Nombres réels

exercices

Borne supérieure, borne inférieure et tutti quanti

101 Détermination de bornes

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum/minimum.

$$A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$B = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$$

$$C = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

$$D = \left\{\frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$$

$$E = \left\{an + b,\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$F = \left\{(-1)^n a + b,\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$G = \left\{\frac{a}{n} + b,\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$H = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$I = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$J = \left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

102 Retour sur le premier exo de l'année

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon$.
En exploitant la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $a = 0$.

103 Avec la définition

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que $A \subset B$. On suppose que B est bornée.
Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B.

104 « $A < B$ »

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a < b$.
Montrer que A est majorée, que B est minorée et comparer $\sup A$ et $\inf B$.
Donner un exemple de parties de $\mathbb{R}$ où il y a égalité entre $\sup A$ et $\inf B$.

105 Un mini raisonnement

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée telle que $\sup A > 0$.
Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

106 Deux parties adjacentes

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides, vérifiant $\begin{cases} \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ b - a \leqslant \varepsilon \end{cases}$

Montrer que $\sup A = \inf B$.

107 Opérations sur des parties de $\mathbb{R}$

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$-A = \{-a,\ a \in A\},\ A+B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\},\ A+\lambda = \{a + \lambda,\ a \in A\},\ \lambda A = \{\lambda a,\ a \in A\}.$$

1. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et la déterminer.
2. L'intersection $A \cap B$ admet-elle une borne supérieure ?
3. Montrer que $-A$ admet une borne inférieure et la déterminer.
4. Montrer que $A + \lambda$ admet une borne supérieure et la déterminer.
5. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et la déterminer.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA admet une borne supérieure et la déterminer.
   Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Établir des propriétés analogues lorsque l'on suppose que A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et minorées.

108 Point fixe

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. On pose $E = \Big\{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\Big\}$.

1. Montrer $f(E) \subset E$. *On dit que E est stable par f.*
2. Montrer que E possède une borne inférieure m, puis que $m \in [0,1]$.
3. Montrer que $f(m)$ minore E.
4. Montrer que $m \in E$ et $f(m) \in E$.
5. En déduire que m est un point fixe de f.

Ce résultat est-il toujours vrai avec une fonction décroissante ?
Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace $[0,1]$ par $[0,1[$?

109 Distance d'un réel à une partie

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *distance* de x à A le réel :

$$d(x,A) \;=\; \inf \Big\{|x-a|,\ a \in A\Big\}.$$

Justifier que $d(x,A)$ est bien définie, puis montrer :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \big|d(x,A) - d(y,A)\big| \;\leqslant\; |x-y|.$$

110 Avec des fonctions

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$.
On suppose que f et g sont majorées sur A.
Montrer l'existence de la borne supérieure de la partie $\Big\{f(x),\ x \in X\Big\}$. On la note $\sup\limits_X f$.
Comparer $\sup\limits_X f + \sup\limits_X g$ et $\sup\limits_X (f+g)$. Ces deux réels sont-ils égaux ?

111 Une fonction définie à l'aide de sup

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f^*(x) = \sup \Big\{f(t),\ t \leqslant x\Big\}$, que l'on note encore $\sup\limits_{t \leqslant x} f(t)$.

1. Justifier le fait que f^* est bien définie.
2. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
3. Étudier la monotonie de f^*.

112 Donné par YG en novembre 2023

Déterminer la borne supérieure et inférieure de $\left\{\dfrac{\cos n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
On utilisera uniquement le fait que $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

113 Un autre exo de YG

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. On suppose que A ne possède pas de maximum.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\sup A - \varepsilon, \sup A[$ contient une infinité d'éléments de A.

Partie entière

114 Des résultats classiques

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les assertions suivantes.

(i) $x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$

La réciproque est-elle vraie ?

(ii) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

(iii) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$

(iv) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

(v) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor$

(vi) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$

115 Une étude de fonction

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{2} - \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$ sont périodiques.

Tracer l'allure des courbes.

116 Nombres d'entiers dans un segment

Soit $a \leqslant b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\quad \mathrm{Card}\Big([a, b] \cap \mathbb{Z}\Big) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$.

117 Un calcul

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Montrer que cette somme vaut encore

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{1 - (-1)^n}{8}.$$

118 Une belle égalité

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Commencer par traiter le cas $x \in [0, 1[$, puis exploiter ce cas pour le cas général.

119 Un peu d'arithmétique

1. Montrer $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \right\rfloor = n^2 + n.$
2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ l'entier $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ est-il le carré d'un entier ?

120 Un exercice de khôlle !

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor.$$

On pourra montrer $p^2 \leqslant 4n + 1 \leqslant \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 < 4n + 2 \leqslant (p+1)^2$ où $p \in \mathbb{Z}$ est à déterminer.

121 Une inéquation trigonométrique !

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \cos\left(\sqrt{n}\right) \right| \leqslant \dfrac{1}{2023}$.

Densité

122 **Autour de la définition de la densité**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$, $\exists a \in A$, $a \in]x_1, x_2[$

ii) $\forall y_1 < y_2 \in \mathbb{R}$, $\exists a \in A$, $a \in [y_1, y_2]$

123 **Une partie dense dans $\mathbb{R}$**

En utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, montrer que $A = \{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

124 **Une condition suffisante pour être dense**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a,b) \in A^2,\ a < x < b \\ \forall (a,b) \in A^2,\ \dfrac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Pour aller plus loin...

125 **Relation d'inclusion sur l'ensemble des parties et bornes**

Soit E un ensemble. On considère $\mathcal{P}(E)$ muni de la relation d'inclusion.
Montrer que toute partie de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble contenant des parties A de E !

126 **Le principe de récurrence**

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

(ii) Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $\begin{cases} 0 \in \mathcal{A} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \in \mathcal{A} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{A}) \end{cases}$, alors $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

127 **Une partie de $\mathbb{Q}$ sans borne supérieure**

On considère l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre usuelle.
Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\} \subset \mathbb{Q}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Un extrait de la pale 3 de 2022

128 **Une recherche de borne inférieure**

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n\big(\beta n - \lfloor \beta n \rfloor\big)$.
On note $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Montrer que la borne inférieure de A existe et appartient à $\mathbb{R}$.
2. Ici, on suppose β rationnel. Déterminer $\inf A$.
3. Dans cette question, on suppose que β est un réel positif, irrationnel tel que $\beta^2 \in \mathbb{Z}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $u_n \geqslant \dfrac{1}{2\beta}$.
   Indication : on pourra utiliser une technique de « quantité conjuguée ».

Désormais, on suppose que $\beta = \sqrt{2}$, qui est donc irrationnel.

Il est conseillé de garder la notation β pour désigner $\sqrt{2}$ dans les calculs, de sorte que $\beta^2 = 2$.

4. On considère les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k. \end{cases}$$

   On peut montrer que (on ne demande pas de le faire) :

   pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, x_k et y_k sont des entiers supérieurs ou égaux à k.

   (a) Montrer $\forall\, k \in \mathbb{N},\ (\beta y_k)^2 - x_k^2 = 1$.
   (b) Montrer $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \lfloor \beta y_k \rfloor = x_k$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

