Fonctions usuelles

I. Logarithme népérien et exponentielle

On va d'abord construire la fonction logarithme népérien puis en déduire la construction de l'exponentielle.

La fonction logarithme népérien

1 **Définition.**
La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est définie sur $]0,+\infty[$ comme étant l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction inverse.

- **Reformulation.** Par définition, la fonction ln est l'unique fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ vérifiant

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln 1 = 0$$

2 **Proposition.** La fonction logarithme vérifie :

(i) $\forall\, a, b \in\,]0,+\infty[, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$

(ii) $\forall\, t \in\,]0,+\infty[, \quad \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln t$

(iii) $\forall\, x, y \in\,]0,+\infty[, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(iv) $\forall\, x \in\,]0,+\infty[,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n \ln x$

3 **Proposition.**
La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

- **Résumé.** On a le tableau :

x	0	1	$+\infty$
ln	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

- **Preuve.** On aura besoin d'utiliser le théorème suivant :

  Théorème de la limite monotone pour les fonctions. *Toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite (finie ou infinie) aux extrémités de cet intervalle.*

4 **Proposition (inégalité de concavité).**
On a

$$\forall\, x \in\,]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

- **Remarque très importante.**
L'inégalité précédente est une inégalité qui concerne la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
Elle fait intervenir la tangente au point d'abscisse 0.

  On peut la voir comme une inégalité concernant la fonction $t \mapsto \ln t$, et la tangente qui intervient est au point d'abscisse 1. On a :

$$\forall\, t \in\,]0,+\infty[, \quad \ln t \leqslant t-1$$

  avec égalité si et seulement si $t = 1$.

La fonction exponentielle

5 **Définition.**
La fonction *exponentielle*, notée exp, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

6 **Proposition.**

— La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, vérifiant $\exp 0 = 1$.

— La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\exp' = \exp$.

- **Résumé.** On a le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

7 **Proposition.** La fonction exponentielle vérifie :

(i) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp x \exp y$

(ii) $\forall\, t \in\,]0,+\infty[, \quad \exp(-t) = \dfrac{1}{\exp(t)}$

(iii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

(iv) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(x)^n = \exp(nx)$

8 **Proposition (inégalité de convexité).**
On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geqslant x+1$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

- **Remarque à lire.**
Soit $a \in \mathbb{R}$. On verra plus tard que le réel $\exp(a)$ peut être vu comme une somme *infinie* de nombres réels :

$$e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{4!}a^4 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n + \cdots +$$

En particulier, le réel $e = \exp(1) \approx 2{,}718281$ (irrationnel !) est une somme *infinie* de nombres *rationnels* :

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

Limites de taux d'accroissement en 0

9 **Proposition.** On a

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\exp(x)-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

- **Remarque très importante.**

La première limite peut se retenir au voisinage de 1 sous la forme $\dfrac{\ln t}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} 1$.

10 **Définition.** Soit $a \in]0,+\infty[$ différent de 1.

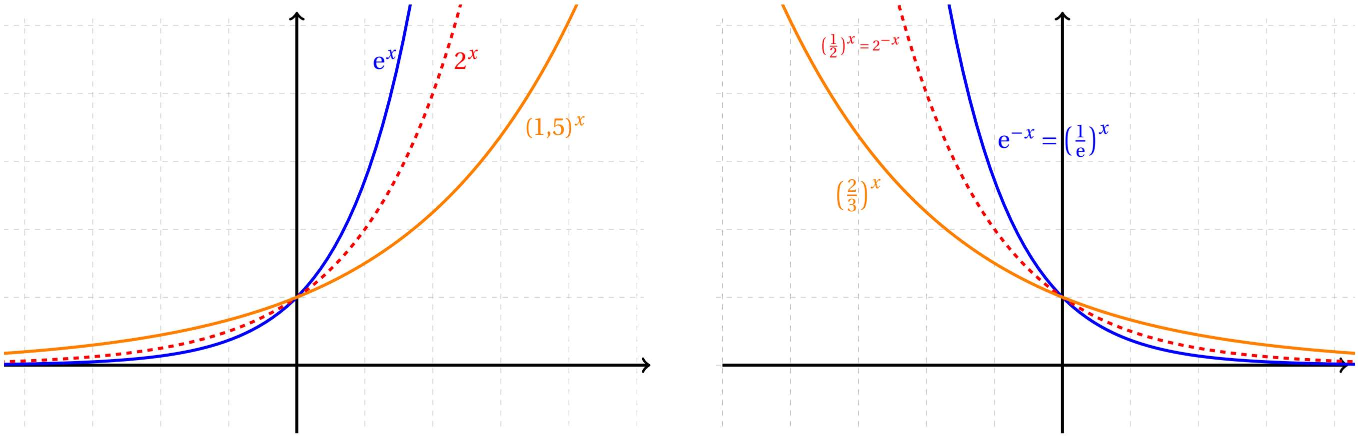
— On appelle logarithme de base a la fonction, notée $\log_a$, définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\log_a(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\ln x}{\ln a}$$

