Nombres réels

I. Partie bornée, extremum

Dans tout ce cours, A désigne une partie de $\mathbb{R}$.

1 **Définition.**

— Le réel M est un *majorant de* A lorsque $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
Lorsqu'un tel réel existe, on dit que la partie A est majorée par M.

— Le réel m est un *minorant de* A lorsque $\forall x \in A,\ x \geqslant m$.
Lorsqu'un tel réel existe, on dit que la partie A est minorée par m.

- **Cas particulier du vide.** La partie vide de $\mathbb{R}$ est majorée et minorée par tout réel.
Rappelons en effet que toute assertion de la forme « $\forall x \in \emptyset,\ \mathscr{P}(x)$ » est vraie.
- **Notation de Piston III.** On notera dans ce cours $\mathrm{Majo}(A)$ l'ensemble des majorants de A. Cet ensemble est vide lorsque A n'est pas majorée.
- **Une évidence.**
Si M est un majorant de A, alors tout réel supérieur à M est également un majorant de A.

$$\forall M \in \mathrm{Majo}(A), \quad [M, +\infty[\ \subset \mathrm{Majo}(A)$$

2 **Définition.** On dit que :

— A est *majorée* lorsque A admet un majorant $\qquad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$

— A est *minorée* lorsque A admet un minorant $\qquad \exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \geqslant m$

— A est *bornée* lorsque A est majorée et minorée

- **Reformulation.** On peut montrer (comment ?) que :

$$A \text{ bornée} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ |a| \leqslant K$$

3 **Deux exemples.**
Montrer que la partie $\mathbb{R}^+$ n'est pas majorée.
Montrer que la partie $\left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est bornée.

4 **Lemme.** Soit M et M' deux réels.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ M \in A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M' \\ M' \in A \end{cases} \quad \text{alors } M = M'$$

5 **Définition.**

On dit que A possède un *maximum* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ M \in A \end{cases}$

autrement dit lorsque A possède un majorant appartenant à A

Dans ce cas, un tel M est nécessairement unique, et est noté $\max A$.

- **En une phrase.** Cela se reformule $\exists M \in A,\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$.
- **Terminologie.** On dit aussi parfois *plus grand élément* à la place de *maximum*.
- **Rebelote.** Tout ce qui vient d'être dit peut être répété en remplaçant *majorée* par *minorée*, et *maximum* par *minimum*.

6 **Attention.** Une partie majorée n'admet pas nécessairement de maximum. Idem avec minorée/minimum.
Montrer que $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est minorée mais ne possède pas de minimum.
Montrer que la partie $\left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ possède un plus grand et un plus petit élément.

II. Borne supérieure, borne inférieure

Définition et « propriété de la borne supérieure »

7 **Lemme.** Soit s et s' deux réels.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, M \in \text{Majo}(A),\ s \leqslant M \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant s' \\ \forall\, M \in \text{Majo}(A),\ s' \leqslant M \end{cases} \quad \text{alors } s = s'$$

8 **Définition.**

On dit que A possède une *borne supérieure* lorsqu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, M \in \text{Majo}(A),\ s \leqslant M \end{cases}$

Dans ce cas, un tel s est nécessairement unique, et est noté $\sup A$.

- **Refrain.** On peut retenir la phrase suivante :

  Lorsqu'elle existe, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.
- **Reformulation.** Lorsque $\sup A$ existe, on a $\text{Majo}(A) = [\sup A, +\infty[$.
- **Cas particulier de la partie vide.** Lorsque $A = \varnothing$, alors $\text{Majo}(A) = \mathbb{R}$, donc l'ensemble $\text{Majo}(A)$ n'a pas de plus petit élément. Donc $\varnothing$ ne possède pas de borne supérieure.
- **Cas particulier de $\mathbb{R}$ tout entier.** Lorsque $A = \mathbb{R}$, alors $\text{Majo}(A) = \varnothing$, donc l'ensemble $\text{Majo}(A)$ n'a pas de plus petit élément. Donc $\mathbb{R}$ ne possède pas de borne supérieure.

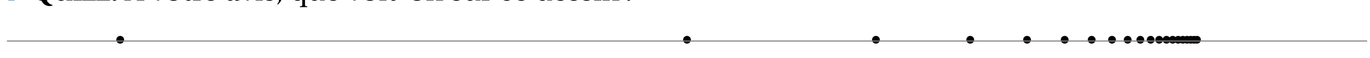
9 **Deux exemples.**
sol → 14
Montrer que $A = \left\{\frac{-1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ possède une borne supérieure et la déterminer.
Montrer que $A = \mathbb{R}^{-*}$ possède une borne supérieure et la déterminer.

