Matrices
Systèmes linéaires

09c-Matrices_Systemes.pdf, 6 novembre 2024, 21:12

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p, q, r sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

I. Matrices rectangulaires

1 **Définition.**
Une *matrice* à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une *famille* d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
Une telle matrice est dite de *taille* (n, p).

- Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une matrice. Il est d'usage de ranger cette collection de a_{ij} dans un tableau :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

  — $a_{i,j}$ est le coefficient de A d'indice (i, j), c'est le coefficient de A situé à la ligne i et la colonne j. Ce coefficient sera souvent noté, en PCSI 3, $\mathrm{coeff}_{i,j}(A)$.

  — La $j^{\text{ème}}$ colonne de A, notée $\mathrm{Col}_j(A)$, est la matrice colonne $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$.

  — La $i^{\text{ème}}$ ligne de A, notée $\mathrm{Ligne}_i(A)$, est la matrice ligne $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix}$.

- L'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

  — Pour $n = p$, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ se note plutôt $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: c'est l'ensemble des matrices carrées de taille n.

  — Pour $p = 1$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices colonnes de taille n.

  — Pour $n = 1$, $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices lignes de taille p.

- La matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls est **la** matrice nulle.
  Elle est notée $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, voire $0_{n,p}$.

Terminologie/Notation. L'usage veut que l'on utilise le plus possible la lettre i pour les indices de lignes et j pour les indices de colonnes.
Si M est une matrice, le coefficient d'indice (i, j) est noté sans ambiguïté :

$$\mathrm{coeff}_{i,j}(M) \qquad\qquad M_{i,j}$$

Souvent, on nomme avec une lettre minuscule le coefficient d'indice (i, j), autrement dit, si M est la matrice, il arrive de désigner par $m_{i,j}$ son coefficient d'indice (i, j) de manière un peu abusive. Rigoureusement, il faudrait écrire :

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ cette matrice M.

Cela se transforme souvent en :

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2 **Définition (matrice identité).**
La matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients sont nuls est appelée la matrice identité et est notée I_n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{autrement dit} \quad \forall\, i,j \in [\![1,n]\!], \quad \text{coeff}_{i,j}(I_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Exemples de matrices.**
Soit A la matrice carrée de taille n ayant des α sur la diagonale, des β sur la sur-diagonale et des 0 ailleurs :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \beta \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{autrement dit} \quad \forall\, i,j \in [\![1,n]\!], \quad \text{coeff}_{i,j}(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si } i=j \\ \beta & \text{si } \ldots\ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P la matrice carrée de taille $n+1$, ayant dans son triangle inférieur le triangle de Pascal. On a

$$P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \text{autrement dit} \quad \forall\, i,j \in [\![1,n+1]\!], \quad \text{coeff}_{i,j}(P) = \begin{cases} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Deux relations tautologiques.**
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a

$$\text{coeff}_{i,j}(M) = \text{coeff}_{\mathbf{1},j}\big(\text{Ligne}_i(M)\big) \qquad \text{et} \qquad \text{coeff}_{i,j}(M) = \text{coeff}_{i,\mathbf{1}}\big(\text{Col}_j(M)\big)$$

3 **Fait.**

— Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même taille, et les mêmes coefficients.

— Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même taille, et les mêmes lignes.

— Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même taille, et les mêmes colonnes.

Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a les équivalences :

- $A = B \iff \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad \text{coeff}_{i,j}(A) = \text{coeff}_{i,j}(B)$
- $A = B \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \text{Ligne}_i(A) = \text{Ligne}_i(B)$
- $A = B \iff \forall\, j \in [\![1,p]\!], \quad \text{Col}_j(A) = \text{Col}_j(B)$

4 **Définition (opérations sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)**
L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est muni de deux lois, une loi interne $+$ et une loi externe $\cdot$

• **Loi « plus ».** Pour $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $A+B$ est définie par

$$\operatorname{coeff}_{i,j}(A+B) \;=\; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

visuellement

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{bmatrix}$$

• **Loi « point ».** Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $\lambda \cdot A$ est définie par

$$\operatorname{coeff}_{i,j}(\lambda \cdot A) \;=\; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

visuellement

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{bmatrix}$$

5 **Définition (combinaison linéaire).**

— Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices.
Une combinaison linéaire de A et B est une matrice de la forme $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$, où λ et μ sont des scalaires.

— Soit $M_1, \dots, M_s \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices.
Une combinaison linéaire de $M_1, \dots, M_s$ est une matrice de la forme $\lambda_1 \cdot M_1 + \cdots + \lambda_s \cdot M_s$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des scalaires.

6 **Définition (matrices élémentaires).**
Une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est *élémentaire* lorsqu'elle contient un seul coefficient non nul, qui vaut 1.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
Lorsque la taille est sous-entendue, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire avec un 1 en position (i,j) et des 0 ailleurs (on la note aussi $E_{i,j}^{(n,p)}$).

$$E_{ij} \;=$$

Autrement dit,

$$\forall k \in [\![\dots]\!], \quad \forall \ell \in [\![\dots]\!], \quad \operatorname{coeff}_{k,\ell}(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec le symbole de Kronecker, on a ...

7 **Fait.** Toute matrice est combinaison linéaire des matrices élémentaires, et l'écriture est unique. Précisément, pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

c'est-à-dire, avec le symbole Σ

$$A = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

- **Exemple.** Reprenons la matrice P du triangle de Pascal de taille $n+1$. Elle s'écrit

$$P = \sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} \binom{i-1}{j-1} E_{i,j} = \sum_{j\leqslant i} \binom{i-1}{j-1} E_{i,j}$$

8 **Question.** On note $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Montrer que M est combinaison linéaire des matrices $E_{1,1}$, $E_{2,2}$, S et A.

9 **Définition (colonne élémentaire).**
Une colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dite *élémentaire* lorsqu'elle contient un seul coefficient non nul, qui vaut 1.

Lorsque la taille est sous-entendue, on note souvent E_i la colonne élémentaire avec un 1 en position i et des 0 ailleurs :