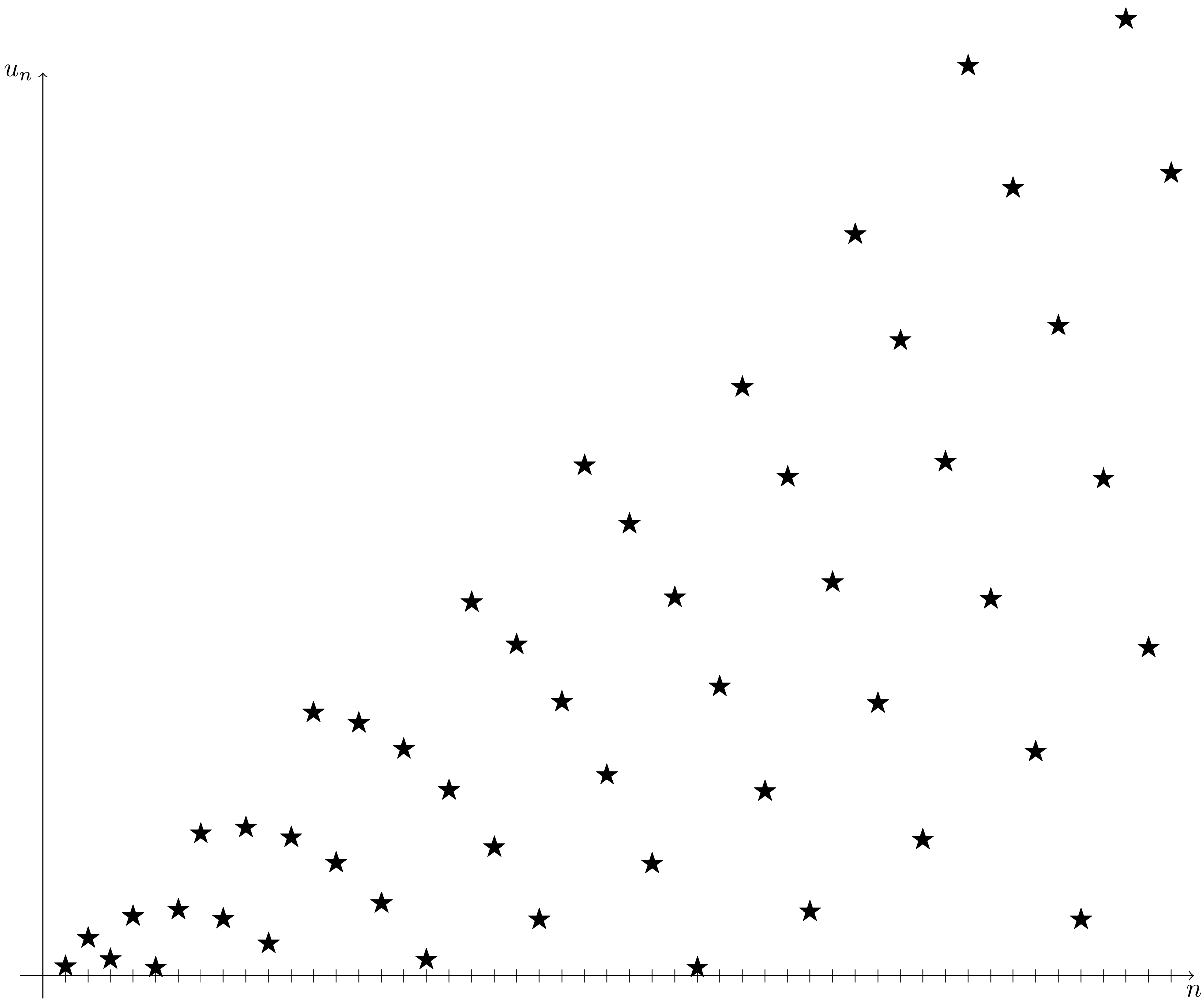
$$a_k \ = \ y_k\big(\beta y_k - \lfloor \beta y_k \rfloor\big).$$

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé une fois pour toutes.
   Comme y_k est un entier naturel non nul, on a $a_k \in A$.

   (a) Montrer $a_k = y_k \dfrac{1}{\beta y_k + \lfloor \beta y_k \rfloor}$.
   (b) Montrer $\forall\, t \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[,\quad \dfrac{t}{t + \lfloor t \rfloor} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2t-1}\right)$.
   (c) Montrer $a_k \leqslant \dfrac{1}{2\beta}\left(1 + \dfrac{1}{2\beta k - 1}\right)$.

6. Montrer $\inf A = \dfrac{1}{2\beta}$.

Et un petit cadeau étoilé puisque c'est bientôt Noël :


u_n
n

129

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée. On note $E_A = \left\{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\right\}$.

1. Justifier que E_A est une partie majorée.
2. On note $\delta(A)$ la borne supérieure de cet ensemble. Prouver que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

130

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et $f : A \times B \to \mathbb{R}$ bornée.
Comparer

$$\inf_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right)$$

131 Un khôlleur a donné ça !

Déterminer

$$\inf_{\alpha\in]0,\pi[}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(|\sin(n\alpha)|\right)\right)$$

132 Un exo de JN

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leqslant$.
On suppose que toute partie de E admet une borne sup et une borne inf.
Soit $f \in E^E$ une fonction croissante et $A = \left\{x \in E \mid x \leqslant f(x)\right\}$.

1. Soit $s = \sup A$. Montrer que $s \in A$.
2. Montrer que $f(s) = s$.
3. Soit $B = \{x \in E \mid f(x) \leqslant x\}$ et $i = \inf B$. Montrer que $f(i) = i$.

133

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
On considère l'ensemble $A = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que $\sup(A)$ existe et donner sa valeur.
2. Déterminer $f(A)$.
3. Comparer $\sup(f(A))$ et $f(\sup A)$.
4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
   Donner une condition suffisante sur g pour avoir $\sup(g(A)) = g(\sup A)$.

Nombres réels

corrigés

$A)$ On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$
D'où
$$\forall a \in A, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1$$
Ainsi, 0 est un minorant de A et 1 est majorant de A.
Comme A est non vide et majorée, A admet une borne supérieure. De même, A admet une borne inférieure.

• Comme $1 \in A$, on a
$$\max A \ = \ \sup A \ = \ 1.$$

• Montrons que $\inf A = 0$.

— 0 est un minorant de A.

— Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $0 + \varepsilon$ ne minore pas A.
On peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
On vient de trouver un élément $a \in A$ tel que $a < 0 + \varepsilon$.

Comme $0 = \inf A \notin A$, la partie A n'a pas de minimum.

$B)$ On a :
$$\forall b \in B, \quad 0 \leqslant b \leqslant 1$$
donc 0 minore B et 1 majore B.
Comme $1 \in B$, on a
$$\max B = \sup B = 1.$$
Comme $0 \in B$, on a donc
$$\min B = \inf B = 0.$$

$C)$ On a :
$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad -1 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1,$$
donc -1 minore C et 1 majore C.
Comme $-1 = \frac{1}{-1} \in C$ et $1 = \frac{1}{1} \in C$, on a
$$\min C = \inf C = -1 \quad \text{et} \quad \max C = \sup C = 1.$$

$D)$ On montre facilement que
$$\left\{ \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}_+^* \right\} = \mathbb{R}_+^*.$$
Il s'agit donc d'un ensemble non majoré.
L'ensemble est par ailleurs minoré et $0 = \inf \mathbb{R}_+^*$.
Comme $0 = \inf \mathbb{R}_+^* \notin \mathbb{R}_+^*$, donc $\mathbb{R}_+^*$ n'a pas de minimum.

$E)$ On a
$$E \ = \ \left\{ an + b, \ n \in \mathbb{N}^* \right\} \ = \ \left\{ a + b, \ a + 2b, \ a + 3b, \ \dots \right\}$$
Il y a donc 3 cas à envisager en fonction du signe de a.

— Si $a = 0$, alors $E = \{b\}$. Ainsi, $\min E$ et $\max E$ existent et valent b.

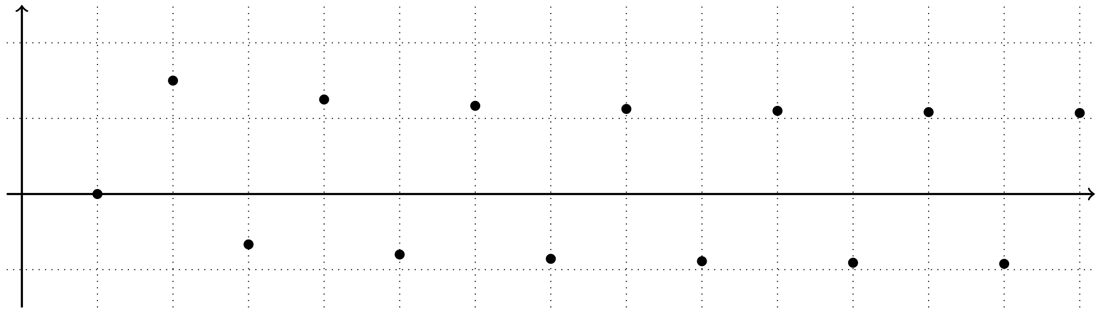
— Si $a > 0$, alors $\min E = a + b$ et E n'est pas majoré.

— Si $a < 0$, alors $\max E = a + b$ et E n'est pas minoré.

$F)$ On a
$$F \ = \ \left\{ (-1)^n a + b, \ n \in \mathbb{N}^* \right\} \ = \ \left\{ -a + b, \ a + b \right\}$$
Si $a \geqslant 0$, alors $\min F = -a + b$ et $\max F = a + b$.
Si $a \leqslant 0$, alors $\min F = a + b$ et $\max F = -a + b$.

$G)$ On a
$$G \ = \ \left\{ \frac{a}{n} + b, \ n \in \mathbb{N}^* \right\} \ = \ \left\{ a + b, \ \frac{1}{2}a + b, \ \frac{1}{3}a + b, \ \dots \right\}$$
Si $a = 0$, alors $\max G = \min G = b$.
Si $a > 0$, alors $\max G = a + b$ et $\inf G = b$.
Si $a < 0$, alors $\min G = a + b$ et $\sup G = b$.

$H)$ Un graphique peut aider à y voir plus clair.



On a

$$A \ = \ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

On va montrer que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \inf A = -1,$$

• Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant \frac{3}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas.

