et $f(1) \in [0,1]$, d'où

$$0 \leqslant f(0) \qquad \text{et} \qquad f(1) \leqslant 1$$

D'où

$$0 \leqslant \underbrace{f(0) - 0}_{g(0)} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{f(1) - 1}_{g(1)} \leqslant 0$$

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(1)$ et $g(0)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

34

On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \pm 1$$

On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Big(f(x) = 1 \quad \text{ou} \quad f(x) = -1 \Big)$$

On va montrer que (qu'est-ce qu'il y a de différent avec ce qui est écrit ci-dessus ?)

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 \Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1 \Big)$$

ce qui s'énonce encore

$$f \text{ est constante égale à } 1 \qquad \text{ou} \qquad f \text{ est constante égale à } -1$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 1$ et qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) \neq -1$ (ainsi f n'est ni constante égale à 1 ni constante égale à -1).
Ainsi, on a $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$.
Ainsi -1 et 1 sont des valeurs atteintes par f (par a et b respectivement).
Or 0 est une valeur intermédiaire entre -1 et 1.
Comme f est continue, le TVI assure que l'on peut trouver un c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.
Cela contredit la toute première phrase de la démonstration !