— On appelle exponentielle de base a la fonction, notée $\exp_a$ ou bien $a^{\bullet}$, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\exp_a(x) = a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x \ln a)$$

Voici la fonction exponentielle en base a.
À gauche, des $a > 1$ (avec $a = \frac{3}{2}\,;2\,;\mathrm{e}$) et à droite des $a < 1$ (avec $a = \frac{2}{3}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{\mathrm{e}}$)



11 **Proposition.**

• La fonction $\log_a : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\log_a' : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x} \end{array}$

• La fonction $\exp_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp_a)' : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln a\, a^x \end{array}$

II. Fonctions puissances

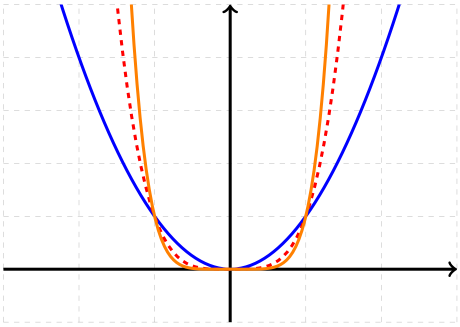
Puissance entière et puissance rationnelle

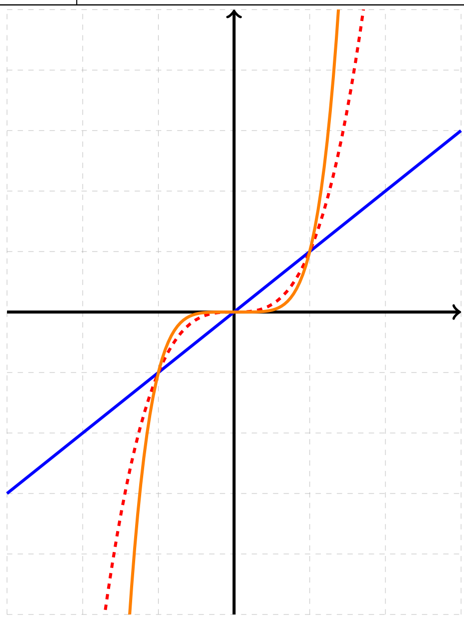
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction « puissance n » est définie par $\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \end{array}$

En fonction de la parité de n, les variations sont :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n n pair	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^n n impair	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$





12 **Proposition/Définition (fonction racine n-ième).**

$\boxed{\text{Cas } n \text{ pair}}$

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est la fonction racine n-ième :

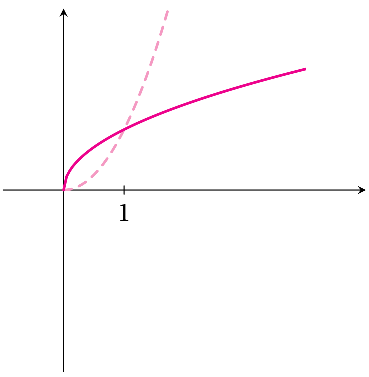
$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & \sqrt[n]{t} = \text{l'unique } x \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x^n = t \end{array}$$

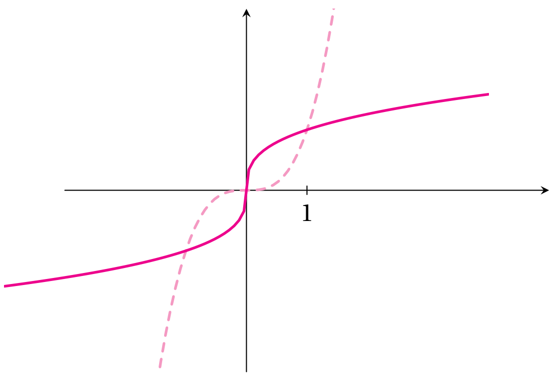
$\boxed{\text{Cas } n \text{ impair}}$

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est la fonction racine n-ième :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt[n]{t} = \text{l'unique } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^n = t \end{array}$$





- **Rebelote.** Tout ce qui vient d'être raconté s'adapte à des puissances entières négatives.
  La seule chose à changer est l'ensemble de définition : il faut penser à retirer 0.