- Si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ et $\frac{1}{n} \leqslant 1$, donc

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant -1 + 1 = 0.$$

- Si n est pair, alors $n \geqslant 2$. On a donc $(-1)^n = 1$ et $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, donc

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Comme $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \in A$, on a

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

• On a $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -1 \ \leqslant \ (-1)^n + \frac{1}{n}$.
Cela montre que -1 minore A.
Pour montrer que $-1 = \inf A$, nous allons utiliser la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure : il nous reste à montrer $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in A, a \leqslant -1 + \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$.
On peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.
Posons

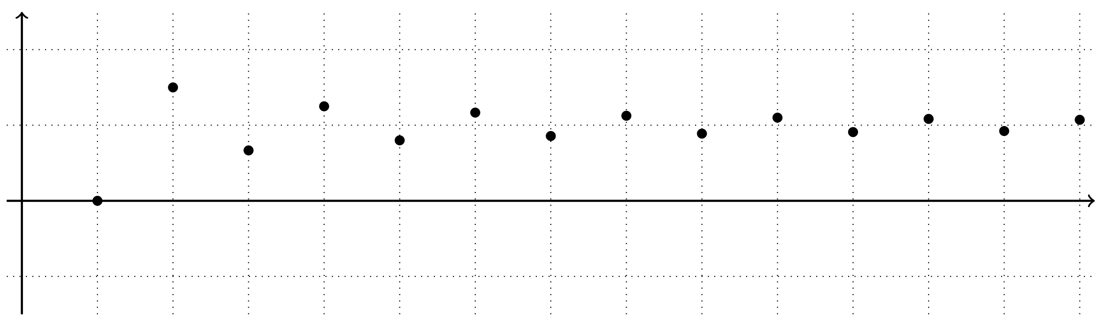
$$m = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

L'entier m est alors impair quoi qu'il arrive, et, comme $m \geqslant n$, on a $\frac{1}{m} \leqslant \varepsilon$.
On a donc

$$(-1)^m + \frac{1}{m} \ = \ -1 + \frac{1}{m} \ \leqslant \ -1 + \varepsilon.$$

On a donc trouvé $a \in A$, à savoir $a = (-1)^m + \frac{1}{m}$, tel que $a \leqslant -1 + \varepsilon$.

$I)$



— On a (le montrer par disjonction de cas en fonction de la parité de n) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{3}{2}$$

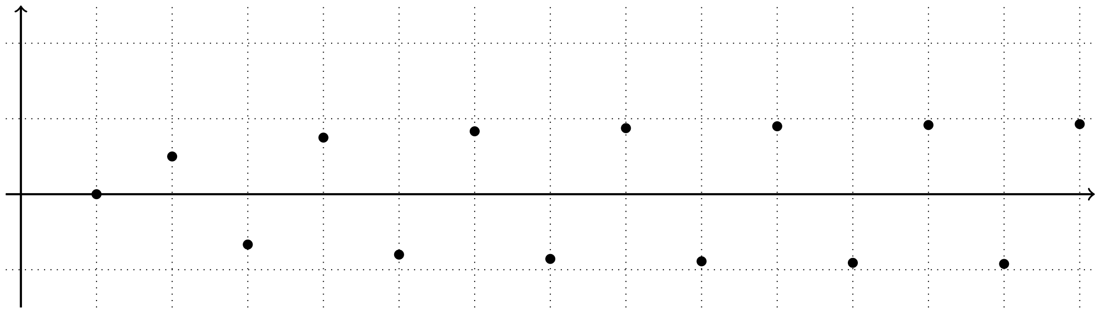
— Par ailleurs, on a $1 + \frac{(-1)^1}{1} = 0$, donc $0 \in A$, et $1 + \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$, donc $\dfrac{3}{2} \in A$.

— Cela montre :

  — que $0 \in A$ et que 0 minore A, donc $0 = \min A$;

  — que $\frac{3}{2} \in A$ et que $\frac{3}{2}$ majore A, donc $\frac{3}{2} = \max A$.

$J)$



— On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = 1 - \frac{1}{n} \ < \ 1,$$

ce qui montre $-1 < (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$.

— Montrons que $\sup A = 1$.
On a montré que 1 est un majorant de A.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrons $\exists\, a \in A,\ 1 - \varepsilon \leqslant a$.
On peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Quitte à ajouter 1 à n (ce qui ne changera pas l'inégalité précédente), on peut supposer n pair.
On a alors $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, donc $1 - \varepsilon \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.
Comme n est pair, cela se réécrit $1 - \varepsilon \leqslant (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
On a donc montré qu'il existe $a \in A$, à savoir $a = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, tel que $a \geqslant 1 - \varepsilon$.

— Comme $1 \notin A$, car 1 est un majorant **strict** de A, la partie A ne possède pas de maximum.

— On montre exactement de la même façon que $-1 = \inf A$, et donc que A ne possède pas de minimum.

— **Redémontrons ici que** $\inf \mathbb{R}_+^* = 0$**.**
La borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$ existe car $\mathbb{R}_+^*$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.
Montrons que $\inf \mathbb{R}_+^* = 0$, avec la caractérisation epsilonesque.

  — 0 est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$.
  — Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $0 + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $\mathbb{R}_+^*$,
  c'est-à-dire montrons qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a \leqslant 0 + \varepsilon$.
  Posons $a = \dfrac{\varepsilon}{2}$.
  On a $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \leqslant \varepsilon$.

— On a $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon$.
Par passage à la borne inférieure dans les inégalités larges, on a

$$|a| \leqslant \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |a| \leqslant \inf \mathbb{R}_+^*$$

Il faut comprendre en profondeur ce que signifie la locution magique « par passage à la borne inférieure dans les inégalités larges ».
Il suffit de dire « $|a|$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$, et $\inf \mathbb{R}_+^*$ est le plus grand des minorants, d'où $|a| \leqslant \inf \mathbb{R}_+^*$ ».

Comme $\inf \mathbb{R}_+^* = 0$, on obtient $|a| \leqslant 0$.
Comme une valeur absolue est également positive, on en déduit $a = 0$.

103

Comme B est bornée, il existe m et $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, b \in B,\ m \leqslant b \leqslant M$$

Comme $A \subset B$, on a donc

$$\forall\, a \in A,\ m \leqslant a \leqslant M$$

On en déduit que A est bornée.
Comparons maintenant les bornes supérieures et inférieures de A et de B, qui existent, car les ensembles sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées.
Par définition, on a :

$$\forall\, b \in B,\ \inf B \leqslant b \leqslant \sup B$$

Comme $A \subset B$, on en déduit

$$\forall\, a \in A,\ \inf B \leqslant a \leqslant \sup B$$

que l'on peut réécrire :

$$\forall\, a \in A,\ \inf B \leqslant a \qquad \text{et} \qquad \forall\, a \in A,\ a \leqslant \sup B$$

En passant à la borne inférieure à gauche, et à la borne supérieure à droite, on a

$$\inf B \leqslant \inf A \qquad \text{et} \qquad \sup A \leqslant \sup B$$

On aurait aussi pu justifier $\inf B \leqslant \inf A$ en disant :
« L'inégalité $\forall\, a \in A,\ \inf B \leqslant a$ dit que $\inf B$ est un minorant de A ; or $\inf A$ est le plus grand des minorants, donc $\inf B \leqslant \inf A$ ».
Idem pour l'inégalité $\sup A \leqslant \sup B$.

— Montrons que $\sup A$ existe.
Comme B est non vide, il existe $b_0 \in B$. On a alors avec l'hypothèse :

$$\forall\, a \in A,\ a < b_0$$

A fortiori,

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant b_0$$

Ainsi, A est majorée par b_0.
En tant que partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, cette partie A admet une borne supérieure.

— De même, on montre que B admet une borne inférieure.

— Montrons que $\sup A \leqslant \inf B$.
Reprenons une partie du raisonnement pour montrer l'existence de $\sup A$.
On a vu, que pour $b_0 \in B$ quelconque, on a

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant b_0$$

Ainsi, b_0 est un majorant de A.
Or $\sup A$ est le plus petit des majorants, donc $\sup A \leqslant b_0$.
On a donc montré que

$$\forall\, b_0 \in B, \quad \sup A \leqslant b_0$$

Ainsi, $\sup A$ est un minorant de B.
Or $\inf B$ est le plus grand des minorants, donc $\sup A \leqslant \inf B$.

Pour un exemple de parties de $\mathbb{R}$ où on a $A < B$ avec $\sup A = \inf B$, on peut prendre $A = \left]-\infty, 3\right[$ et $B = \left]3, +\infty\right[$.
Ou encore $A = \left\{\dfrac{-1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $B = \left\{\dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. On a alors $\sup A = 0$ et $\inf B = 0$.

105

Le fait que A soit non vide et majorée assure l'existence de $\sup A$.
Montrons qu'il existe un élément de A strictement positif.
Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les éléments de A sont négatifs :

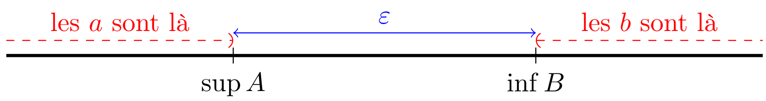
$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant 0$$

Ainsi, A est majorée par 0, or $\sup A$ est le plus petits des majorants, donc $\sup A \leqslant 0$ ».
On aurait aussi pu dire « en passant à la borne supérieure (licite), on a $\sup A \leqslant 0$ ».
Or d'après l'énoncé $\sup A > 0$, d'où la contradiction.

— Je vous laisse montrer, en vous inspirant de la preuve de l'exercice 104, que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que l'on a $\sup A \leqslant \inf B$.