$$E_i =$$

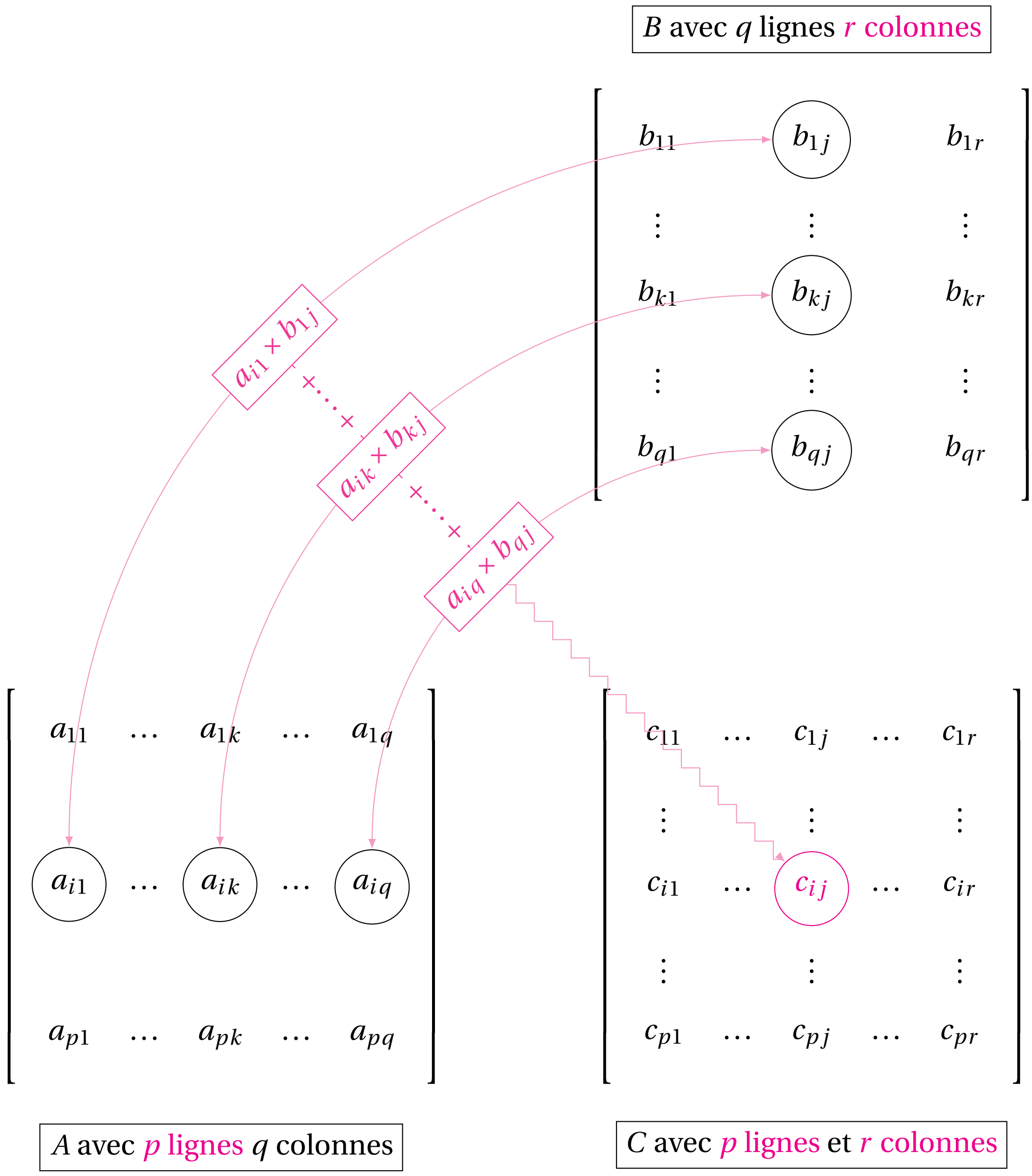
- **Par exemple**, on a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + y_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= y_1 E_1 + \cdots + y_n E_n
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i E_i.$$

Produit matriciel

Considérons deux matrices dont le nombre de colonnes de l'une vaut le nombre de lignes de l'autre.
Disons $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (en bas à gauche) et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ (en haut à droite).
Définissons $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ (en bas à droite) de la façon suivante :



Autrement dit,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{iq}b_{qj}$$

10 **Définition (produit matriciel).**
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
Le produit de A par B, noté AB, est la matrice de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\mathrm{coeff}_{i,j}(AB) = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{coeff}_{i,k}(A)\,\mathrm{coeff}_{k,j}(B)$$

11 **Question.** On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice pleine de 1.
Déterminer J^2 en fonction de J. Faire une preuve « par le dessin » et une preuve formelle.

- **Compatibilité.**
Pour pouvoir multiplier, on doit avoir *compatibilité des tailles*, c'est-à-dire une formule du type « Chasles » :

$$\text{matrice-de-taille-}(p,q) \;\times\; \text{matrice-de-taille-}(q,r) \;=\; \text{matrice-de-taille-}(p,r)$$

- **Matrices carrées.** Le produit de deux matrices carrées de taille n est une matrice carrée de taille n :

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

On dit que l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

- **Puissances.** Pour une matrice *carrée*, on peut définir ses puissances :

$$A^0 = I_n \qquad A^1 = A \qquad A^2 = AA \qquad A^3 = AAA \qquad \text{etc.}$$

Autrement dit, on pose $\forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$.

- **Attention.** Si $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, alors AB est carrée de taille 2 et BA est carrée de taille 3.
Ainsi, $\cancel{AB = BA}$.

Même avec des matrices A, B carrées de même taille, $\cancel{AB = BA}$. En effet :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{versus} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc pour obtenir un exemple de matrices A, B telles que $AB \neq BA$, il suffit de prendre ....

12 **Proposition (propriétés du produit matriciel).**

— Associativité :

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad \forall\, C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K}), \quad A(BC) = (AB)C$$

— Distributivité de $\times$ sur $+$:

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B, C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad A(B + C) \;=\; AB \;+\; AC$$

— Lois $\cdot$ et $\times$:

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(AB) \;=\; (\lambda\cdot A)B \;=\; A(\lambda\cdot B)$$

— Multiplication par l'identité :

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \qquad AI_q \;=\; A \quad \text{et} \quad I_pA \;=\; A$$

En particulier,
$$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AI_n \;=\; I_nA \;=\; A$$

13 **Question.**
sol → 42
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice s'écrivant $A = CL$ avec $(C, L) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.
Question bonus : pouvez-vous exprimer λ en fonction de A ?

Produit matriciel et effet sur les lignes/colonnes

- **Les calculs les plus importants de ce chapitre!**

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

- **Une remarque très importante pour le reste de l'année!**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

On a $\mathrm{Col}_1(A) - 2\mathrm{Col}_2(A) + \mathrm{Col}_3(A) = 0$ (WHY?). Cette égalité peut encore s'écrire ....

14 **Proposition (produit d'une matrice par une colonne).**
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le produit de A par la colonne $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ayant un 1 en $i^{\text{ème}}$ position est $\mathrm{Col}_i(A)$ càd $AE_i = \mathrm{Col}_i(A)$.

- Le produit de A par la matrice colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ est la colonne $\sum_{i=1}^{p} x_i \mathrm{Col}_i(A)$.

Dit autrement :

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = x_1 \mathrm{Col}_1(A) + \cdots + x_p \mathrm{Col}_p(A)$$

- **À retenir.** Pour une colonne X, la colonne AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

- **Preuve du 1^er point.** Les matrices AE_i et $\mathrm{Col}_i(A)$ ont même taille, à savoir $(n,1)$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{coeff}_{k,1}(AE_i) &= \sum_{c=1}^{p} \mathrm{coeff}_{k,c}(A)\, \underbrace{\mathrm{coeff}_{c,1}(E_i)}_{\delta_{c,i}} && \text{d'après ....} \\ &= \mathrm{coeff}_{k,i}(A) && \text{d'après ....} \\ &= \mathrm{coeff}_{k,1}\big(\mathrm{Col}_i(A)\big) && \text{d'après ....} \end{aligned}$$

- **Preuve du 2^ème point.** On a

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} &= A\big(x_1 E_1 + \cdots + x_p E_p\big) && \text{d'après ....} \\ &= x_1 AE_1 + \cdots + x_p AE_p && \text{d'après ....} \\ &= x_1 \mathrm{Col}_1(A) + \cdots + x_p \mathrm{Col}_p(A) && \text{d'après ....} \end{aligned}$$

15 **Proposition (interprétation du produit matriciel en lignes/colonnes)**
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

— La $i^{\text{ème}}$ ligne de AB s'exprime en fonction de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la matrice B :

$$\text{Ligne}_i(AB) = \text{Ligne}_i(A)B$$

Ainsi, la matrice AB est la matrice dont les lignes sont $\text{Ligne}_1(A)B, \dots, \text{Ligne}_p(A)B$.