Puissance réelle quelconque

13 **Définition (puissance α, où α est un réel).**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction « puissance α » est définie par

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\alpha \ln x) \end{array} \qquad \text{réel qui est noté } x^\alpha$$

- **Remarque très importante.** Les mathématiciens ont décidé de **noter** x^α le réel $\exp(\alpha \ln x)$.
  À retenir : $\exp(\alpha \ln x)$ est **noté** x^α $\qquad x^\alpha \overset{\text{notation}}{=} \exp(\alpha \ln x)$
- **Remarque bas de gamme, mais cruciale.** On a $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ $\quad$ car $\ln(x^\alpha) \overset{\text{WHY}}{=} \ln\big(\exp(\alpha \ln x)\big) \overset{\text{WHY}}{=} \alpha \ln x$.
- **Les 5 questions les plus importantes de l'année.**
  Pour quels x, la quantité x^3 est-elle définie ? Que vaut-elle ?

  Pour quels x, la quantité $\sqrt{x}$ est-elle définie ? Que vaut-elle ?

  Pour quels x, la quantité $x^{\frac{1}{2}}$ est-elle définie ? Que vaut-elle ?

  Pour quels x, la quantité $\sqrt[3]{x}$ est-elle définie ? Que vaut-elle ?

  Pour quels x, la quantité $x^{3,14}$ est-elle définie ? Que vaut-elle ?

14 **Proposition à méditer.**

— Soit $n \in \mathbb{Z}$.
La fonction $\varphi_n : \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(n \ln x) \end{array}$ est la restriction à $]0,+\infty[$ de la bonne vieille fonction « puissance n ».

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction « puissance $\frac{1}{n}$ » $\begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{1}{n} \ln x\right) \end{array}$ est la restriction à $]0,+\infty[$ de la bonne vieille fonction « racine n-ième ».

- **À méditer très très très longtemps.** Le deuxième point dit donc que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

À gauche, le réel $x^{\frac{1}{n}}$ est défini pour $x > 0$ et il vaut $\exp(\frac{1}{n} \ln x)$.

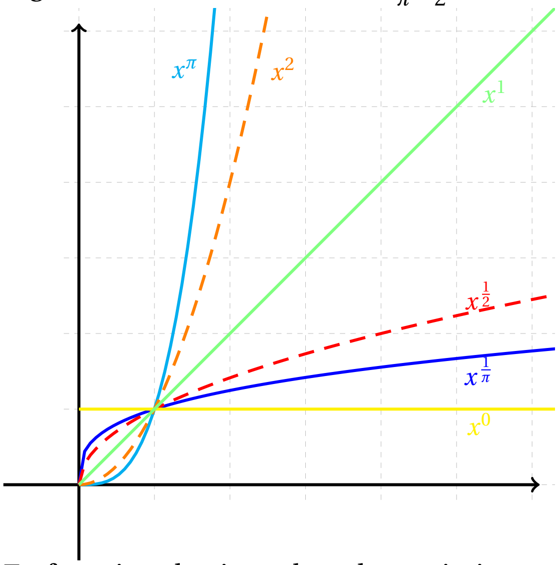
À droite, le réel $\sqrt[n]{x}$ est défini pour $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \in \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et vaut l'unique $t \in \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ tel que $t^n = x$.

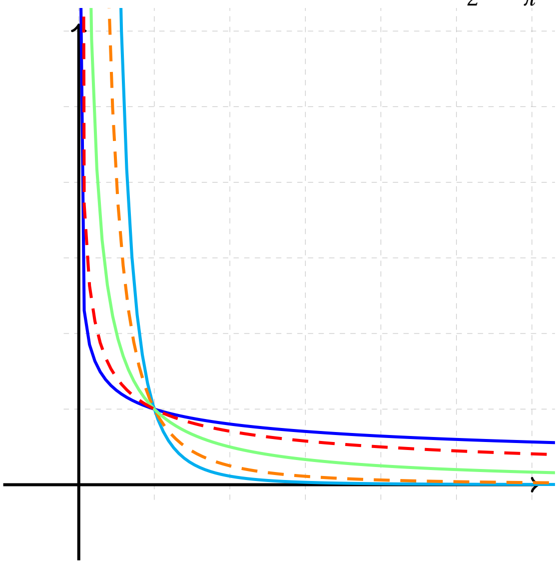
- **Conséquence.** Pour tout $x > 0$, on a $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \ln x$.

15 **Question.** Sans effort, sans calcul, montrer et illustrer :

$$\forall x > 0, \quad \ln x \leqslant 2\sqrt{x} - 2$$

À gauche, des $\alpha > 0$ (avec $\alpha = \frac{1}{\pi}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,2\,;\,\pi$) et à droite des $\alpha < 0$ (avec $\alpha = -\pi\,;\,-2\,;\,-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{\pi}$)





En fonction du signe de α, les variations sont :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
x^α $\alpha > 0$	0 $\nearrow$ $+\infty$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
x^α $\alpha < 0$	$+\infty$ $\searrow$ 0

Les résultats ci-dessous confortent le bien fondé de la *notation* puissance, puisqu'ils généralisent les règles de calcul que l'on connaît déjà sur les puissances *entières*.