— Montrons l'autre inégalité. Par l'absurde supposons que $\sup A < \inf B$.
Posons $\varepsilon = \inf B - \sup A$ de sorte que $\varepsilon > 0$.
Appliquons la $\forall$-assertion à $\dfrac{\varepsilon}{2}$.
On peut donc trouver $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $b_0 - a_0 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Or, par hypothèse de l'énoncé et par définition de $\sup A$ et $\inf B$, on a

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B, \quad a \leqslant \sup A \leqslant \inf B \leqslant b$$



Ainsi,

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B, \quad b - a \geqslant \underbrace{\inf B - \sup A}_{=\varepsilon}$$

En particulier pour $a = a_0$ et $b = b_0$, on a

$$b_0 - a_0 \geqslant \varepsilon$$

Cela contredit le fait que $b_0 - a_0 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

— **Autre preuve.**
Montrons l'inégalité $\sup A \geqslant \inf B$, en montrant que $\forall\, \varepsilon > 0,\ \inf B - \sup A \leqslant \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$.
D'après l'hypothèse, on peut trouver $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $b_0 - a_0 \leqslant \varepsilon$.
De plus, on a $\inf B - \sup A \leqslant b_0 - a_0$ (regarder le dessin ou bien utiliser que $\inf B \leqslant b_0$ et $\sup A \geqslant a_0$).
D'où $\inf B - \sup A \leqslant \varepsilon$.

Rappelons la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : & \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, \varepsilon > 0, \text{ le réel } s - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon \leqslant a \end{cases}$$

Les hypothèses entraînent que A et B possèdent des bornes inférieure et supérieure.

1. — La partie $A \cup B$ est non vide, car A est non vide.
   — Montrons que la partie $A \cup B$ est majorée.
   Soit $x \in A \cup B$.
   Comme la borne supérieure d'une partie en est un majorant, on a
   $$\forall\, a \in A,\ a \leqslant \sup A \quad \text{et} \quad \forall\, b \in B,\ b \leqslant \sup B.$$
   Comme $\sup A$ et $\sup B$ sont $\leqslant \max(\sup A, \sup B)$, on en déduit
   $$\forall\, a \in A,\ a \leqslant \max(\sup A, \sup B) \quad \text{et} \quad \forall\, b \in B,\ b \leqslant \max(\sup A, \sup B)$$
   Ainsi, x qui est dans $A \cup B$, vérifie :
   $$x \leqslant \max(\sup A, \sup B),$$
   On vient de prouver que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$.

   La partie $A \cup B$ est non vide et majorée (par $\max(\sup A, \sup B)$), donc elle admet une borne supérieure.
   Montrons $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ par caractérisation epsilonesque.
   — On a déjà montré que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$.
   — Soit $\varepsilon > 0$.
   Montrons qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $\max(\sup A, \sup B) - \varepsilon \leqslant x$.
     — **Traitons le cas** $\sup B \leqslant \sup A$**.** Dans ce cas, $\max(\sup A, \sup B) = \sup A$.
     Par caractérisation epsilonesque de la borne supérieure pour A, on peut trouver $a \in A$ tel que l'on ait l'inégalité $\sup A - \varepsilon \leqslant a$.
     A fortiori, cet élément a appartient à $A \cup B$ et vérifie $\sup A - \varepsilon \leqslant a$.
     On a donc trouvé un élément $a \in A \cup B$ tel que $\max(\sup A, \sup B) - \varepsilon \leqslant x$.
     — **L'autre cas est analogue.** Il suffit d'inverser les rôles joués par A et B.

2. Soit $x \in A \cap B$.
   Comme $x \in A$, on a $x \leqslant \sup A$.
   Comme $x \in B$, on a $x \leqslant \sup B$.
   On a donc $x \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.
   On vient de montrer $\forall x \in A \cap B,\ x \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.
   Ainsi, la partie $A \cap B$ est majorée.
   Si elle est non vide (ce que l'on ne sait pas), alors la borne supérieure existe et elle vérifie l'inégalité $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.
   Attention, on n'a pas nécessairement égalité.

3. — Montrons que $-A$ est non vide.
   Comme A est non vide, il existe $a_0 \in A$, donc $-a_0 \in -A$.
   — Montrons que $-A$ est minorée.
   Soit $b \in -A$.
   Par définition, on peut trouver $a \in A$ tel que $b = -a$.
   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$, donc $b = -a \geqslant -\sup A$.
   On a donc montré que $\forall\, b \in -A,\ b \geqslant -\sup A$.
   Donc $-A$ est minorée par $-\sup A$.

   La partie $-A$ est non vide et minorée (par $-\sup A$), donc admet une borne inférieure.
   Montrons $\inf(-A) = -\sup A$ par caractérisation epsilonesque.

— On a déjà montré que $-\sup A$ est un minorant de $-A$.

— Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $b \in -A$ tel que $b \leqslant -\sup A + \varepsilon$.
Par caractérisation epsilonesque pour la partie A, on peut trouver $a \in A$ tel que

$$\sup A - \varepsilon \leqslant a$$

En passant à l'opposé, on a

$$\underbrace{-a}_{\in -A} \leqslant -\sup A + \varepsilon,$$

En posant $b = -a$, on a réalisé le contrat.

4. — La partie $A + \lambda$ est non vide.

— Montrons que la partie $A + \lambda$ est majorée par $\sup A + \lambda$.
Soit $b \in A + \lambda$.
On peut trouver $a \in A$ tel que $b = a + \lambda$.
Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$.
On en déduit $b \leqslant \sup A + \lambda$.
On a donc montré que $\sup A + \lambda$ est un majorant de la partie $A + \lambda$.

La partie $A + \lambda$ est non vide et majorée donc admet une borne supérieure.
Montrons que $\sup(A + \lambda) = \sup A + \lambda$ par caractérisation epsilonesque.

— On a déjà montré que $\sup A + \lambda$ est un majorant de $A + \lambda$.

— Soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'il existe $b \in A + \lambda$ tel que $\sup A + \lambda - \varepsilon \leqslant b$.
Par caractérisation epsilonesque, on peut trouver $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon \leqslant a$.
En ajoutant λ, on obtient $(\sup A + \lambda) - \varepsilon \leqslant a + \lambda$.

5. — La partie $A + B$ est non vide.

— Montrons que la partie $A + B$ est majorée (par $\sup A + \sup B$).
Soit $x \in A + B$. On peut trouver $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$.
Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$.
Comme $b \in B$, on a $b \leqslant \sup B$.
On en déduit $x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$.
On a donc montré que $\sup A + \sup B$ est un majorant de la partie $A + B$.

La partie $A + B$ est non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure.
Montrons que $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ par caractérisation epsilonesque.

— On a déjà montré que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.

— Soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'il existe $x \in A + B$ tel que $\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant x$.
Par caractérisation epsilonesque appliquée à A, puis à B, on peut trouver $a \in A$ tel que $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a$ et on peut trouver $b \in B$ tel que $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant b$.
En additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant a + b$$

6. — La partie λA est non vide.

— Montrons que la partie λA est majorée (par $\lambda \sup A$).
Soit $b \in \lambda A$. On peut trouver $a \in A$ tel que $b = \lambda a$.
Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$.
En multipliant par $\lambda \geqslant 0$, on en déduit

$$\lambda a \leqslant \lambda \sup A.$$

On a donc montré que $\lambda \sup A$ est un majorant de la partie λA.

La partie λA est non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure.
Montrons que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ par caractérisation epsilonesque.

— On a déjà montré que $\lambda \sup A$ est un majorant de λA.

— Soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'il existe $x \in \lambda A$ tel que $\lambda \sup A - \varepsilon \leqslant x$.
Par caractérisation epsilonesque, comme $\lambda > 0$, on peut trouver $a \in A$ tel que $\sup A - \frac{\varepsilon}{\lambda} \leqslant a$.
En multipliant par $\lambda \geqslant 0$, on en déduit

$$\lambda \sup A - \varepsilon \leqslant \lambda a$$

Si $\lambda = 0$, on a $\lambda A = \{0\}$, donc $\sup(\lambda A) = 0$.
Si $\lambda < 0$, on peut

— utiliser le cas précédent (ou plutôt son extension naturelle aux bornes inférieures) pour montrer que $\inf(|\lambda| A) = |\lambda| \inf A$;
— puis utiliser la question 3 pour en déduire que

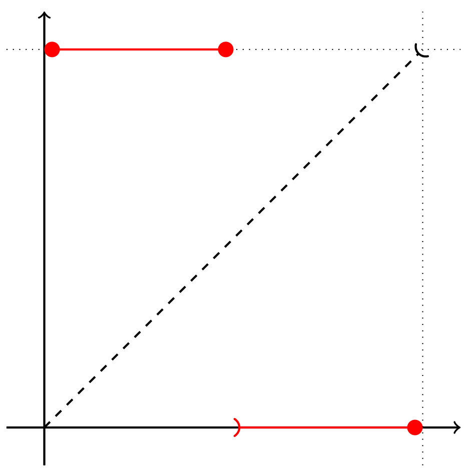
$$\sup(\lambda A) = -\inf(-\lambda A) = -\inf(|\lambda| A) = -|\lambda| \inf A = \lambda \inf A.$$

1. Soit $y \in f(E)$. On peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in E$, on a $f(x) \leqslant x$, c'est-à-dire $y \leqslant x$.
   Avant d'appliquer f, assurons-nous que x et y sont bien dans $[0,1]$. C'est bien le cas (WHY ?).
   Par croissance de f, on en déduit $f(y) \leqslant f(x)$, c'est-à-dire $f(y) \leqslant y$.
   On a donc
   $$\begin{cases} y \in [0,1] \\ f(y) \leqslant y \end{cases}$$
   D'où $y \in E$.
2. La partie E est
   — non vide (comme le codomaine de f est $[0,1]$, on a $f(1) \in [0,1]$, donc $f(1) \leqslant 1$, donc $1 \in E$)
   — et minorée par 0 (car $E \subset [0,1]$), donc il possède une borne inférieure m.