— La $j^{\text{ème}}$ colonne de AB s'exprime en fonction de la matrice A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B :

$$\text{Col}_j(AB) = A\text{Col}_j(B)$$

Ainsi, la matrice AB est la matrice dont les colonnes sont $A\text{Col}_1(B), \dots, A\text{Col}_r(B)$.

- **Preuve sans mots.**

Question en vue de la proposition suivante.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} =$ d'où $E_{12}A$ est la matrice ayant pour lignes ....

$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$ d'où AE_{13} est la matrice ayant pour colonnes ....

16 **Proposition (produit d'une matrice avec une matrice élémentaire).**
Soit A une matrice et E_{ij} une matrice élémentaire. Sous couvert de compatibilité des tailles :

— On a $\text{Ligne}_\ell(E_{ij}A) = \begin{cases} \text{Ligne}_j(A) & \text{si } \ell = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Autrement dit, $E_{ij}A$ est la matrice ayant pour lignes $\begin{cases} \text{Ligne}_j(A) & \text{en ligne } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

— On a $\text{Col}_c(AE_{ij}) = \begin{cases} \text{Col}_i(A) & \text{si } c = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Autrement dit, AE_{ij} est la matrice ayant pour colonnes $\begin{cases} \text{Col}_i(A) & \text{en colonne } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

17 **Question.**
Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$, calculer les produits des matrices élémentaires $E_{2,3}E_{1,4}$, puis $E_{2,3}E_{3,4}$, puis $E_{4,1}E_{1,2}$.

18 **Proposition (produit de deux matrices élémentaires).**
Lorsque les tailles des matrices rendent licite le produit matriciel, on a :

$$E_{i,j}\,E_{k,\ell} \;=\; \delta_{j,k}\,E_{i,\ell} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad E_{i,j}\,E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Preuve formelle à comprendre.**
  En notant q la taille commune à E_{ij} et $E_{k\ell}$ et (a,b) un couple d'indices, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{coeff}_{a,b}(E_{ij}E_{k\ell}) &= \sum_{c=1}^{q} \operatorname{coeff}_{a,c}(E_{ij})\operatorname{coeff}_{c,b}(E_{k\ell}) && \text{d'après la formule des coefficients du produit matriciel, cf. \dots} \\
&= \sum_{c=1}^{q} \delta_{a,i}\,\delta_{c,j}\,\delta_{c,k}\,\delta_{b,\ell} && \text{d'après la définition d'une matrice élémentaire, cf. \dots} \\
&= \delta_{a,i}\,\delta_{b,\ell}\sum_{c=1}^{q} \underbrace{\delta_{j,c}\delta_{c,k}}_{\delta_{c,j}\,\delta_{j,k}} && \text{cf. ci-après, diverses égalités pour le produit de deux symboles de Kronecker} \\
&= \delta_{j,k}\delta_{a,i}\,\delta_{b,\ell}\sum_{c=1}^{q}\delta_{c,j} && \dots\dots\dots\dots \\
&= \delta_{j,k}\delta_{a,i}\,\delta_{b,\ell}\times 1 && \dots\dots\dots\dots \\
&= \delta_{j,k}\operatorname{coeff}_{a,b}(E_{i,\ell}) && \dots\dots\dots\dots \\
&= \operatorname{coeff}_{a,b}(\delta_{j,k}\,E_{i,\ell}) && \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

- **Diverses égalités pour le produit de deux symboles de Kronecker.**
  Pour i,j,k des entiers, le symbole de Kronecker vérifie

$$\delta_{i,j}\delta_{j,k} \;=\; \delta_{i,k}\delta_{k,j} \;=\; \delta_{j,i}\delta_{i,k}$$

  En effet,

$$\begin{cases} 1 & \text{si } i=j=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{est égal à} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } i=k=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{est égal à} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } j=i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

19 **Plein de pièges.** Ci-dessous les tailles des matrices sont $\geqslant 2$.

- Le produit matriciel n'est **pas** commutatif, c'est-à-dire pour A, B multipliables, $\quad AB \cancel{=} BA$
- Il n'y a **pas** de propriété « d'intégrité », c'est-à-dire pour A, B multipliables,

$$AB = 0 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad A = 0 \text{ ou } B = 0$$

- Il n'y a **pas** de propriété « de simplification », c'est-à-dire pour M, N multipliables avec A,

$$AM = AN \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad M = N \qquad\qquad MA = NA \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad M = N$$

- Il existe des éléments nilpotents, c'est-à-dire des matrices *non nulles* ayant une certaine puissance nulle. Soit A carrée et $k \geqslant 2$

$$A^k = 0 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad A = 0$$

20 sol → 42
Question. Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer

$$\Big(\forall\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX\Big) \implies A = B$$

En particulier, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\Big(\forall\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ MX = 0\Big) \implies M = 0$$

Transposition

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$. On définit la transposée de A comme étant $A^\top = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$.

21 **Définition (matrice transposée).**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
La transposée de A est la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$, définie par

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad \operatorname{coeff}_{i,j}(A^\top) = \operatorname{coeff}_{j,i}(A)$$

- **Pour une matrice *carrée***, que vaut la diagonale de la transposée ? . . . .

22 **Proposition (propriétés de la transposition).**

— La transposition « traverse les combinaisons linéaires »

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$$

— La transposition « permute » le produit matriciel :

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \qquad (AB)^\top = B^\top A^\top$$

— On a $\quad \forall\, A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A^\top)^\top = A.$

- **Question.** Quid de $(ABC)^\top$? . . . .

23 **Question.** Soit A carrée à coefficients *réels*. Montrer que $AA^\top = 0 \implies A = 0$.
sol → 42

Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

24 **Définition (matrices d'opérations élémentaires T-D-P).**

- ⋆ On appelle *matrice de transvection* toute matrice *carrée* de la forme :

$$T_{i,j,\lambda} = I + \lambda E_{i,j} \quad \text{où } i \neq j \ \boxed{\text{sont distincts}} \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

- ⋆ On appelle *matrice de dilatation* toute matrice *carrée* de la forme :

$$D_{i,\mu} = I + (\mu - 1)E_{i,i} \quad \text{où } \mu \in \mathbb{K}^* \ \boxed{\text{est non nul}}$$

- ⋆ On appelle *matrice de permutation* toute matrice *carrée* de la forme :

$$P_{i,j} = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \quad \text{où } i \neq j$$

25 **Définition (opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice).** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire. On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de A l'une des trois opérations suivantes :

- ⋆ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $\boxed{i \neq j}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, appelée *transvection*
- ⋆ $L_i \leftarrow \mu L_i$, avec $\boxed{\mu \in \mathbb{K}^* \text{ non nul}}$, appelée *dilatation*
- ⋆ $L_i \leftrightarrow L_j$, avec $i \neq j$, appelée *échange* (ou *permutation*)

- On a $$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \boldsymbol{\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} =$$

Bilan : multiplier *à gauche* une matrice par $T_{2,4,\lambda}$ revient à effectuer .... sur ses lignes.

- On a $$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} =$$

Bilan : multiplier *à gauche* une matrice par $D_{3,\mu}$ revient à effectuer .... sur ses lignes.

- On a $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} =$$

Bilan : multiplier *à gauche* une matrice par $P_{1,4}$ revient à effectuer .... sur ses lignes.