On admet le théorème suivant, qui est la propriété fondatrice de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

10 **Théorème de la borne supérieure.**
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.

- **Réflexe.** Quand on vous demande de montrer qu'un ensemble possède une borne supérieure, le théorème précédent doit être votre première idée !
- **Pour la culture.** L'équivalent de ce théorème pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est faux.
  Par exemple, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ est non vide (il contient 0) et majoré (par 3, par exemple), mais il ne possède pas de borne supérieure *dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ lui-même.*

  D'une certaine façon, c'est cette lacune de $\mathbb{Q}$ qui conduit à l'introduction des nombres réels : on a rajouté à $\mathbb{Q}$ toutes les bornes supérieures qui manquaient. On dit que $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$ et cette idée est à la base de toutes les constructions rigoureuses de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Ce faisant, on a ajouté des nombres plus difficiles à comprendre que les rationnels, mais on a obtenu un ensemble possédant de meilleures propriétés structurelles que $\mathbb{Q}$.
- **Quizz.** À votre avis, que voit-on sur ce dessin ?



11 **Proposition (passage à la borne sup dans les inégalités larges).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a l'implication :

$$\Big(\forall\, a \in A,\ a \leqslant x\Big) \implies \sup A \leqslant x$$

- **Contraposée.** Elle dit que :

$$x < \sup A \implies \exists\, a \in A,\ x < a$$

que l'on peut comprendre : « si $x < \sup A$, alors x n'est pas un majorant de A (sinon il serait $\geqslant$ au plus petit des majorants qui est $\sup A$) ».

- **Attention aux inégalités strictes.**

$$\cancel{\Big(\forall\, a \in A,\ a < x\Big) \implies \sup A < x}$$

Contre-exemple, $A = \ldots$

- **En revanche,** on a :

$$\Big(\forall\, a \in A,\ a < x\Big) \implies \sup A \leqslant x$$

et la contraposée (qui est également vraie) dit alors :

$$x < \sup A \implies \exists\, a \in A,\ x \leqslant a$$

12 **Proposition (caractérisation epsilonesque de la borne sup).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : & \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ s - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon < a \end{cases}$$

- **Remarque.**
Quel que soit ε strictement positif, on peut trouver un élément $a \in A$ compris entre $\sup A - \varepsilon$ et $\sup A$.
Attention, il peut aussi exister des réels n'appartenant pas à A et compris entre $\sup A - \varepsilon$ et $\sup A$.
- **Remarque.** On pourrait énoncer (look at l'inégalité large dans le second point) :

$$s = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon \leqslant a \end{cases}$$

Évidemment, on doit prouver que cela ne change rien, autrement dit, je vous laisse prouver que :

$$\Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon < a\Big) \overset{\text{WHY}}{\iff} \Big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon' \leqslant a\Big)$$

Rappel. Pour $d \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$\Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ d < \varepsilon\Big) \iff \Big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ d \leqslant \varepsilon'\Big)$$

— L'implication $\boxed{\implies}$ est automatique. Fixons $\varepsilon' > 0$.
On applique la prémisse à ε égal à ε'. On a alors $d < \varepsilon = \varepsilon'$. Donc $d \leqslant \varepsilon'$.

— L'implication $\boxed{\impliedby}$ est plus subtile. Fixons $\varepsilon > 0$.
On applique la prémisse à ε' égal à $\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $d \leqslant \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $d < \varepsilon$.

Borne supérieure versus maximum

Il y a une différence majeure entre les deux notions (voisines) de maximum et de borne supérieure.
Il n'y a pas de doute que le maximum est une notion plus facile à comprendre, mais qui a le grand défaut de n'exister que rarement.
L'idée à retenir est la suivante :

— le maximum, **qui n'existe que rarement**, est un majorant qui appartient à la partie considérée,

— la borne supérieure, **qui existe souvent**, est un majorant qui appartient « presque » à la partie considérée.

Essayons d'expliquer le « presque ».