16 **Proposition (propriétés de la fonction puissance).**
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $x, y \in \,]0, +\infty[$.

$$x^\alpha\, y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha\, x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad 1^\alpha = 1$$

17 **Proposition (dérivée de la fonction puissance).**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction φ_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall\, x \in \,]0, +\infty[, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

- **Remarque pertinente ?**
- **Réflexe.** Lorsque l'on voit « du x en bas et du x en haut », il est quasiment obligatoire de revenir à l'écriture exponentielle :
$$u(x)^{v(x)} \;=\; \exp\Big(v(x)\,\ln\big(u(x)\big)\Big)$$
- **Pour plus tard.** On a l'égalité remarquable (WHY ?)
$$\forall\, n \in [\![2, +\infty[\![, \quad (\ln n)^{\ln n} \;=\; n^{\ln(\ln n)}$$

18 **Question.** Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{\ln x}$.

19 **Question.** Étudier la fonction $f : x \mapsto x^x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

III. Croissances comparées

20 **Proposition (puissance de x et logarithme, au voisinage de $+\infty$ et 0).**

— On a :

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

— Soit $\alpha, \beta > 0$. On a :

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

- **À comprendre.**
  La valeur absolue est indispensable dans la seconde relation car la fonction logarithme est négative sur l'intervalle $]0,1]$.
  Le résultat précédent ne traite que les cas $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans les autres cas :
  - si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$, on s'y ramène facilement par passage à l'inverse,
  - sinon, les opérations sur les limites permettent de conclure directement.

21 **Proposition (puissance de x et exponentielle, au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$).**

— On a :

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

— Soit $\alpha, \gamma > 0$. On a :

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad |x|^\alpha e^{\gamma x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

- **Remarque.** Avec l'exponentielle de base $a > 1$. On a :

$$\frac{a^x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x a^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

  Il suffit d'appliquer le deuxième point avec $\alpha = 1$ et $\gamma = \ln a > 0$.

22 **Question.** Déterminer la limite en $+\infty$ de $x^3 e^{-\sqrt{x}}$.

IV. Fonctions circulaires et leurs réciproques

La fonction Arc tangente

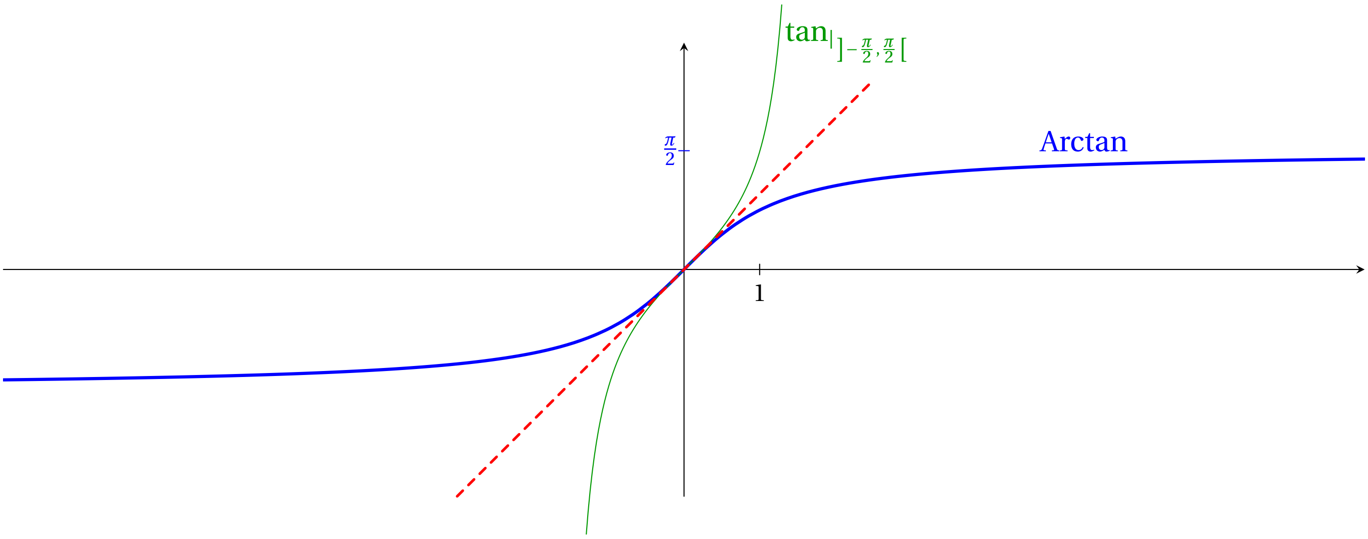
La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
En effet, la fonction $f = \tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$

— est injective, par stricte monotonie de f

— a pour image $]-\infty, +\infty[$.
En effet, par continuité de f, le TVI affirme que l'ensemble $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ est un intervalle.
Et les extrémités de cet intervalle sont $-\infty$ et $+\infty$.