26 **Proposition.** Effectuer une opération élémentaire sur les *lignes* de A revient à multiplier A *à gauche* par la matrice d'opération élémentaire correspondante :

- ⋆ $T_{i,j,\lambda}A$ est obtenue à partir de A par la transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
- ⋆ $D_{i,\mu}A$ est obtenue à partir de A par la dilatation $L_i \leftarrow \mu L_i$
- ⋆ $P_{i,j}A$ est obtenue à partir de A par la permutation $L_i \leftrightarrow L_j$

27 **Question.** Soit $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{K})$. Décrire la matrice B suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{9} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} A$$

II. Matrices carrées

Matrice symétrique et matrice antisymétrique

28 **Définition.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

— On dit que A est symétrique lorsque $A^\top = A$.

— On dit que A est antisymétrique lorsque $A^\top = -A$.

- **Notations.**
  On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n.
  On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n.
- **En français.**
  Une matrice est symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.
  Une matrice est antisymétrique lorsqu'elle est égale à l'opposé de sa transposée.
- **Quid** d'une matrice à la fois symétrique et antisymétrique ? ....

29 **Proposition (caractérisation de la (anti)symétrie avec les coefficients)**
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences :

$$A \text{ est symétrique} \iff \forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = a_{ji}$$

$$A \text{ est antisymétrique} \iff \forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = -a_{ji}$$

- **Dessin en taille 3.** Donner la forme d'une matrice symétrique de taille 3. Même question avec antisymétrique.

30 **Proposition.**
Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ contiennent la matrice nulle et ils sont stables par combinaison linéaire.

31 **Proposition (décomposition symétrique+antisymétrique).**
sol → 42
Toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exists!\,(S,A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K}), \quad M = S + A$$

32 **Définition.** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— A est scalaire lorsque $A = \lambda I$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

— A est diagonale lorsque $\forall\, i \neq j, a_{ij} = 0$.

— A est triangulaire supérieure lorsque $\forall\, i > j,\ a_{ij} = 0$.

— A est triangulaire inférieure lorsque $\forall\, i < j,\ a_{ij} = 0$.

— A est triangulaire supérieure stricte lorsque $\forall\, i \geqslant j,\ a_{ij} = 0$.
(triangulaire supérieure à diagonale nulle)

— A est triangulaire inférieure stricte lorsque $\forall\, i \leqslant j,\ a_{ij} = 0$.
(triangulaire inférieure à diagonale nulle)

- **Notations.**
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.
On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n.
- **Astuce 1.** Une matrice diagonale est une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- **Astuce 2.** La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.
- **Deux calculs.** Voici deux matrices triangulaires supérieures de taille 3 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}$$

On a :

$\lambda A + \lambda' A' =$ $\qquad\qquad$ $AA' =$

33 **Proposition (stabilité par combinaison linéaire et produit)**

1. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaison linéaire et par produit.
2. idem avec les matrices triangulaires inférieures.
3. idem avec les matrices diagonales.
4. idem avec les matrices triangulaires supérieures strictes.
5. idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

34 **Définition.**
Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A, notée $\operatorname{tr}(A)$, comme étant le scalaire :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \text{ou encore} \qquad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{coeff}_{ii}(A)$$

La trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients de sa diagonale.

35 **Proposition (propriétés de la trace)**

— La trace est linéaire :

$$\forall A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K},\qquad \operatorname{tr}(\lambda A+\mu B)=\lambda\operatorname{tr}(A)+\mu\operatorname{tr}(B)$$

— La trace est invariante par permutation circulaire :

$$\forall A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$$

— La trace d'une matrice carrée est la même que la trace de sa transposée.

$$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \operatorname{tr}(A^\top)=\operatorname{tr}(A)$$

- **Remarque sur l'invariance par permutation circulaire.**
Par exemple, pour $A,B,C,D\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{tr}(ABCD) = \operatorname{tr}(BCDA) = \operatorname{tr}(CDAB) = \operatorname{tr}(DABC)$$

Justifions la première égalité :

$$\operatorname{tr}(ABCD) = \operatorname{tr}\big(A(BCD)\big) = \operatorname{tr}\big((BCD)A\big) = \operatorname{tr}(BCDA)$$

En revanche, cela n'implique pas que l'on peut permuter comme on veut les termes d'un produit quand on en prend la trace.
Par exemple, avec $A=E_{31}$, $B=E_{12}$ et $C=E_{23}$, on a $ABC=E_{33}$ qui a une trace égale à 1, et $BAC=0$ qui a une trace nulle. D'où $\operatorname{tr}(ABC)\neq\operatorname{tr}(BAC)$.

36 **Question.** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'implication

$$\Big(\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \operatorname{tr}(AM)=0\Big) \quad\Longrightarrow\quad A=0$$

Calculs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel c'est-à-dire : $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
Ainsi, pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut définir ses puissances par récurrence :

$$A^0 = I_n \qquad A^1 = A \qquad A^2 = AA \qquad A^3 = AAA \qquad \text{etc.} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

37 **Question.** On note J la matrice carrée pleine de 1 de taille n. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer J^k.

38 **Définition.**
Une matrice N est dite *nilpotente* lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.

- **Deux exemples à connaître.**
  La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ est nilpotente, car $A^2 = 0$.
  La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente, car $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ puis $A^3 = 0$.

- **Les matrices élémentaires sont-elles nilpotentes ?**
  — si $i \neq j$, alors $E_{i,j}^2 = 0$, donc $E_{i,j}$ est nilpotente.
  — sinon, on a $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$, et une récurrence donne $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ E_{i,i}^k = E_{i,i} \neq 0$.
  Donc E_{ii} n'est pas nilpotente.

- **Remarque.** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément k_0.
  Cet entier k_0 est appelé *l'indice de nilpotence* de A. Il vérifie :

$$\forall k \in [\![0, k_0 - 1]\!],\ A^k \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant k_0,\quad A^k \ = \ \underbrace{A^{k_0}}_{=0} A^{k-k_0} \ = \ 0.$$

39 **Proposition (binôme de Newton et identité de Bernoulli)**
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent}}$, alors

....

et

....

- **Une évidence.** Toute matrice carrée commute avec l'identité !

40 **Question.** Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. Matrices inversibles

Généralités

41 **Définition.**

— Une matrice *carrée* A est inversible lorsqu'il existe une matrice carrée B telle que $\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$

— Si une telle matrice B existe, elle est unique, et est notée A^{-1}.

— On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n.

- **Preuve de l'unicité.** à faire sur son cahier.
- **Des questions.**
  La matrice identité I est inversible. WHY ? Que vaut son inverse ?
  La matrice nulle $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible. WHY ?
  À quelle condition une matrice carrée de taille 1, disons $A = [\lambda]$, est-elle inversible ?

- **Attention.** Cela n'a pas de sens de parler de l'inversibilité d'une matrice non carrée.

- **En 2025.** Soit A carrée. S'il existe B telle que $AB = I$, *rien ne dit* que $BA = I$.
  Autrement dit, si A est inversible à droite, alors *rien ne dit* que A est inversible à gauche.
  Sauf qu'en 2025, on apprendra un théorème qui stipule :

  > *Si A est inversible à droite, alors A est inversible à gauche, et l'inverse à gauche est le même que l'inverse à droite.*

  (idem en échangeant droite et gauche).
  Pour l'instant, on va essayer (et on va le faire) de se passer de ce résultat.

- **Une remarque.** Soit $A, M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  Si A est inversible, on a $\quad AM = N \iff M = A^{-1}N$.
  Attention, de manière générale,
  $$AM = AN \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad M = N$$
  Cependant, lorsque A est inversible, l'implication est vraie : il suffit de multiplier à gauche par A^{-1}.

42 **Proposition (propriétés de l'inverse).**

— **inverse**
Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

L'inverse d'une matrice inversible est inversible.