Lorsque la borne supérieure existe, on a $\begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon \leqslant a \end{cases}$

càd $\begin{cases} \forall\, a \in A,\ 0 \leqslant s - a \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - a \leqslant \varepsilon \end{cases}$ càd $\begin{cases} \forall\, a \in A,\ 0 \leqslant s - a \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ |s - a| \leqslant \varepsilon \end{cases}$

La condition $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ |s - a| \leqslant \varepsilon$ signifie que « s est arbitrairement proche de A », c'est-à-dire que « s est ε-proche d'un élément de A et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$ ».

13 **Proposition (max VERSUS sup).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

(i) Si A admet un maximum, alors $\sup A = \max A$.

(ii) Si $\sup A \in A$, alors $\sup A$ est le maximum de A.

(iii) Si $\sup A \notin A$, alors A n'a pas de maximum.

- **Réflexe.** Pour montrer que $\max A$ existe, on peut

  — revenir à la définition $\begin{cases} A \text{ possède un majorant } M \\ M \in A \end{cases}$

  — ou bien, montrer que $\begin{cases} A \text{ est non vide et majorée} \\ \sup A \in A \end{cases}$

Borne inférieure

14 **Définition.**

On dit que A possède une *borne inférieure* lorsqu'il existe $i \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall\, a \in A,\ i \leqslant a \\ \forall\, m \in \mathrm{Mino}(A),\ m \leqslant i \end{cases}$

Dans ce cas, un tel i est nécessairement unique, et est noté $\inf A$.

- **Refrain.** On peut retenir la phrase suivante :

  Lorsqu'elle existe, la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A.

- **Reformulation.** Lorsque $\inf A$ existe, on a $\mathrm{Mino}(A) = \,]-\infty, \inf A]$.
- **Cas particulier.** Lorsque $A = \varnothing$, alors $\mathrm{Mino}(A) = \mathbb{R}$, donc l'ensemble $\mathrm{Mino}(A)$ n'a pas de plus grand élément. Donc $\varnothing$ ne possède pas de borne inférieure.
- **Cas particulier.** Lorsque $A = \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Mino}(A) = \varnothing$, donc l'ensemble $\mathrm{Mino}(A)$ n'a pas de plus grand élément. Donc $\mathbb{R}$ ne possède pas de borne inférieure.
- **Deux exemples.**

  Montrer que $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ possède une borne inférieure et la déterminer.

  Montrer que $A = \mathbb{R}^{+*}$ possède une borne inférieure et la déterminer.

15 **Théorème (propriété de la borne inférieure).**

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

- **Exercice en guise de preuve.** Montrons comment on peut déduire ce théorème de son cousin germain.

  On se donne A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée et l'on note E l'ensemble des minorants de A.

  On souhaite montrer que E admet un plus grand élément : autrement dit que $\max E$ existe.

  Alors
  - l'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (WHY)
  - l'ensemble E est majoré (WHY)
  - le réel $\sup E$ est bien défini (WHY)
  - $\sup E$ est un minorant de A (WHY)
  - $\max E$ existe (WHY)

16 **Proposition (passage à la borne inf dans les inégalités larges).**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'implication :

$$\Big(\forall\, a \in A,\ x \leqslant a\Big) \implies x \leqslant \inf A$$

17 **Proposition (caractérisation epsilonesque de la borne inf).**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Soit $i \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \text{ est un minorant de } A : & \forall\, a \in A,\ i \leqslant a \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ i + \varepsilon \text{ n'est pas un minorant de } A : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ a < i + \varepsilon \end{cases}$$

- **Remarque.** On peut remplacer la deuxième condition par $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ a \leqslant i + \varepsilon$.

18 **Proposition (min VERSUS inf).**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.

(i) Si A admet un minimum, alors $\inf A = \min A$.

(ii) Si $\inf A \in A$, alors $\inf A$ est le minimum de A.

(iii) Si $\inf A \notin A$, alors A n'a pas de minimum.

Borne supérieure/inférieure généralisée

Lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée (qui est alors non vide, WHY ?), on convient que $\sup A = +\infty$.
Lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$ non minorée (qui est alors non vide, WHY ?), on convient que $\inf A = -\infty$.

Avec cette généralisation, on observe alors que :

> *toute partie de $\mathbb{R}$ non vide possède une borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que celle-ci est réelle si et seulement si la partie est majorée.*

Idem pour la borne inférieure.

Cette généralisation pourra parfois être utile dans certaines preuves, mais je vous conseille de ne pas trop l'utiliser en pale.

III. Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in I, \quad x < y \implies [x, y] \subset I$$

- **Intervalles triviaux (2 types).** L'ensemble vide et les singletons sont des intervalles, appelés intervalles triviaux.
- **Intervalles non triviaux (9 types).**
  Un intervalle est dit non trivial s'il est non vide et non réduit à un point.
  Les intervalles suivants sont non triviaux :
  — un *segment* $[a, b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$;
  — un *intervalle ouvert* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, pour $a < b$;
  — un *intervalle semi-ouvert* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, pour $a < b$;
  — un *intervalle semi-ouvert* $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, pour $a < b$;
  — une *demi-droite fermée* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite fermée* $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite ouverte* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite ouverte* $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — la *droite* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

On reconnaît que ces intervalles ont des propriétés différentes :
par exemple, $[a, b[$ est borné,
et vérifie $\min[a, b[= a$ et $\sup[a, b[= b$ (mais ce n'est pas un maximum).

19 **Théorème (classification des intervalles).**
Tout intervalle non trivial est de l'un des neuf types précédents.

Preuve. Soit I un intervalle non trivial.
En particulier I est non vide, et on peut donc considérer les bornes inférieure et supérieure généralisées de I.
Posons $a = \inf I$ et $b = \sup I$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On a $a < b$, car I est non trivial.
Montrons les égalités du tableau ci-dessous. Il y a donc 9 cas à distinguer, et dans chaque cas, une égalité à montrer, ou encore une double inclusion.

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$I \overset{?}{=} [a, b]$	$I \overset{?}{=} [a, b[$	$I \overset{?}{=} [a, +\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$I \overset{?}{=}]a, b]$	$I \overset{?}{=}]a, b[$	$I \overset{?}{=}]a, +\infty[$
$a = -\infty$	$I \overset{?}{=}]-\infty, b]$	$I \overset{?}{=}]-\infty, b[$	$I \overset{?}{=}]-\infty, +\infty[$

— Par définition de a et b, on obtient les inclusions $I \subset \ldots$.
— Pour conclure, il suffit de montrer les inclusions $\boxed{\supset}$.
On va d'abord montrer l'inclusion $]a, b[\subset I$ et en fonction de l'appartenance de a et b à I, on aura alors

$$]a, b[\subset I\,, \quad]a, b] \subset I\,, \quad [a, b[\subset I\,, \quad [a, b] \subset I$$

Soit $z \in]a, b[$. Montrons que $z \in I$.
Distinguons deux cas :
— Cas $b = +\infty$. Alors I n'est pas majoré , donc z n'est pas un majorant de I.
— Cas $b \in \mathbb{R}$. L'inégalité $z < b = \sup I$ prouve que z n'est pas un majorant de I.
Dans les deux cas, on peut trouver $y \in I$ tel que $z < y$.
De même, on montre que z n'est pas un minorant de I, donc on peut trouver $x \in I$ tel que $x < z$.
On a ainsi $z \in [x, y]$.
Comme $\begin{cases} x, y \in I \\ I \text{ est un intervalle} \end{cases}$, on a $[x, y] \subset I$.
On en déduit que $z \in I$.

IV. Partie entière

Définition

La définition suivante est peu rigoureuse (voire pas du tout !). WHY ?

20 **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$.
La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On la note $\lfloor x \rfloor$.

- **Reformulation 1.** On a
$$\lfloor x \rfloor \;=\; \max\left\{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x\right\}$$
- **Reformulation 2.** La partie entière de x est l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant x < m+1$.
Autrement dit :
$$\begin{cases} m \leqslant x < m+1 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \lfloor x \rfloor = m$$
- **Reformulation 3.** La partie entière de x est l'unique entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $x - q \in [0,1[$.
Autrement dit,
  - si q est la partie entière de x, alors on peut trouver $r \in [0,1[$ tel que $x = q + r$.
  - si x s'écrit $\underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{r}_{\in [0,1[}$ alors $\lfloor x \rfloor = q$.

Justification de la définition

La définition de la partie entière nécessite une justification (car on ne sait pas, *a priori*, que « le plus grand entier inférieur ou égal à x » existe).
Pour faire proprement cette justification, on utilise la proposition suivante.

21 **Proposition.**

(i) Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée (par un réel) admet un maximum.