   Montrons que m appartient à $[0,1]$.
   — On a $m \leqslant 1$, car $1 \in E$ et m est un minorant de E.
   — On a $0 \leqslant m$, car 0 est un minorant de E et $m = \inf E$ (donc m est le plus grand des minorants).
3. Montrons que $f(m)$ minore E, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ f(m) \leqslant x$.
   Soit $x \in E$.
   Comme m est un minorant de E, on a $m \leqslant x$.
   Comme f est croissante, on en déduit $f(m) \leqslant f(x)$.
   Or $x \in E$, d'où $f(x) \leqslant x$.
   Par transitivité, on a $f(m) \leqslant x$.
   On a donc montré $\forall x \in E,\ f(m) \leqslant x$.
   Donc $f(m)$ minore E.
4. Montrons que $m \in E$, c'est-à-dire $\begin{cases} m \in [0,1] \\ f(m) \leqslant m \end{cases}$.
   On a déjà montré que $m \in [0,1]$.
   Comme $f(m)$ est un minorant de E et que $m = \inf E$ est le plus grand des minorants de E, on en déduit $f(m) \leqslant m$.

   Montrons que $f(m) \in E$.
   On sait que $m \in E$ et $f(E) \subset E$, donc $f(m) \in E$.
5. On dispose donc de deux minorants de E, à savoir m et $f(m)$, qui appartiennent à E.
   Ce sont donc deux minimums de E, donc ils sont égaux.

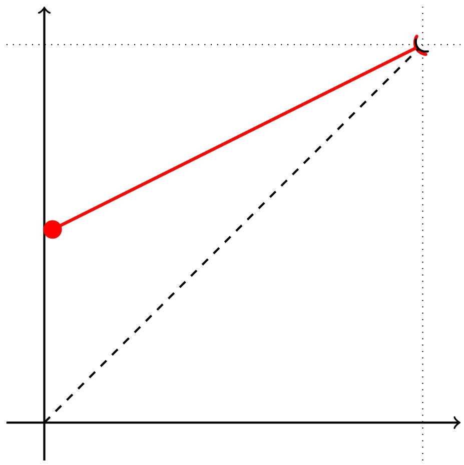
Le résultat devient faux avec une fonction décroissante (prendre la fonction qui est constante égale à 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et constante égale à 0 sur $]\frac{1}{2}, 1]$.



Le résultat devient faux sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$.
Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} [0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & \frac{1+x}{2} \end{array}$$

Elle est croissante, mais n'admet pas de point fixe.



— Puisque A est non vide, on peut trouver $a_0 \in A$.
La partie
$$\Big\{ |x-a|\,,\ a \in A \Big\}$$
est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient $|x-a_0|$) et minorée (par 0), donc elle admet une borne inférieure.

— Montrons que
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad -|x-y| \ \leqslant\ d(x,A) - d(y,A) \ \leqslant\ |x-y|.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons l'inégalité de droite.
D'après l'inégalité triangulaire, on a
$$\forall\, a \in A, \quad |x-a| \ \leqslant\ |x-y| + |y-a|$$
Par définition de la borne inférieure, on a $d(x,A) \leqslant |x-a|$.
Donc
$$\forall\, a \in A, \quad d(x,A) \leqslant |x-y| + |y-a|$$
On a donc
$$\forall\, a \in A, \quad d(x,A) - |x-y| \ \leqslant\ |y-a|$$
Ainsi, $d(x,A) - |x-y|$ est un minorant de la partie $\Big\{ |y-a|\,,\ a \in A \Big\}$ dont la borne inférieure est $d(y,A)$. Ainsi
$$d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A)$$
On aurait aussi pu dire : Par passage à la borne inférieure dans les inégalités larges, on en déduit
$$d(x,A) - |x-y| \ \leqslant\ \inf_{a \in A} |y-a| \ =\ d(y,A)$$

On a donc montré l'inégalité de droite
$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant |x-y|$$

Montrons maintenant l'inégalité de gauche à l'aide de l'inégalité de droite.
On vient de montrer que
$$\forall\, x', y' \in \mathbb{R}, \quad d(x',A) - d(y',A) \leqslant |x'-y'|$$
En appliquant cela à $x' = y$ et $y' = x$, on a
$$d(y,A) - d(x,A) \leqslant |y-x|$$
Multiplions par -1, d'où
$$d(x,A) - d(y,A) \geqslant -\,|y-x|$$
Comme $|y-x| = |x-y|$, on obtient l'inégalité convoitée.

110

La partie $A = \Big\{ f(x),\ x \in X \Big\}$ est

— non vide : comme X est non vide, il existe $x_0 \in X$. Donc $f(x_0) \in A$;

— majorée : car f est majorée

Ainsi, A possède une borne supérieure.
Autrement dit, la fonction f admet une borne supérieure.
Idem pour g et $f + g$.

On a

$$\forall\, x \in X, \qquad \begin{cases} f(x) \leqslant \sup\limits_X f \\ g(x) \leqslant \sup\limits_X g \end{cases}$$

Par somme, on a, pour tout $x \in X$, l'inégalité $f(x) + g(x) \leqslant \sup\limits_X f + \sup\limits_X g$.
Ce qui s'écrit encore

$$\forall\, x \in X, \quad (f+g)(x) \leqslant \sup_X f + \sup_X g$$

Ainsi, $\sup\limits_X f + \sup\limits_X g$ est un majorant de la partie $\Big\{ (f+g)(x),\ x \in X \Big\}$.
Donc, sa borne supérieure, qui est le plus petit des majorants, est inférieure à ce majorant :

$$\sup_X (f+g) \leqslant \sup_X f + \sup_X g$$

112

Comme la suite tend vers 0 tout en oscillant, il est moral de vouloir s'intéresser aux premiers termes.
On a
$$\forall n \geqslant 4, \quad \frac{-1}{4} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{4}$$

— On a $\dfrac{\cos 1}{1} \approx \dfrac{1}{2}$ car $1 \approx \dfrac{\pi}{3}$. Mieux, on a $\dfrac{1}{2} < \cos 1$, car $\dfrac{\pi}{3} > 1$. Donc $\dfrac{1}{4} < \dfrac{\cos 1}{1}$.
— On a $\dfrac{\cos 2}{2} \approx \dfrac{-1}{4}$ car $2 \approx \dfrac{2\pi}{3}$. Mieux, on a $2 < \dfrac{2\pi}{3}$, d'où $-\dfrac{1}{2} < \cos 2$. D'où $-\dfrac{1}{4} < \dfrac{\cos 2}{2}$.
— On a $\dfrac{\cos 3}{3} \approx \dfrac{-1}{3}$ car $3 \approx \dfrac{3\pi}{3}$.
Mieux, comme $\dfrac{3\pi}{4} < 3$, on a $\cos 3 < \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, d'où $\dfrac{\cos 3}{3} < \dfrac{-1}{2\sqrt{3}} < \dfrac{-1}{4}$.

Bilan :
$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos n}{n} = \frac{\cos 1}{1} \qquad \text{et} \qquad \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos n}{n} = \frac{\cos 3}{3}$$

113

Notons $s = \sup A$.
On raisonne par l'absurde, et on suppose que $]s-\varepsilon, s[\cap A$ est fini, disons $]s-\varepsilon, s[\cap A = \{a_1, \dots, a_p\}$.
Quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.
Alors $s - \varepsilon < a_p < s$. On pose $\delta = s - a_p$ qui est donc dans $]0, \varepsilon[$.
Par caractérisation epsilonesque de la borne supérieure, il existe $\alpha \in A$ tel que $s - \delta < \alpha \leqslant s$.
Par définition de δ, on a $\alpha \notin \{a_1, \dots, a_p\}$.
Par ailleurs, on a $\alpha \in \,]s - \varepsilon, s[\, \cap A$. En effet, par construction on a $\alpha \in A$ et on a les inégalités :

$$s - \varepsilon < s - \delta < \alpha < s$$

(la dernière inégalité est stricte car $s \notin A$).
On en déduit que $\alpha \in \,]s - \varepsilon, s[\, \cap A$ et que $\alpha \notin \{a_1, \dots, a_p\}$.
Cela contredit l'égalité $]s - \varepsilon, s[\, \cap A = \{a_1, \dots, a_p\}$.