23 **Définition.**
La fonction Arc tangente est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Arctan} : &]-\infty, +\infty[& \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \tan\theta = x \end{array}$$



- **Bonus.** La fonction Arc tangente est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est impaire.
- **Valeurs remarquables.** On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\text{Arctan}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- **Piège.** Que vaut $\text{Arctan}\left(\tan(\frac{2024\pi}{3})\right)$?
- **Attention.**
On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}\left(\text{Arctan}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}\left(\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}\theta\right) = \theta$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan\left(\text{Arctan}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \xcancel{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}\left(\tan\theta\right) = \theta}$$

- **Dans la pratique.**
Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence (c'est surtout l'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ qui est utilisée dans les exos) :

$$\text{Arctan}\, x = \theta \iff \begin{cases} \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x = \tan\theta \end{cases}$$

24 **Question.** Montrer que $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

25 **Proposition.**

— La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

— On a

$$\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

La courbe de la fonction Arc tangente admet une tangente au point $(0,0)$: c'est la droite ayant pour équation $y = x$.

— Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
La fonction $\operatorname{Arctan} \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$(\operatorname{Arctan} \circ u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

26 **Question.** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.

Sa dérivée vaut ...

Qu'en déduire ?

La fonction Arc sinus

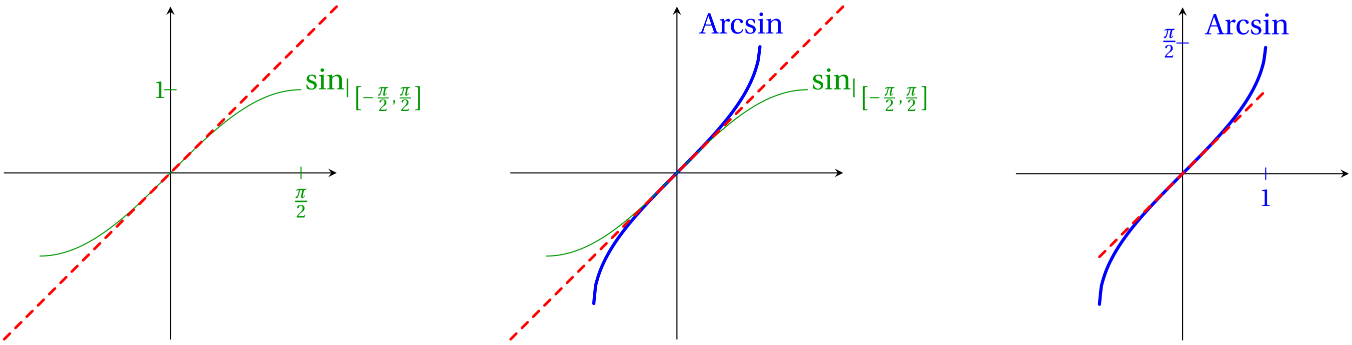
La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
En effet, la fonction $f = \sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$

— est injective, par stricte monotonie de f

— a pour image $[-1,1]$.
En effet, par continuité de f, le TVI affirme que l'ensemble $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ est un intervalle.
Et les extrémités de cet intervalle sont -1 et 1.

27 **Définition.**
La fonction Arc sinus est la bijection réciproque de la fonction sinus restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et corestreinte à $[-1,1]$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Arcsin} : & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin\theta = x \end{array}$$



- **Bonus.** La fonction Arc sinus est strictement croissante et continue sur $[-1,1]$.
De plus, elle est impaire.
- **Valeurs remarquables.** On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{Arcsin}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- **Piège.** Que vaut $\mathrm{Arcsin}\left(\sin(\frac{2024\pi}{3})\right)$?
- **Attention.** On a

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\left(\mathrm{Arcsin}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \mathrm{Arcsin}\left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \theta\right) = \theta$$