— **produit** — chaussettes et chaussures —
Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Le produit de deux matrices inversibles est inversible et l'inverse du produit est le produit des inverses.

— **puissance**
Si A est inversible, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Une puissance d'une matrice inversible est inversible et l'inverse de la puissance est la puissance de l'inverse.

— **transposée**
Si A est inversible, alors $A^\top$ est inversible et on a $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

La transposée d'une matrice inversible est inversible et la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée.

Aparté très important, à apprendre

Dans cet aparté, la matrice A est rectangulaire, disons $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- **Notion 1.**
  Pour cette matrice A, on peut s'intéresser à chercher toutes les colonnes X telles que $AX = 0$.
  On dit alors que l'on résout l'équation $AX = 0$.
  Il est évident que la colonne nulle est solution de cette équation.
  On dit alors que la colonne nulle est une solution triviale de l'équation $AX = 0$.
- **Notion 2.**
  Une relation de liaison entre les colonnes de A est une relation du type

$$\lambda_1 \mathrm{Col}_1(A) + \cdots + \lambda_p \mathrm{Col}_p(A) \;=\; 0$$

  Il est évident qu'en prenant tous les λ_i égaux à 0, on obtient une relation de liaison.
  On l'appelle la relation triviale.
- **Lien entre les deux notions.** D'après ..., on a $A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathrm{Col}_1(A) + \cdots + \lambda_p \mathrm{Col}_p(A)$.

  En particulier, on a l'équivalence :

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \mathrm{Col}_1(A) + \cdots + \lambda_p \mathrm{Col}_p(A) = 0$$

  Ainsi, une solution de l'équation $AX = 0$ fournit une relation de liaison entre les colonnes de A et réciproquement.
- **Exemple.**
  Prenons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. On a $\mathrm{Col}_1(A) + \mathrm{Col}_3(A) = 2\mathrm{Col}_2(A)$.
  À partir de cette égalité, on peut fournir une relation de liaison non triviale entre les colonnes de A, puis une solution non triviale de l'équation $AX = 0$.
  En effet, on a

$$\mathrm{Col}_1(A) \;-\; 2\mathrm{Col}_2(A) \;+\; \mathrm{Col}_3(A) \;+\; 0\mathrm{Col}_4(A) \;=\; 0 \qquad \text{d'où} \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Revenons à nos moutons : les matrices carrées

43 **Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversible, alors l'équation $AX = 0$ admet une unique solution, à savoir $X = 0$.

44 **Proposition (Condition suffisante de non-inversibilité).** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si l'équation $AX = 0$ admet une solution non triviale, alors A n'est pas inversible.

- **Autre formulation.** S'il existe une relation de liaison non triviale entre les colonnes de A, alors A n'est pas inversible.
- **En maths.**
$$\left(\exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, \quad AX = 0\right) \quad \Longrightarrow \quad A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$
- **Exemple.** La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible. WHY ? ....

45 **Proposition (matrice diagonale et inversibilité).**
Une matrice diagonale est inversible si et seulement si elle n'a aucun 0 sur sa diagonale.

Plus précisément, pour $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$ diagonale de taille n, on a l'équivalence
$$D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ d_i \neq 0$$

Dans ce cas, on a $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$.

46 **Proposition.** Une matrice d'opération élémentaire est inversible.

Preuve.
$T = T_{i,j,\lambda}$ code l'opération .... On peut défaire cette opération en effectuant ....

$D = D_{i,\mu}$ code l'opération .... On peut défaire cette opération en effectuant ....

$P = P_{i,j}$ code l'opération .... On peut défaire cette opération en effectuant ....

En posant $T' =$ ...., on vérifie que $TT' = I$ et $T'T = I$.

En posant $D' =$ ...., on vérifie que $DD' = I$ et $D'D = I$.

En posant $P' =$ ...., on vérifie que $PP' = I$ et $P'P = I$.

Les matrices T, D, P sont donc inversibles.

47 **Lemme.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
On a l'équivalence
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \Omega A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

48 **Proposition fondamentale.**

— En multipliant à gauche une matrice carrée par une matrice inversible, on ne change pas son caractère inversible.

— En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice carrée, on ne change pas son caractère inversible.

- **Preuve.**
Le premier point revient à montrer que pour une matrice carrée A et une matrice inversible Ω, on a :
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \implies \Omega A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \implies \Omega A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Ces deux implications résultent du lemme (WHY ?).

Le deuxième point résulte du premier en prenant pour Ω un produit de matrices d'opérations élémentaires (qui est bien une matrice inversible, WHY ?).

49 **Question.** À quelle condition (nécessaire et suffisante), la matrice $T = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & a \\ 0 & \mathbf{1} & b \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array}\right]$ est-elle inversible ?

Inversibilité d'une matrice triangulaire

50 **Question.**
Montrer que la matrice $U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & a & b & c & d \\ 0 & \mathbf{1} & e & f & g \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & h & i \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ est inversible et que $V = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & a & b & c & d \\ 0 & \mathbf{1} & e & f & g \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & h & i \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ne l'est pas.

51 **Proposition (inversibilité d'une matrice triangulaire).**
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si elle n'a aucun 0 sur sa diagonale.

Plus précisément, pour $T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \text{quelque} & \\ & \alpha_2 & & \text{chose} \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$ triangulaire supérieure de taille n, on a :

$$T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \neq 0$$

Dans ce cas, $T^{-1} = \ldots$

En particulier, T^{-1} est également triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de T.

- **Attention.** On remarque que l'on n'a pas de *formule* explicite pour T^{-1}, mais on a une *forme* pour T^{-1}.
- **Preuve.**

• Supposons les coefficients diagonaux de T non nuls.

On peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ce qui ne change pas le caractère inversible de T.

En effectuant les dilatations $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha_i} L_i$ (licite, WHY?), on rend les coefficients diagonaux de T égaux à 1.

On se ramène donc à montrer qu'une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité est inversible. Notons encore T cette matrice.

En effectuant des transvections du type $L_i \leftarrow L_i - t_{i,n} L_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on annule, dans la dernière colonne, tous les coefficients au-dessus de la diagonale et les autres coefficients de T sont inchangés.

On fait de même avec la colonne $n-1$. Puis avec la colonne $n-2$ etc. jusqu'à la colonne 2.

On finit par obtenir la matrice identité qui est inversible.

La matrice initiale T est donc inversible (car effectuer des opérations élémentaires ne change pas le caractère inversible).

• Supposons qu'il existe un coefficient nul sur la diagonale.

Posons $i_0 = \min\left\{ i \in [\![1, n]\!] \mid \alpha_i = 0 \right\}$. C'est licite de considérer un tel i_0, WHY?

En effectuant des opérations élémentaires comme précédemment, on peut rendre le bloc carré en haut à gauche (entre les indices 1 et $i_0 - 1$) égal à l'identité, sans changer le caractère inversible de T.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & \mathbf{0} & t_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & \star & \\ \mathbf{0} & & 1 & t_{i_0-1} & & & \\ \hline & & & 0 & & & \\ & & & & * & & \star \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{0} & & * \end{array}\right]$$

La dernière matrice obtenue n'est pas inversible (WHY, ce n'est pas évident ; on peut par exemple dire que la colonne i_0 est combinaison linéaire des premières colonnes).

Donc la matrice initiale T ne l'est pas non plus (car effectuer des opérations élémentaires ne change pas le caractère inversible).