(i)

(ii) Par définition, on a

$$\begin{cases} \lfloor x\rfloor & \leqslant & x & < & \lfloor x\rfloor+1 \\ \lfloor y\rfloor & \leqslant & x & < & \lfloor y\rfloor+1 \end{cases}$$

Par somme, on en déduit

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor \;\leqslant\; x+y \;<\; \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2$$

Disjonction de cas.

Cas $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor \leqslant x+y < \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$ Dans ce cas $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$.
Cas $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1 \leqslant x+y < \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2$ Dans ce cas $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$.

Dans les deux cas, on a donc :

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

(iii)

(iv) Il s'agit de montrer que la partie entière de $\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ vaut $\lfloor x\rfloor$.
C'est-à-dire, qu'il s'agit de montrer que

$$\lfloor x\rfloor \;\leqslant\; \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \;<\; \lfloor x\rfloor+1$$

Début de la preuve.
Par définition de $\lfloor x\rfloor$ et en multipliant par n, on obtient :

$$n\lfloor x\rfloor \;\leqslant\; nx \;<\; n(\lfloor x\rfloor+1)$$

On procède maintenant en deux temps.
• En appliquant la fonction partie entière qui est croissante sur l'inégalité de gauche, on obtient

$$n\lfloor x\rfloor \;\leqslant\; \lfloor nx\rfloor$$

• En combinant l'inégalité $\lfloor nx\rfloor \leqslant nx$ avec l'inégalité stricte de droite $nx < n(\lfloor x\rfloor+1)$, on obtient par transitivité :

$$\lfloor nx\rfloor < n(\lfloor x\rfloor+1)$$

On vient donc de montrer que

$$n\lfloor x\rfloor \;\leqslant\; \lfloor nx\rfloor \;<\; n(\lfloor x\rfloor+1)$$

En divisant par n, on a donc

$$\lfloor x\rfloor \;\leqslant\; \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \;<\; \lfloor x\rfloor+1$$

On vient d'obtenir un encadrement du réel $\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ par deux entiers consécutifs (avec les inégalités strictes et larges au bon endroit), à savoir l'entier $\lfloor x\rfloor$ et l'entier suivant.
On a donc :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \right\rfloor \;=\; \lfloor x\rfloor$$

Autre solution.
On pose $x = p_x + d_x$ avec $p_x = \lfloor x\rfloor$ et $d_x = x - \lfloor x\rfloor$.
Donc $p_x \in \mathbb{Z}$ et $d_x \in [0,1[$.
On a alors $nx = np_x + nd_x$. Comme $np_x \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor nx\rfloor = np_x + \lfloor nd_x\rfloor$.
Ainsi

$$\frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \;=\; p_x + \frac{\lfloor nd_x\rfloor}{n}$$

L'égalité demandée revient à montrer que la partie entière de $\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ vaut $p_x = \lfloor x\rfloor$.
Il suffit donc de montrer que $\dfrac{\lfloor nd_x\rfloor}{n} \in [0,1[$.
Allons-y.
On a $0 \leqslant d_x < 1$, d'où $0 \leqslant nd_x < n$, d'où $0 \leqslant \lfloor nd_x\rfloor < n$. D'où le résultat en divisant par n.

(v)

(vi) Posons $n = \lfloor x \rfloor$ et $a = x - \lfloor x \rfloor$, de sorte que $x = n + a$.
On va utiliser à deux reprises la propriété suivante :

$$\forall\, p \in \mathbb{Z},\ \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor p + y \rfloor \ = \ p + \lfloor y \rfloor$$

On a :

$$\begin{aligned}
\lfloor 2x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor &= \lfloor 2n + 2a \rfloor - \left\lfloor n + a + \frac{1}{2} \right\rfloor - n \\
&= 2n + \lfloor 2a \rfloor - \left(n + \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) - n \qquad 2n \text{ et } n \text{ sont des entiers} \\
&= \lfloor 2a \rfloor - \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor .
\end{aligned}$$

Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 Supposons $a \in [0, \frac{1}{2}[$.
Alors $2a \in [0, 1[$ et $a + \frac{1}{2} \in [0, 1[$ donc $\lfloor 2a \rfloor - \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = 0 - 0 = 0$.

Cas 2 Supposons $a \in [\frac{1}{2}, 1[$.
Alors $2a \in [1, 2[$ et $a + \frac{1}{2} \in [1, 2[$ donc $\lfloor 2a \rfloor - \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = 1 - 1 = 0$.

BILAN : On a

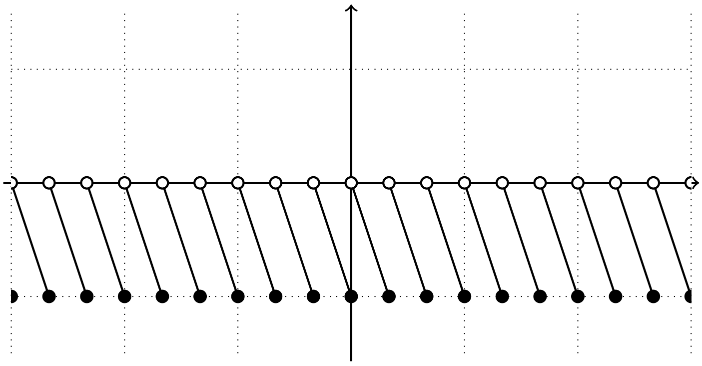
$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

115

— Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x+\frac{1}{3}) &= \left\lfloor 3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\rfloor - 3\left(x+\frac{1}{3}\right) \\ &= \lfloor 3x+1 \rfloor - 3x - 1 \\ &= \lfloor 3x \rfloor + 1 - 3x - 1 \\ &= \lfloor 3x \rfloor - 3x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

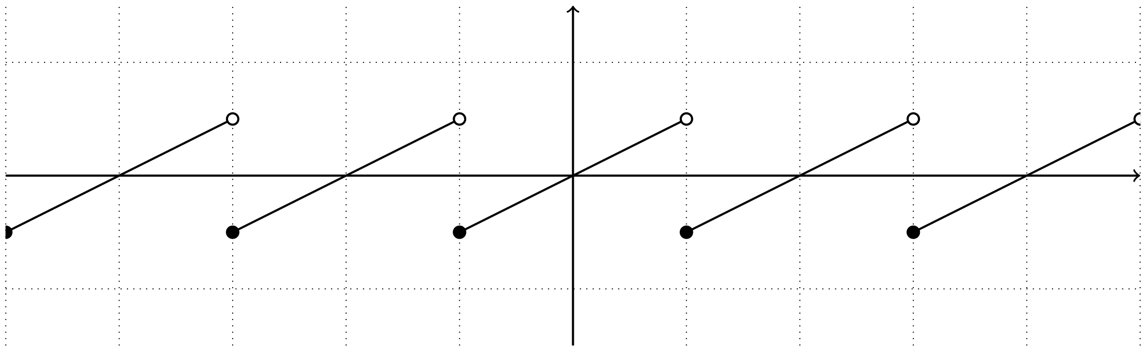
Cela montre que la fonction $f : x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ est $\frac{1}{3}$-périodique.



— Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} g(x+2) &= \frac{x+2}{2} - \left\lfloor \frac{(x+2)+1}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \left\lfloor \frac{x+1}{2} + 1 \right\rfloor \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1 \\ &= \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ est 2-périodique.



116

On distingue 2 cas.

— Supposons $a \in \mathbb{Z}$.
La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \llbracket a, \lfloor b \rfloor \rrbracket$ possède alors $\lfloor b \rfloor - a + 1$ éléments.
Par ailleurs, dans ce cas, $1 - a \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor 1 - a \rfloor = 1 - a$, et on a bien

$$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor \; = \; \lfloor b \rfloor + 1 - a.$$

— Supposons $a \notin \mathbb{Z}$.
La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \llbracket \lfloor a \rfloor + 1, \; \lfloor b \rfloor \rrbracket$ possède alors $\lfloor b \rfloor - (\lfloor a \rfloor + 1) + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ éléments.
Par ailleurs, dans ce cas, $\lfloor 1 - a \rfloor = - \lfloor a \rfloor$.
En effet, on a, par définition de la partie entière, l'encadrement $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$, donc $- \lfloor a \rfloor < 1 - a < 1 - \lfloor a \rfloor$.
Ainsi, on a bien

$$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor \; = \; \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor .$$

118

On procède en deux étapes.

Cas particulier. On suppose $x \in [0,1[$.

Comme $[0,1[= \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, on peut trouver $k_x \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in \left[\frac{k_x}{n}, \frac{k_x+1}{n}\right[$.

On a alors $nx \in [k_x, k_x+1[$, donc $\lfloor nx \rfloor = k_x$.