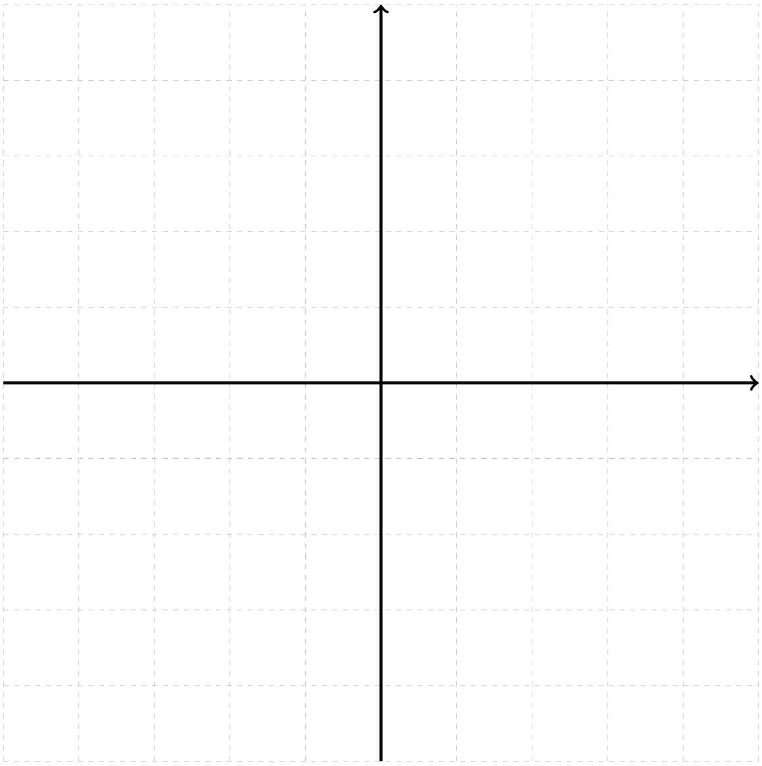
(ii) Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée (par un réel) admet un minimum.

(iii) En particulier, toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un minimum.

22 **Preuve de la définition 20.**
Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant la partie $A_x = \left\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\right\}$, montrer que la partie entière de x existe.

Propriétés

23 **Proposition.** La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ est croissante, mais n'est pas strictement croissante.



24 **Proposition.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) On a les encadrements :
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$
et
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

(ii) On a
$$\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$$

(iii) On a
$$\forall\, p \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$$

- **Attention** $\cancel{\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor}$
- **Utile de temps en temps.** Soit $n \in \mathbb{Z}$.
  Le plus grand entier pair inférieur ou égal à n est . . .

  Le plus grand entier impair inférieur ou égal à n est . . .

25 **Question.** Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$p \leqslant x < q \implies p \leqslant \lfloor x \rfloor < q$$

26 sol → 14 **Question.** Soit n et k deux entiers de $\mathbb{Z}$.
Trouver un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que
$$2k < n \iff k \leqslant a$$

Un élève propose la solution suivante.

~~*On a les équivalences :*~~
$$\cancel{\begin{aligned} 2k < n &\iff k < \frac{n}{2} \\ &\iff \lfloor k \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor && \textit{par croissance de la fonction partie entière} \\ &\iff k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor && \textit{car k est un entier} \end{aligned}}$$
~~*L'entier $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ répond donc à la question.*~~

Le prof lui répond :

Pour $n = 6$, on obtient $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 3$ et l'équivalence proposée ne fonctionne pas avec $k = 3$.

Où est l'erreur ? Proposez une solution.

27 **Proposition.**

(i) On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ x < n.$

(ii) On a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} < \varepsilon.$

(iii) (Axiome d'Archimède). On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n \in \mathbb{N},\ y < nx.$

- **Remarque.** Une variante du point (i) : *Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leqslant n'$.*
Remarquons que l'entier $n' = \lfloor x \rfloor + 1$ fonctionne mais n'est pas en général le plus petit entier $\geqslant x$.
Plus exactement il l'est, sauf si $x \in \mathbb{Z}$.
Il peut être conceptuellement plus clair de donner un nom à ce plus petit entier $\geqslant x$, et on le qualifie de partie entière supérieure :
$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
En pratique, la partie entière (inférieure) $\lfloor x \rfloor$ suffira largement à nos besoins.