On a

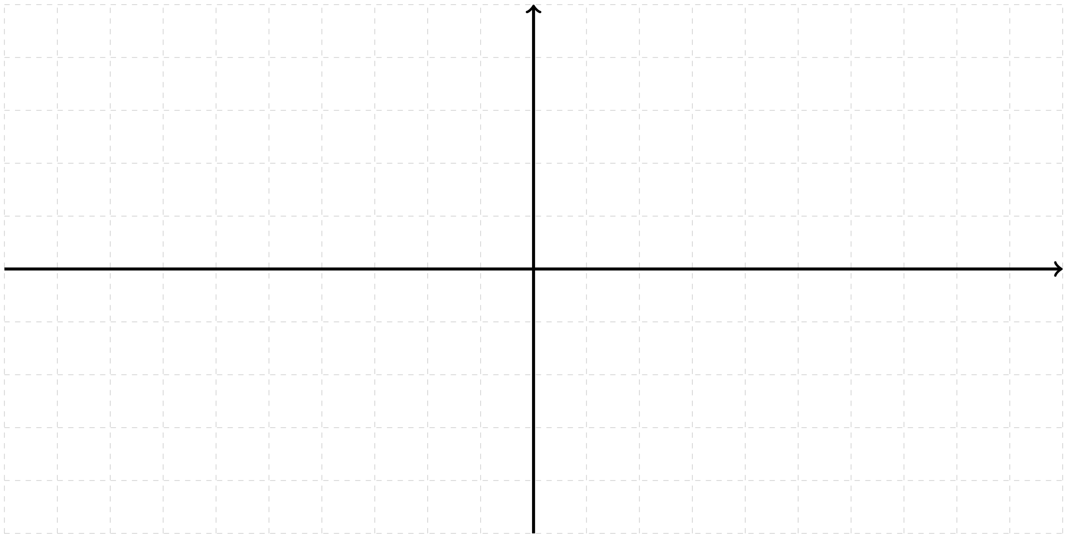
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin\left(\mathrm{Arcsin}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \xcancel{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arcsin}\left(\sin\theta\right) = \theta}$$

- **Dans la pratique.**
Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence (c'est surtout l'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ qui est utilisée dans les exos) :

$$\mathrm{Arcsin}\, x = \theta \iff \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x = \sin\theta \end{cases}$$

28 **Question.** Montrer que $\forall\, x \in [-1,1],\ \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$.

29 **Question.** Soit $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f.
Pourquoi peut-on restreindre l'étude de f à $[0,\pi]$?
En déduire le graphe de f.
On peut montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.



30 **Proposition.**

- ⋆ La fonction Arcsin n'est pas dérivable en ± 1.
- ⋆ La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall\, x \in \,]-1,1[,\quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- ⋆ Soit $u : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ et dérivable.
  La fonction $\operatorname{Arcsin} \circ u$ est dérivable sur I et on a

$$(\operatorname{Arcsin} \circ u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

- La non-dérivabilité de Arcsin en ± 1 se lit sur la courbe : présence de tangente verticale.
- La dérivée de Arcsin est paire (la dérivée d'une fonction impaire, à savoir Arcsin, est paire).

La fonction Arc cosinus

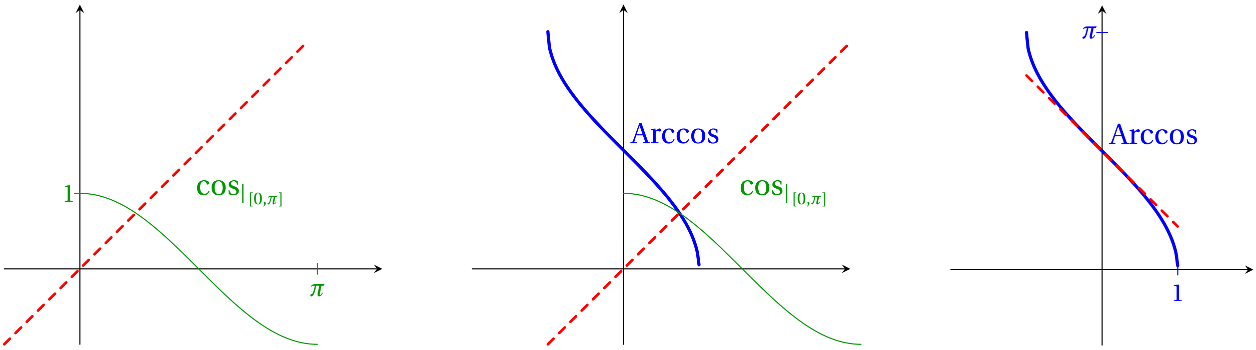
La restriction de la fonction cosinus à $[0,\pi]$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
En effet, la fonction $f = \cos_{|[0,\pi]}$

— est injective, par stricte monotonie de f

— a pour image $[-1,1]$.
En effet, par continuité de f, le TVI affirme que l'ensemble $f\big([0,\pi]\big)$ est un intervalle.
Et les extrémités de cet intervalle sont -1 et 1.

31 **Définition.**
La fonction Arc cosinus est la bijection réciproque de la fonction cosinus restreinte à $[0,\pi]$ et corestreinte à $[-1,1]$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Arccos} : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos\theta = x \end{array}$$



- **Bonus.** La fonction Arc cosinus est strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$.
Elle n'a pas de parité. En revanche, sa courbe possède le point $(0,\frac{\pi}{2})$ comme centre de symétrie.
- **Valeurs remarquables.** On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{Arccos}\, x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- **Piège.** Que vaut $\mathrm{Arccos}\big(\cos(\frac{2024\pi}{3})\big)$?
- **Attention.** On a