- **Remarque importante.** Au passage, dans la preuve, on a vu que, lorsqu'une matrice triangulaire T n'a aucun zéro sur sa diagonale, on peut effectuer des opérations élémentaires sur ses lignes et obtenir la matrice identité (inversible). En particulier, on obtient que la matrice T est inversible.

  Les opérations élémentaires utilisées sont :

  — des dilatations, codées par des matrices diagonales (donc a fortiori triangulaires supérieures)

  — des transvections du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec la condition $i < j$, codées par des matrices triangulaires *supérieures* (car $i < j$).

  Matriciellement, on a donc montré qu'il existe des matrices triangulaires supérieures $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ (qui codent les opérations élémentaires précédentes) telles que $\Omega_s \cdots \Omega_1 T = I$.
  Ainsi (WHY ?), $T^{-1} = \Omega_s \cdots \Omega_1$.

  Justifions ce WHY.
  Comme T est inversible, on peut multiplier à droite par T^{-1} et obtenir

  $$\Omega_s \cdots \Omega_1 T T^{-1} = I T^{-1}$$

  D'où $T^{-1} = \Omega_s \cdots \Omega_1$.

  On en déduit quelque chose qui n'est absolument pas évident, c'est que la matrice T^{-1} est elle-même triangulaire supérieure (en tant que produit de matrices triangulaires supérieures).

  Bref : l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est une matrice triangulaire supérieure.

Inversibilité d'une matrice carrée quelconque

52 **Question.** À quelle condition sur $x \in \mathbb{R}$, la matrice $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?

sol → 43

53 **Théorème.**

— Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe une matrice Ω inversible (qui est même un produit de matrices du type T-D-P) telle que ΩA est triangulaire supérieure.

— En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice *carrée* A, on peut la transformer en une matrice *triangulaire* supérieure T.
Le caractère inversible de A est alors gouverné par la diagonale de T.

54 **Exemple.** Montrons que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ est inversible et déterminons son inverse.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de A et parallèlement sur les lignes de I.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -7 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_2$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -7/2 & 5/2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bilan des calculs. La colonne de gauche montre que A est inversible : WHY ?
Mais au fait, que vaut A^{-1} ? Pour répondre à cette question, contemplons et expliquons l'égalité :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- **Résumons.** En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice *carrée* A, on peut la transformer en une matrice *triangulaire* supérieure T.

  Si la matrice T n'a aucun 0 sur sa diagonale, alors T est inversible, donc A l'est aussi (WHY?).

  Dans ce cas, on sait alors que l'on peut trouver des opérations élémentaires nous permettant d'obtenir la matrice identité I (WHY?).

  Bilan. Si A est inversible, alors on peut transformer A en l'identité I en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

  Dans ce cas, l'inverse de A s'obtient en faisant subir à la matrice identité I les mêmes opérations élémentaires.

55 sol → 44 **Question.** Montrer que $Z = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

56 sol → 45 **Question.** La matrice $V = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 2 & -9 & -47 & 16 \\ -4 & 10 & 38 & 1/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?

IV. Inversibilité et système linéaire

Matrice de taille 2

57 **Proposition (inversibilité des matrices de taille** 2**).**
Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. On a l'équivalence

$$A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \iff ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Preuve. On va utiliser le **lemme** suivant (que je vous laisse prouver) :

Pour une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ quelconque carrée de taille 2, on a l'égalité

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$$

- **Rappel de septembre.**
  Soit $s, d \in \mathbb{R}$ fixé.
  On a montré qu'il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x+y &= s \\ x-y &= d \end{cases}$.
  D'ailleurs cet unique couple vaut $\left(\dfrac{s+d}{2}, \dfrac{s-d}{2}\right)$.

  Faisons une preuve matricielle.
  Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix}$ et montrons qu'il existe une unique colonne $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ telle que $AX = Y$.
  Comme A est inversible (son déterminant $1 \times (-1) - 1 \times 1$ est $\neq 0$), il existe une unique colonne X à savoir $X = A^{-1}Y$.

  Bonus : on peut exprimer la solution $X = A^{-1}Y$ en déterminant A^{-1}.
  On a $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
  Ainsi $X = A^{-1}Y = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix}$
  D'où

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{s+d}{2} \\ \dfrac{s-d}{2} \end{bmatrix}$$

Inversibilité et systèmes linéaires carrés

Rappel. Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles quelconques.

- *Définition.* On dit que $f : E \to F$ est bijective lorsque

  pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution

$$\forall\, y \in F, \quad \exists!\, x \in E, \quad f(x) = y$$

- *Théorème.* On a l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, g : F \to E \text{ telle que } \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$$

- *Remarque.* On peut avoir $g \circ f = \mathrm{id}$ et $f \circ g \neq \mathrm{id}$.

Nouveauté. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- *Définition.* On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice carrée B telle que $\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$
- *Théorème à venir.* On a l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y$$

- *Remarque.* On ne peut **pas** avoir $AB = I$ et $BA \neq I$, comme nous le verrons en 2024.

58 **Théorème (Caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = Y$)**

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y$$

- **Reformulation.**

En posant $\boxed{\begin{array}{rccc} f_A: & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}}$, l'équivalence se réécrit :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \boldsymbol{f_A(X) = Y}$$

ou encore

$$\boxed{A \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad f_A \text{ bijective}}$$

- **En français.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est inversible, alors pour tout second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}Y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si **pour tout** second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, alors A est inversible.

- **Preuve.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Montrons que $\quad \forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$

Fixons Y une colonne.
Par hypothèse, A est inversible, donc A^{-1} existe.
Donc l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}Y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$ ou encore supposons que f_A est bijective.

Montrons qu'il existe une matrice carrée B telle que $\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$.

Idée. On va construire B en colonnes. C'est-à-dire en imposant $\mathrm{Col}_j(B) = $ qq-chose.

— Par *surjectivité* de f_A, la colonne $E_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (qui est la $j^{\text{ème}}$ colonne de I) est atteinte !

Ainsi, il existe X_j tel que $f_A(X_j) = E_j$ ou encore tel que $AX_j = E_j$.

On construit alors la matrice B comme étant la matrice telle que $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Col}_j(B) = X_j$.
On a donc $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $A\mathrm{Col}_j(B) = \mathrm{Col}_j(I)$ (WHY?).
Donc $AB = I$ (WHY?).

— Reste à vérifier que $BA = I$ (c'est un peu atucieux).
En multipliant par A à droite l'égalité $AB = I$, on a $(AB)A = IA$.
Par associativité du produit matriciel et le fait que A commute avec I, on obtient $A(BA) = A(I)$.
Ainsi (WHY?) :

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad A\mathrm{Col}_j(BA) = A\mathrm{Col}_j(I)$$

Ou encore

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad f_A\big(\mathrm{Col}_j(BA)\big) = f_A\big(\mathrm{Col}_j(I)\big)$$

Par *injectivité* de f_A, on en déduit $\quad \forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Col}_j(BA) = \mathrm{Col}_j(I)$.
D'où (WHY?) $BA = I$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice

- Le théorème précédent permet **à nouveau** de répondre à un exercice du type « la matrice suivante est-elle inversible, si oui, déterminer son inverse ».
- Pour cela, il suffit de se donner une colonne Y (souvent appelée second membre) et de déterminer le **nombre** de solutions X telles que $AX = Y$.

59 **Question.** La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

On utilise la caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = Y$.

Soit un second membre $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ et cherchons le **nombre** de colonnes $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ de l'équation $AX = Y$.

On a les équivalences (WHY ?)