28 **Proposition (Division euclidienne dans $\mathbb{R}$).**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $T \in]0, +\infty[$.
Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = qT + r \\ 0 \leqslant r < T. \end{cases}$

- **Cas particulier.** Lorsque $T = 1$, l'entier q est la partie entière $\lfloor x \rfloor$ et le reste r est la partie fractionnaire de x, ainsi :
$$\text{Pour } T = 1, \text{ on a} \qquad q = \lfloor x \rfloor \qquad \text{et} \qquad r = x - \lfloor x \rfloor$$

V. Compléments

Densité

29 **Définition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ |x - a| \leqslant \varepsilon$ càd $a \in A \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$
ou encore (WHY ?) lorsque $\forall\, x_1 < x_2 \in \mathbb{R},\ \exists\, a \in A,\ a \in [x_1, x_2]$ càd $a \in A \cap [x_1, x_2]$.

- **Reformulation.** Autrement dit, A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout point de $\mathbb{R}$ est arbitrairement proche d'un point de A.

30 **Proposition.**

— L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

— L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Principe de récurrence

31 **Proposition.** Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Principe de récurrence* : étant donné une assertion P portant sur les entiers naturels,
$$\text{si } \begin{cases} P(0) \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n).$$
2. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

$\boxed{1. \Longrightarrow 2.}$ Supposons le principe de récurrence vrai.
Soit A une partie de $\mathbb{N}$ n'admettant pas de plus petit élément. Montrons que A est vide.
Pour cela, montrons que tout entier naturel est un minorant de A (explication en fin de preuve).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: « n est un minorant de A ».
Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n)$.
On peut procéder par récurrence (car on a supposé le principe de récurrence vrai : c'est 1.).

Initialisation. Comme $A \subset \mathbb{N}$, tous les éléments de A sont positifs. Donc 0 est un minorant de A. D'où $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.
D'après $P(n)$, l'entier n minore A.
On a $n \notin A$ sinon n serait le plus petit élément de A (et on a supposé que A n'admettait pas de plus petit élément).
Ainsi $\forall a \in A,\ n \leqslant a$ et $n \neq a$. D'où $\forall\, a \in A,\ n < a$.
Comme $A \subset \mathbb{N}$, on en déduit $\forall a \in A,\ n+1 \leqslant a$.
D'où $P(n+1)$.

Bilan. Tout entier naturel est un minorant de A.

Donc A est vide : en effet, s'il existait $a_0 \in A$, tous les entiers naturels seraient des minorants de A donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, a \in A,\ n \leqslant a$.
A fortiori, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \leqslant a_0$.
En particulier, pour $n = a_0 + 1$, qui est bien un entier, car $A \subset \mathbb{N}$, on aurait une contradiction.

Donc toute partie *non vide* de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

$\boxed{2. \Longrightarrow 1.}$ Supposons que toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.
Soit P une assertion portant sur les entiers naturels.

$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$$

Posons $A = \Big\{ n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est fausse} \Big\}$. Montrons que A est vide.

Raisonnons par l'absurde. Supposons A non vide.
En tant que partie de $\mathbb{N}$ non vide, A possède un plus petit élément n_0 d'après l'hypothèse 2.
Comme $P(0)$ est vraie, $0 \notin A$. Donc $n_0 \neq 0$ donc $n_0 \geqslant 1$.
On a alors $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin A$ (car n_0 est le plus petit élément de A).
Donc $P(n_0 - 1)$ est vraie.
D'après l'implication supposée, on en déduit que $P(n_0)$ est vraie donc que $n_0 \notin A$.
Ce qui contredit le fait que $n_0 \in A$.

Donc A est vide et ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Nombres réels

preuve et éléments de correction

9

— Soit $a \in A = \mathbb{R}^{-*}$.
Alors $a < 0$.
A fortiori, $a \leqslant 0$.

— Soit $M \in \text{Majo}(A)$. Montrons que $0 \leqslant M$.
Raisonnons par l'absurde et supposons $M < 0$.
On a alors $\frac{M}{2} \in A$.
Comme M est un majorant de A, on a alors $\frac{M}{2} \leqslant M$.
D'où $M \geqslant 0$. Cela contredit le fait que $M < 0$.

Le mieux serait de montrer le deuxième point en montrant la contraposée de
$\forall M \in \mathbb{R}, \quad M \in \text{Majo}(A) \implies 0 \leqslant M$.
càd
$\forall M \in \mathbb{R}, \quad M < 0 \implies M \notin \text{Majo}(A)$.

26

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} 2k < n &\iff 2k \leqslant n-1 \\ &\iff k \leqslant \tfrac{n-1}{2} \end{aligned}$$

L'entier $a = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ répond à la question. Le justifier en montrant une double implication.