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos_{|[0,\pi]}\Big(\mathrm{Arccos}\, x\Big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in [0,\pi], \quad \mathrm{Arccos}\Big(\cos_{|[0,\pi]} \theta\Big) = \theta$$

On a

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos\Big(\mathrm{Arccos}\, x\Big) = x \qquad \text{et} \qquad \cancel{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arccos}\Big(\cos\theta\Big) = \theta}$$

- **Dans la pratique.**
Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence (c'est surtout l'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ qui est utilisée dans les exos) :

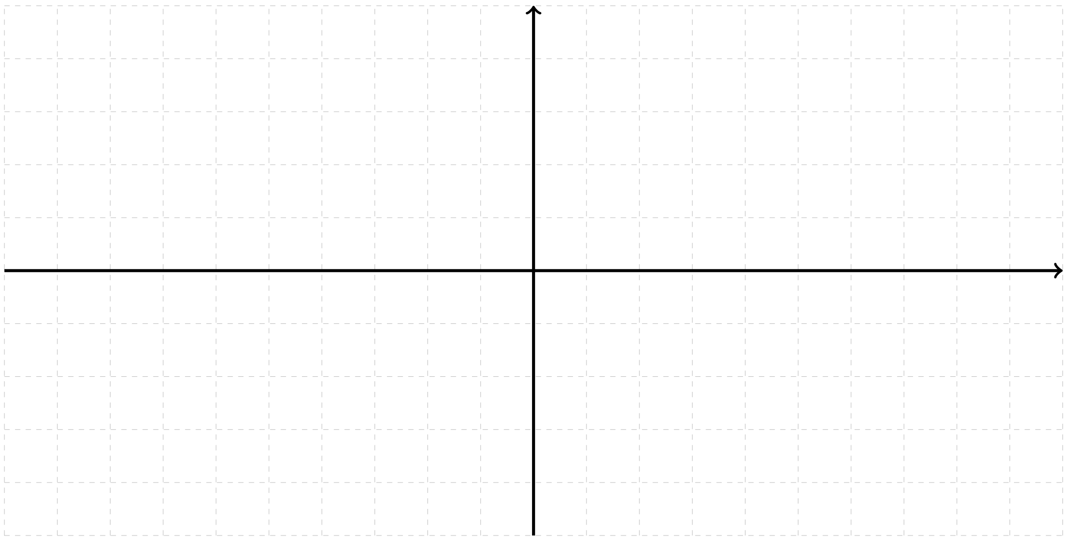
$$\mathrm{Arccos}\, x = \theta \iff \begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ x = \cos\theta \end{cases}$$

- **Une égalité.** On a $\quad \forall x \in [-1,1], \quad \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}.$

32 **Question.** Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}\, x + \text{Arccos}(-x) = \pi$. Conséquence sur la courbe de Arccos ?

33 sol → 22 **Question.** Soit $f : x \longmapsto \text{Arccos}(\cos x)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f.
Pourquoi peut-on restreindre l'étude de f à $[0,\pi]$?
En déduire le graphe de f.

Défi. Même si cela ne sert à rien dans la construction de la courbe, on peut montrer que la courbe de f admet le point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ comme centre de symétrie.



34 **Proposition.**

- ⋆ La fonction Arccos n'est pas dérivable en ± 1.
- ⋆ La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- ⋆ Soit $u : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ et dérivable.
  La fonction $\text{Arccos} \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$(\text{Arccos} \circ u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

• **Remarque.** La non-dérivabilité de Arccos en ± 1 se lit sur la courbe : présence de tangente verticale.

V. Fonctions hyperboliques

Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Rappel. Toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

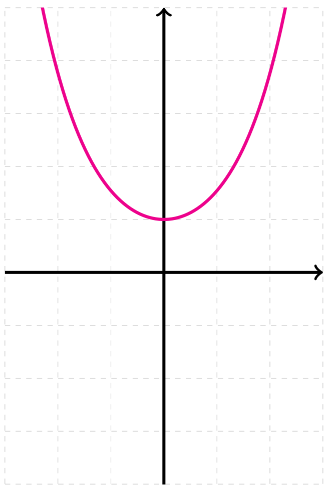
35 **Définition.**
Les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont définies sur $\mathbb{R}$ par

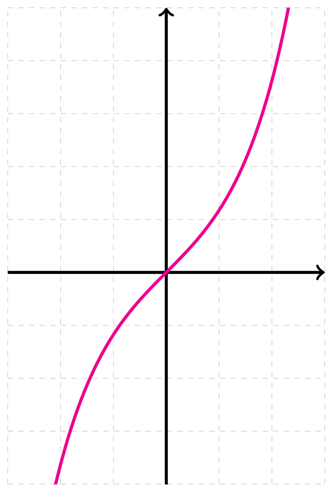
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ce sont respectivement les parties paires et impaires de la fonction exponentielle.