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + + -x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + + -x_3 = y_1 \\ + 2x_2 + 2x_3 = y_2 - y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ + 4x_2 + 5x_3 = y_3 + y_1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + + -x_3 = y_1 \\ + 2x_2 + 2x_3 = y_2 - y_1 \\ + + x_3 = y_3 - 2y_2 + 3y_1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

à ce stade, on peut dire que A est inversible ;
en effet, on voit facilement que le système admet une unique solution
à cause de l'aspect triangulaire

$$\iff \begin{cases} x_1 + + -x_3 = y_1 \\ + 2x_2 + = y_2 - y_1 - 2(y_3 - 2y_2 + 3y_1) & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ + + x_3 = y_3 - 2y_2 + 3y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + + = y_1 + (y_3 - 2y_2 + 3y_1) & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ + 2x_2 + = -7y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ + + x_3 = y_3 - 2y_2 + 3y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + + = 4y_1 - 2y_2 + y_3 \\ + x_2 + = \frac{-7}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_2 - y_3 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ + + x_3 = 3y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 4y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = \frac{-7}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_2 - y_3 \\ x_3 = 3y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Ces équivalences montrent que l'équation $AX = Y$ admet une unique solution. Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Autre façon de présenter le calcul.

On a les équivalences (WHY ?)

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & y_2 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -y_1 + y_2 \\ & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & y_1 + y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -y_1 + y_2 \\ & + & & + & x_3 & = & 3y_1 + (-2)y_2 + y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

à ce stade, on peut dire que A est inversible ;
en effet, on voit facilement que le système admet une unique solution à cause de l'aspect triangulaire

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & & = & 4y_1 + (-2)y_2 + y_3 \\ & + & 2x_2 & + & & = & -7y_1 + 5y_2 + (-2)y_3 \\ & + & & + & x_3 & = & 3y_1 + (-2)y_2 + y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 4y_1 + (-2)y_2 + y_3 \\ x_2 & = & \frac{-7}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_2 + (-1)y_3 \\ x_3 & = & 3y_1 + (-2)y_2 + y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Encore une autre façon de présenter le calcul.

$$AX=Y \iff \begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{matrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad L_3\leftarrow L_3-2L_2$$

à ce stade, on peut dire que A est inversible

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&1\\-7&5&-2\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}L_1\leftarrow L_1+L_3\\L_2\leftarrow L_2-2L_3\end{matrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&1\\\frac{-7}{2}&\frac{5}{2}&-1\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad L_2\leftarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

On retrouve les calculs faits précédemment :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&4&6\end{bmatrix} \quad\Bigg|\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&4&5\end{bmatrix} \quad\Bigg|\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$L_3\leftarrow L_3-2L_2$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix} \quad\Bigg|\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}$$

à ce stade, on peut dire que ...

$$\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1+L_3\\L_2\leftarrow L_2-2L_3\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad\Bigg|\quad \begin{bmatrix}4&-2&1\\-7&5&-2\\3&-2&1\end{bmatrix}$$

$$L_2\leftarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad\Bigg|\quad \begin{bmatrix}4&-2&1\\-7/2&5/2&-1\\3&-2&1\end{bmatrix}=A^{-1}$$

V. Systèmes linéaires

Des exemples

Voici un exemple de système **qui n'est pas** linéaire.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \cos(x) & & + & z & = & 0 \\ & y & + & z^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

60 **Exemple (homogène et échelonné réduit).**
Voici un système linéaire :

$$\mathscr{S} \quad \left\{\begin{array}{cccccc} x & & + & 6z & = & 0 \\ & y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

- L'an dernier, vous avez appris que l'ensemble des triplets vérifiant $\mathscr{S}$ est l'intersection de deux plans, « donc » est une droite. Particularité, cette droite passe par l'origine ; en effet, le triplet $(0,0,0)$ vérifie les deux équations de $\mathscr{S}$.
- L'an dernier, vous avez donné une équation paramétrique de cette droite. Cette équation paramétrique utilise 1 seul paramètre (1, c'est la « dimension » d'une droite).
- Résoudre le système linéaire $\mathscr{S}$, c'est trouver tous les triplets (x, y, z) vérifiant $\mathscr{S}$ et d'en donner une forme paramétrique.
- On a (WHY ?) :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & & + & 6z & = & 0 \\ & y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \left[\begin{array}{ccc} x & = & -6\lambda \\ y & = & -7\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est l'ensemble des triplets de $\mathbb{K}^3$ de la forme $(-6\lambda, -7\lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ ou encore l'ensemble :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

61 **Exemple (homogène, quelconque).**
Voici un deuxième système $\mathscr{S}$. On a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & (-3)y & + & (-6)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & & + & (-1)z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \left[\begin{array}{ccc} x & = & \lambda \\ y & = & -2\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est l'ensemble des triplets de $\mathbb{K}^3$ de la forme $(\lambda, -2\lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. ou encore l'ensemble :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

62 **Question.** Résoudre :

$$\mathscr{S} : \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

On a les équivalences (WHY ?)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & + & (-4)x_4 & + & (-14)x_5 & = & 0 \\ & & & & & & 2x_4 & + & 12x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

à ce stade, le système est échelonné

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & (-2)x_4 & + & (-7)x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

à ce stade, le système est échelonné avec des pivots = 1

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & & + & 2x_3 & + & & + & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

à ce stade, le système est échelonné réduit (des 0 au-dessus des pivots)

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \left[\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -2\mu & - & 4\lambda \\ x_2 & = & -3\mu & - & 5\lambda \\ x_3 & = & \mu & & \\ x_4 & = & & & -6\lambda \\ x_5 & = & & & \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les solutions du système $\mathscr{S}$ sont les 5-uplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5$ qui sont de la forme

$$\Big(-2\mu - 4\lambda, \quad -3\mu - 5\lambda, \quad \mu, \quad -6\lambda, \quad \lambda\Big) \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

ou encore de la forme

$$\mu\Big(-2, -3, 1, 0, 0\Big) + \lambda\Big(-4, -5, 0, -6, 1\Big) \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

ou encore qui sont combinaison linéaire de

$$\Big(-2, -3, 1, 0, 0\Big) \qquad \text{et} \qquad \Big(-4, -5, 0, -6, 1\Big)$$

63 **Exemple (avec un second membre).**

Voici un système linéaire $\mathscr{S}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 9 \end{array}\right.$

On a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ & & (-3)y & + & (-6)z & = & 21 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ & & y & + & 2z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & & + & (-1)z & = & 11 \\ & & y & + & 2z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \left[\begin{array}{rcrcr} x & = & 11 & + & \lambda \\ y & = & -7 & + & (-2)\lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

L'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est l'ensemble des triplets de $\mathbb{K}^3$ de la forme

$$(11+\lambda,\ -7-2\lambda,\ \lambda) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

ou encore de la forme

$$(11,-7,0)\ +\ (\lambda,-2\lambda,\lambda) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Les définitions

On appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tout système du type :

$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,j}\,x_j + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array} \right.$$

avec $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.

- Les $a_{i,j}$ sont appelés *coefficients* du système.
- Le n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est appelé *second membre* du système.
- On appelle *solution du système* tout p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de $\mathscr{S}$.
- Le système $\mathscr{S}$ est dit **compatible** s'il admet au moins une solution.
- Lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système est **homogène** ou que le système est *sans second membre*.
- Le système $\mathscr{S}_0$ obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est appelé *système homogène associé* à $\mathscr{S}$.
- Le système $\mathscr{S}$ s'écrit aussi :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\,x_j = b_i.$$

- Reprenons le système $\mathscr{S}$. Posons

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

  Le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution de $\mathscr{S}$ si et seulement si la colonne X vérifie $AX = B$.
- L'égalité $AX = B$ s'appelle *écriture matricielle* du système $\mathscr{S}$.
- La matrice A s'appelle la *matrice du système*.
- Le système homogène associé à $\mathscr{S}$ a pour écriture matricielle $AX = 0$.