Examinons les termes du membre gauche de l'égalité.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a

$$\underbrace{\frac{k_x+k}{n}}_{\in[0,2[} \leqslant x + \frac{k}{n} < \underbrace{\frac{k_x+k+1}{n}}_{\in]0,2]}$$

donc

$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{k_x+k+1}{n} \leqslant 1 \text{ càd } k_x + k \leqslant n-1 \text{ càd } k_x + k < n \text{ càd } k < n - k_x \\ 1 & \text{si } \frac{k_x+k}{n} \geqslant 1 \text{ càd } k \geqslant n - k_x \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n-k_x} 0 + \sum_{k=n-k_x}^{n-1} 1 \\ &= (n-1) - (n-k_x) + 1 \\ &= k_x \\ &= \lfloor nx \rfloor . \end{aligned}$$

Cas général. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque que l'on écrit $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$.

On pose $p = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\xi = x - p \in [0,1[$ de sorte que $x = p + \xi$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor p + \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(p + \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor \right) \quad \text{(car } p \in \mathbb{Z}) \\ &= pn + \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor \\ &= pn + \lfloor n\xi \rfloor \quad \text{(d'après le cas particulier)} \\ &= \lfloor n(p+\xi) \rfloor \\ &= \lfloor nx \rfloor \end{aligned}$$

Autre façon de présenter l'argument "en deux étapes".

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque que l'on écrit $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$.

On pose $p = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\xi = x - p \in [0,1[$ de sorte que $x = p + \xi$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor &\iff \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor p + \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor n(p+\xi) \rfloor \\ &\iff np + \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor = np + \lfloor n\xi \rfloor \\ &\iff \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor n\xi \rfloor \end{aligned}$$

On constate que l'assertion finale correspond à l'égalité de l'énoncé avec $\xi \in [0, 1[$.
Ainsi, si on arrive à démontrer l'égalité pour un réel de $[0, 1[$, on l'aura démontrée pour un réel quelconque d'après les équivalences précédentes.
Sans perte de généralités, on peut donc s'attaquer à montrer cette égalité pour un $x \in [0, 1[$. C'est ce qui a été fait dans la première étape.

Autre preuve, élégante, mais un chouilla astucieuse

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$.

— Montrons que cette fonction (qui dépend de n) est $\frac{1}{n}$-périodique.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f\big(x + \frac{1}{n}\big) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \big(x + \frac{1}{n}\big) + \frac{k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor n\big(x + \frac{1}{n}\big) \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor - \underbrace{\lfloor nx + 1 \rfloor}_{\lfloor nx \rfloor + 1} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor + \underbrace{\lfloor x + 1 \rfloor}_{\text{terme pour } j = n} \right) - \big(\lfloor nx \rfloor + 1\big) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 \right) - \big(\lfloor nx \rfloor + 1\big) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor \right) - \lfloor nx \rfloor \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

— Montrons que f est nulle sur $[0, \frac{1}{n}[$.
Soit $x \in [0, \frac{1}{n}[$.
Alors $0 \leqslant nx < 1$. Donc $\lfloor nx \rfloor = 0$.
Occupons-nous de la somme. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On a

$$\frac{k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$$

Comme $k \geqslant 0$ et $k \leqslant n - 1$, on a :

$$\frac{0}{n} \leqslant \frac{k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leqslant \frac{n-1+1}{n}$$

d'où

$$0 \leqslant x + \frac{k}{n} < 1$$

Ainsi, $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = 0$.
Par somme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0$.

— Par $\frac{1}{n}$-périodicité, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier !

novembre 2023

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \\ \text{Soit } x \in [0,1[. \\ \text{Mq } \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.\end{array}}$$

En discutant avec Ethan, il me vient la preuve suivante.

Rmq 1 On a $x \in [0,1[$
et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{k}{n} \in [0,1[$
D'où $\forall k$, $x + \frac{k}{n} \in [0,2[$
D'où $\forall k$, $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor \in \{0,1\}$.

Rmq 2 Pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, on a :

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{k}{n} \leqslant \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

Par somme, (strict & large) $x + \frac{k}{n} < 1$

Ainsi pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = 0$
Par ailleurs $\lfloor nx \rfloor = 0$.

D'où l'égalité dans ce cas.

Rmq 3 Soit $x \notin [0, \frac{1}{n}[$ càd $x \geqslant \frac{1}{n}$

Alors il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\lfloor x + \frac{i}{n} \rfloor = 1$.
(Remarquons que $i = n-1$ fonctionne ;
en effet pour ce i, on a $\frac{i}{n} = 1 - \frac{1}{n}$
d'où $x + \frac{i}{n} \geqslant 1$ d'où $\lfloor x + \frac{i}{n} \rfloor = 1$ d'après rmq1

Il est donc licite de vouloir chercher ce plus petit entier i.

Rmq 4 Soit $x \geqslant \frac{1}{n}$.

Le plus petit entier $i \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\lfloor x + \frac{i}{n} \rfloor = 1$ vaut $n - \lfloor nx \rfloor$.

En effet, un entier $i \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\lfloor x + \frac{i}{n} \rfloor = 1$ est caractérisé par l'inégalité $1 \leqslant x + \frac{i}{n}$ (en effet, $x + \frac{i}{n} < 2$ est tjs vraie, cf Rmq 1)

De plus, on a :

$$1 \leqslant x + \frac{i}{n} \iff n - i \leqslant nx$$

Chercher le plus petit i tq ... revient à chercher le plus grand $n-i$ tq $n - i \leqslant nx$

Il s'agit de $n - i = \lfloor nx \rfloor$.

Bilan le plus petit entier $i \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\lfloor x + \frac{i}{n} \rfloor = 1$ vaut $n - \lfloor nx \rfloor$.

Pour alléger, notons e_x l'entier $n - \lfloor nx \rfloor$.

Le membre gauche vaut $\sum_{k=0}^{e_x - 1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor + \sum_{k=e_x}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$

càd vaut $\sum_{k=0}^{e_x-1} 0 + \sum_{k=e_x}^{n-1} 1$

càd vaut $n - e_x$

càd vaut $\lfloor nx \rfloor$ CQFD !!

120

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a l'égalité

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 &= n+2\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}+n+1 \\ &= 2n+1+2\sqrt{n^2+n}.\end{aligned}$$

L'encadrement $n^2 \leqslant n^2+n < n^2+n+\frac{1}{4} = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ entraîne alors

$$4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2.$$

Soit maintenant $p = \left\lfloor \sqrt{4n+1} \right\rfloor \in \mathbb{N}$.
On a alors $p+1 > \sqrt{4n+1}$, donc $(p+1)^2 > 4n+1$.
En promouvant cette inégalité stricte entre entiers en une inégalité large, on a $(p+1)^2 \geqslant 4n+2$, ce qui prouve

$$p^2 \leqslant 4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2 \leqslant (p+1)^2.$$

En fait, la dernière inégalité est même être stricte car un carré parfait ne s'écrit jamais sous la forme $4n+2$ (il n'est jamais congru à 2 modulo 4). En effet, si un nombre pair est un carré parfait, il doit être le carré d'un nombre pair, et donc être lui-même un multiple de 4.
Par stricte croissance de la fonction racine carrée, on en déduit

$$p \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} < p+1,$$

ce qui montre

$$p = \left\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor.$$

121

On peut poser $\alpha = \text{Arcsin}(\frac{1}{2023})$.
En faisant un cercle trigo, on voit qu'il s'agit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi \leqslant \sqrt{n} \leqslant \frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi$.
D'où en élevant au carré

$$\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi\right)^2}_{g_k} \leqslant n \leqslant \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi\right)^2}_{d_k}$$

L'expression $d_k - g_k = 2\pi\alpha(2k+1)$ tend vers $+\infty$.
Il existe donc un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_{k_0} - g_{k_0} \geqslant 2$ (en fait, 1 devrait suffire).
Comme on a $g_{k_0} \leqslant n \leqslant d_{k_0}$, il suffit de poser $n = \lfloor g_{k_0} \rfloor + 1$ (autre candidat, $n = \lfloor d_{k_0} \rfloor$), pour obtenir ce qu'il faut.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