36 **Proposition.** Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$$





- On a les tableaux de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $\operatorname{sh}'(x)$		$+$	
variations de sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- La stricte monotonie et la continuité de ces fonctions impliquent que :
  — la fonction cosinus hyperbolique induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$.
  — la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

37 **Proposition.** Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad e^{-t} = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

VI. Fonctions à valeurs complexes

Ici I est un intervalle non trivial.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (c'est une *fonction de la variable réelle à valeurs complexes*).
Pour une telle fonction f, on définit alors les fonctions :

— *partie réelle de f*, notée $\operatorname{Re} f$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Re}\big(f(t)\big) \end{array}$

— *partie imaginaire de f*, notée $\operatorname{Im} f$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Im}\big(f(t)\big) \end{array}$

— *module de f*, notée $|f|$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \big|f(t)\big| \end{array}$

— *conjuguée de f*, notée $\overline{f}$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \overline{f(t)} \end{array}$

En définissant l'opération + sur les fonctions complexes comme pour les fonctions réelles, on a

$$f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f \qquad \text{et} \qquad |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = f\overline{f}$$

38 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
La fonction *complexe* f est bornée lorsque la fonction *réelle* « *module-de-f* » $|f|$ est bornée.

39 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
La fonction *complexe* f est bornée si et seulement si les fonctions *réelles* $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont bornées.

40 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si f et g sont bornées, alors $f+g$, fg, λf sont bornées.

Dérivée d'une fonction complexe

41 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
On dit que f est dérivable sur I lorsque les fonctions réelles $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables sur I.
Dans ce cas, la dérivée de f, notée f', est définie par

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)'$$

- **Remarque.** Quand $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable, on a donc $\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re} f)'$ et $\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im} f)'$.
- **Fonctions polynomiales.** Soit f une fonction polynomiale à valeurs complexes, disons $f : t \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$.

  Alors f est dérivable et $f' : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k t^{k-1}$.

Opérations sur les fonctions dérivables

42 **Proposition (opérations sur I).** Soit $f, g \in \mathbb{C}^I$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Si f et g sont dérivables sur I, alors :

— $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

— fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

— pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

— pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, si f ne s'annule pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.

— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

43 **Proposition.** Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi : I \to J$ une fonction *réelle* dérivable et $g : J \to \mathbb{C}$ une fonction *complexe* dérivable.
Alors la fonction complexe $g \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a $(g \circ \varphi)' = (g' \circ \varphi) \times \varphi'$

44 **Question.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\overline{f}$ est dérivable et donner sa dérivée en fonction de f.

Dérivée de e^f

45 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable.
Alors la fonction $\mathrm{e}^f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{f(t)} \end{array}$ est dérivable sur I et $\left(\mathrm{e}^f\right)' = f'\mathrm{e}^f$.

- **Pour la preuve.** On ne peut pas appliquer la proposition précédente. WHY ?

46 **Proposition.** Soit $\omega \in \mathbb{C}$.
La fonction complexe $\psi_\omega : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\omega t} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\psi'_\omega = \omega \psi_\omega$.

47 sol → 22 **Question.** Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles dérivables sur I.
Montrer que la fonction complexe $f : t \mapsto \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ est dérivable sur I et donner sa dérivée.

Caractérisation des fonctions constantes

48 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur l'*intervalle* I.
La fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.

Dérivées successives

Même définition que pour les fonctions à valeurs réelles.

49 **Question.**

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t-\mathrm{i}} \end{array}$. Montrer que f est dérivable et donner sa dérivée.

Plus généralement, montrer que f est n-fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de $f^{(n)}$.

Fonctions usuelles

preuve et éléments de correction

33

Pour le centre de symétrie, il s'agit de montrer que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(\frac{\pi}{2}+h)+f(\frac{\pi}{2}-h)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad f\Big(\frac{\pi}{2}+h\Big)+f\Big(\frac{\pi}{2}-h\Big) = \pi$$

c'est-à-dire

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arccos}\Big(\cos(\frac{\pi}{2}+h)\Big)+\operatorname{Arccos}\Big(\cos(\frac{\pi}{2}-h)\Big) = \pi$$

c'est-à-dire

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arccos}(-\sin h)+\operatorname{Arccos}(\sin h) = \pi$$

ce qui est vérifié car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Arccos}(x)+\operatorname{Arccos}(-x) = \pi$ (WHY ?).

47

La fonction ρ vue comme fonction à valeurs complexes est dérivable sur I.
La fonction $t \mapsto e^{i\theta(t)}$ est dérivable sur I.
Par produit de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur I, et on a

$$\begin{aligned}\forall\, t \in I, \quad f'(t) &= \rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)\,i\theta'(t)\,e^{i\theta(t)} \\ &= e^{i\theta(t)}\Big(\rho'(t) + i\rho(t)\theta'(t)\Big)\end{aligned}$$