pi = np.pi
cos = np.cos
sqrt = np.sqrt

alpha = np.arcsin(1/2023)
k = 0
while 2*pi*alpha*(2*k+1) < 1:
    k += 1

n = int((pi/2 - alpha + k*pi)**2) + 1

X = np.arange(n-2, n+5, 0.01)
Y = [abs(cos(sqrt(x))) for x in X]
plt.plot(X,Y)
X0 = [n, n]
Y0 = [0, 0.001]
plt.plot(X0,Y0, "-r")
X1 = [n-2, n+5]
Y1 = [1/2023, 1/2023]
plt.plot(X1,Y1, "-g")
plt.show()
```

125

Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Il s'agit de montrer qu'il existe $S \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\begin{cases} S \text{ est un majorant de } \mathscr{A} \\ S \text{ est plus petit que tout majorant de } \mathscr{A} \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} \text{i) } \forall\, A \in \mathscr{A},\ A \subset S \\ \text{ii) } \forall\, M \in \text{Majorants}(\mathscr{A}),\ S \subset M \end{cases}$

Posons $S = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{A}} B$ et montrons i) et ii).

- i) Soit $A \in \mathscr{A}$. Alors $A \subset \bigcup\limits_{B \in \mathscr{A}} B$. Donc $A \subset S$.
- ii) Soit $M \in \text{Majorants}(\mathscr{A})$, c'est-à-dire $\forall\, A \in \mathscr{A},\ A \subset M$.
  On a alors $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A \subset M$ (WHY ?), c'est-à-dire $S \in M$.

  Preuve du WHY.
  Soit x à gauche. Alors il existe $A_0 \in \mathscr{A}$ tel que $x \in A_0$. Comme $A_0 \subset M$, on a $x \in M$. Donc x est à droite.

Avez-vous une idée pour la borne inférieure ? !

127

Notons $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que A admette une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
Posons $s = \sup A$ qui est donc un élément de $\mathbb{Q}$.
On remarque que $\sqrt{2}$ est un majorant de A (en effet, $\forall\, x \in A,\ x \leqslant \sqrt{2}$).
Donc $s \leqslant \sqrt{2}$.
Comme $s \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on a même $s < \sqrt{2}$.
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (tout intervalle non trivial contient un rationnel), on peut trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $s < r < \sqrt{2}$.
On a alors $r \in \mathbb{Q}$ et $r^2 \leqslant 2$, donc $r \in A$.
De plus, $r > s = \sup A$.
On obtient donc une contraction.

1. — La partie A est non vide (car contient u_0).
   — La partie est minorée par 0 ; en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t - \lfloor t \rfloor \geqslant 0$ d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
   Ainsi la partie A admet une borne inférieure réelle.
2. Ici, on suppose β rationnel. Déterminer $\inf A$.
   On va montrer que la borne inférieure est atteinte autrement dit que $\inf A = \min A$.
   Reste donc à déterminer ce minimum. Montrons que $\min A = 0$.
   - Il est clair que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 0$.
     Donc 0 est un minorant de A.
   - Montrons que $\min A = 0$.
     Comme $\beta \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\beta = \frac{p}{q}$.
     Ainsi $q\beta \in \mathbb{Z}$, d'où $\beta q = \lfloor \beta q \rfloor$, d'où $u_q = 0$.
     Donc $0 \in A$.

   Bilan : $\inf A = 0$.
3. On a
$$u_n = n\frac{(\beta n)^2 - \lfloor \beta n \rfloor^2}{\beta n + \lfloor \beta n \rfloor}.$$
   - Le numérateur est un entier (car $\beta^2 \in \mathbb{Z}$), strictement positif (car $u_n > 0$), donc le numérateur est supérieur ou égal à 1 :
$$(\beta n)^2 - \lfloor \beta n \rfloor^2 \geqslant 1.$$
   - Le dénominateur est encadré de la façon suivante :
$$0 < \beta n + \lfloor \beta n \rfloor \leqslant 2\beta n.$$
     L'inégalité de gauche stricte est assurée par le fait que $\beta > 0$ et $n > 0$, donc $\beta n > 0$ d'où $\lfloor \beta n \rfloor \geqslant 0$.
     L'inégalité de droite résulte de l'inégalité $\forall\, t \in \mathbb{R}, \lfloor t \rfloor \leqslant t$.
     En passant à l'inverse dans l'encadrement du dénominateur, on a :
$$\frac{1}{\beta n + \lfloor \beta n \rfloor} \geqslant \frac{1}{2\beta n}.$$
   - Par produit d'inégalités positives, on a
$$u_n \geqslant \frac{1}{2\beta}.$$
     Bilan : on a montré $u_n \geqslant \dfrac{1}{2\beta}$.
4. (a) On procède par récurrence.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{H}_k$: « $(\beta y_k)^2 - x_k^2 = 1$ ».

   Initialisation.
   On a $(\beta y_0)^2 - x_0^2 = \beta^2 \times 1^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$.
   D'où $\mathcal{H}_0$.

   Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_k$.
   Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.
   On a :
$$\begin{aligned}(\beta y_{k+1})^2 - x_{k+1}^2 &= \beta^2(2x_k + 3y_k)^2 - (3x_k + 4y_k)^2 \\ &= 2(4x_k^2 + 6x_k y_k + 9y_k^2) - (9x_k^2 + 12x_k y_k + 16y_k^2) \\ &= 2y_k^2 - x_k^2 \\ &= (\beta y_k)^2 - x_k^2 \\ &= 1 \qquad\qquad \text{d'après } \mathcal{H}_k.\end{aligned}$$
   D'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

On a donc montré $\forall k \in \mathbb{N},\ (\beta y_k)^2 - x_k^2 = 1$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
D'après la question 4b, on a $(\beta y_k)^2 - x_k^2 = 1$, d'où $\beta y_k = \pm\sqrt{x_k^2+1}$. Comme βy_k est positif, on a $\beta y_k = \sqrt{x_k^2+1}$.
Or $x_k > 0$ donc
$$x_k^2 \leqslant x_k^2 + 1 < x_k^2 + 2x_k + 1 = (x_k+1)^2$$
et ainsi, par stricte croissance de la fonction racine carrée, on a :
$$x_k \leqslant \sqrt{x_k^2+1} < x_k + 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_k \leqslant \beta y_k < x_k + 1.$$
Comme $x_k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\lfloor \beta y_k \rfloor = x_k$.

5. (a) On utilise toujours l'espèce de « quantité conjuguée », comme dans la question 3 :
$$a_k = y_k\big(\beta y_k - \lfloor \beta y_k \rfloor\big) = y_k \frac{(\beta y_k)^2 - \lfloor \beta y_k \rfloor^2}{\beta y_k + \lfloor \beta y_k \rfloor}.$$
Or, d'après 4a et 4b, on a $(\beta y_k)^2 - \lfloor \beta y_k \rfloor^2 = 1$. D'où
$$a_k = y_k \frac{1}{\beta y_k + \lfloor \beta y_k \rfloor}$$

(b) Soit $t \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. On a la chaîne d'équivalences :
$$\begin{aligned}
\frac{t}{t+\lfloor t \rfloor} \leqslant \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2t-1}\Big) &\iff \frac{1}{t+\lfloor t \rfloor} \leqslant \frac{1}{2t}\,\frac{(2t-1)\ +\ 1}{2t-1} && \text{car } t > 0\\
&\iff \frac{1}{t+\lfloor t \rfloor} \leqslant \frac{1}{2t-1}\\
&\iff t + \lfloor t \rfloor \geqslant 2t - 1 && \text{décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\\
&\iff \lfloor t \rfloor \geqslant t - 1.
\end{aligned}$$
L'assertion finale est vraie, donc l'assertion initiale aussi.
D'où
$$\forall t \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[, \quad \frac{t}{t+\lfloor t \rfloor} \leqslant \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2t-1}\Big)$$

(c) Appliquons la question précédente 5b à $t = \beta y_k$ qui est bien dans $]0,+\infty[$ (en effet, $y_k \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > 0$.).
On en déduit
$$\frac{\beta y_k}{\beta y_k + \lfloor \beta y_k \rfloor} \leqslant \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2\beta y_k - 1}\Big).$$
En multipliant par $\dfrac{1}{\beta} > 0$, on a :
$$a_k \leqslant \frac{1}{2\beta}\Big(1 + \frac{1}{2\beta y_k - 1}\Big).$$
Comme $y_k \geqslant k$, on a $\dfrac{1}{2\beta y_k - 1} \leqslant \dfrac{1}{2\beta k - 1}$.
Par transitivité, on obtient $a_k \leqslant \dfrac{1}{2\beta}\Big(1 + \dfrac{1}{2\beta k - 1}\Big)$.

6. Utilisons la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure.

— D'après la question 3, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \frac{1}{2\beta}.$$
Donc $\dfrac{1}{2\beta}$ est un minorant de A.

— Soit $\varepsilon > 0$.

Montrons qu'il existe $\alpha \in A$ tel que $\alpha < \dfrac{1}{2\beta} + \varepsilon$.

On va chercher α comme étant un réel a_k avec $k \in \mathbb{N}^*$ bien choisi.

On cherche donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_k < \dfrac{1}{2\beta} + \varepsilon$.

D'après la question précédente 5c qui donne une minoration de a_k, il *suffit* de trouver $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{2\beta}\left(1 + \frac{1}{2\beta k - 1}\right) < \frac{1}{2\beta} + \varepsilon$$

c'est-à-dire tel que $\dfrac{1}{2\beta}\dfrac{1}{2\beta k - 1} < \varepsilon$, c'est-à-dire tel que $k > \dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{1}{2\beta\varepsilon} + 1\right)$.

Il ne reste plus qu'à poser $k = \left\lfloor \dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{1}{2\beta\varepsilon} + 1\right) \right\rfloor + 1$ pour obtenir l'inégalité précédente tant convoitée !

On a donc montré qu'il existe $\alpha \in A$, à savoir $\alpha = a_k$ avec $k = \left\lfloor \dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{1}{2\beta\varepsilon} + 1\right) \right\rfloor + 1$ tel que $\alpha < \dfrac{1}{2\beta} + \varepsilon$.

Bilan global : $\inf A = \dfrac{1}{2\beta}$.

Et un petit cadeau étoilé :