64 **Proposition.**

- Un système homogène est toujours compatible.
- Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaires des colonnes de A.
- En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire (rectangulaire), on ne change pas son ensemble des solutions. On obtient alors un système *équivalent*.

65 **Proposition (Structure de l'ensemble des solutions).**
Considérons un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$.
Notons S et S_H les ensembles des solutions des systèmes $AX = B$ et $AX = 0$ respectivement.

Supposons qu'il existe une solution particulière X_p du système $AX = B$.
Alors l'ensemble des solutions de $AX = B$ est

$$\mathrm{S} = \left\{ X \mid \exists X_H \in \mathrm{S}_H,\ X = X_p + X_H \right\}$$

L'algorithme du pivot de Gauss

— Si **tous** les coefficients devant x_1 sont **nuls**, alors l'inconnue x_1 n'intervient pas dans l'écriture du système. On résout alors le système $\widetilde{\mathscr{S}}$, qui a la même écriture que $\mathscr{S}$, mais que l'on voit comme un système à seulement $p-1$ inconnues qui sont $x_2,\dots,x_p$.
Les solutions de $\mathscr{S}$ sont alors les p-uplets :

$$(x_1,x_2,\dots,x_p) \qquad \text{avec } x_1\in\mathbb{K} \text{ et } (x_2,\dots,x_p) \text{ solution de } \widetilde{\mathscr{S}}$$

— Si **au moins un** des coefficients devant x_1 est **non nul**, alors choisissons-en un, que l'on appelle $\boxed{\textit{pivot}}$.

⋆ En notant i_0 l'indice de la ligne où se trouve le pivot choisi et en réalisant l'échange de lignes $L_{i_0}\leftrightarrow L_1$, on obtient un système $\widetilde{\mathscr{S}}$ équivalent à $\mathscr{S}$ où le pivot choisi est le coefficient devant x_1 à la première ligne :

$$\widetilde{\mathscr{S}}\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
\boxed{\widetilde{a}_{1,1}}\,x_1 & + & \widetilde{a}_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widetilde{a}_{1,p}\,x_p & = & \widetilde{b}_1\\
\widetilde{a}_{2,1}\,x_1 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widetilde{a}_{2,p}\,x_p & = & \widetilde{b}_2\\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & & \vdots\\
\widetilde{a}_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widetilde{a}_{n,p}\,x_p & = & \widetilde{b}_n.
\end{array}\right.$$

⋆ On utilise alors la première ligne pour éliminer l'inconnue x_1 dans les autres. Plus précisément, en réalisant les transvections suivantes :

$$\forall\, i\in[\![2,n]\!],\quad L_i \leftarrow L_i - \frac{\widetilde{a}_{i,1}}{\widetilde{a}_{1,1}}L_1$$

on obtient un système équivalent à $\mathscr{S}$ de la forme ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\widehat{a}_{1,1}\,x_1 & + & \widehat{a}_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{1,p}\,x_p & = & \widehat{b}_1\\
 & & \widehat{a}_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{2,p}\,x_p & = & \widehat{b}_2\\
 & & \vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots\\
 & & \widehat{a}_{n,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{n,p}\,x_p & = & \widehat{b}_n.
\end{array}\right.$$

⋆ Dans le système obtenu, on voit apparaître :

— une équation linéaire E :

$$\widehat{a}_{1,1}\,x_1 \;+\; \widehat{a}_{1,2}\,x_2 \;+\; \cdots \;\cdots \;+\; \widehat{a}_{1,p}\,x_p \;=\; \widehat{b}_1\ ;$$

— un système à $p-1$ inconnues formé par les $n-1$ dernières lignes :

$$\widehat{\mathscr{S}}\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\widehat{a}_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{2,p}\,x_p & = & \widehat{b}_2\\
\vdots & & & & & \vdots & & \vdots\\
\widehat{a}_{n,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \widehat{a}_{n,p}\,x_p & = & \widehat{b}_n.
\end{array}\right.$$

La résolution du système $\widehat{\mathscr{S}}$ mène alors à la résolution du système $\mathscr{S}$.
En effet, une p-liste $(x_1,\dots,x_p)$ est solution de $\mathscr{S}$ si et seulement si on a à la fois les deux propriétés suivantes :

— $(x_2,\dots,x_p)$ est solution de $\widehat{\mathscr{S}}$

— $(x_1,\dots,x_p)$ est solution de E

Comme $\widehat{a}_{1,1}\neq 0$, l'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est donc l'ensemble des p-uplets $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant :

$$x_1 = \frac{1}{\widehat{a}_{1,1}}\left(\widehat{b}_1 - \widehat{a}_{1,2}\,x_2 - \cdots - \widehat{a}_{1,p}\,x_p\right) \quad \text{et} \quad (x_2,\dots,x_p) \text{ est solution de } \widehat{\mathscr{S}}$$

⋆ Il s'agit désormais de résoudre le système $\widehat{\mathscr{S}}$: pour ce faire, on peut itérer le processus précédent.

Échelonnement

- Voici des exemples de systèmes échelonnés réduits :

$$\begin{cases} x & & + & 6z & = & 0 \\ & y & + & 7z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & + & & + & 2x_3 & + & & + & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{cases}$$

- Voici des exemples de matrices échelonnées réduites :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$$

Pour la culture (il est totalement inutile d'apprendre cette définition), on dit qu'une matrice est échelonnée réduite lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées :

- Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
- Dans chaque ligne non nulle, le pivot (càd le premier coefficient non nul rencontré) est situé à droite du pivot de la ligne précédente. D'où un dessin en « escalier ».
- Chaque pivot vaut 1 et au-dessus d'un pivot, tous les éléments sont nuls.

66 **Théorème.**

- Un système linéaire peut être rendu échelonné (et même échelonné réduit) à l'aide d'opérations élémentaires.
- Une matrice rectangulaire (donc en particulier carrée) peut être rendue échelonnée (et même échelonnée réduite) à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes.

Preuve. Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss.

67 **Question.** Résoudre $AX=0$ où $A\in\mathscr{M}_{4,6}(\mathbb{K})$ est la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4/3\end{pmatrix}$

$$A_1=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ . & 2 & 4 & 6 & 0 & 2\\ . & 3 & 6 & 7 & 1 & 2\\ . & 1 & 2 & 5 & 3 & 4/3\end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ . & . & . & 0 & -6 & 1\\ . & . & . & -2 & -8 & 1/2\\ . & . & . & 2 & 0 & 5/6\end{pmatrix}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ . & . & . & 2 & 0 & 5/6\\ . & . & . & -2 & -8 & 1/2\\ . & . & . & 0 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ . & . & . & 1 & 0 & 5/12\\ . & . & . & -2 & -8 & 1/2\\ . & . & . & 0 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_5=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ . & . & . & 1 & 0 & 5/12\\ . & . & . & . & -8 & 4/3\\ . & . & . & . & -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_6=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ . & . & . & 1 & 0 & 5/12\\ . & . & . & . & 1 & -1/6\\ . & . & . & . & -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_7=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2\\ . & . & . & 1 & . & 5/12\\ . & . & . & . & 1 & -1/6\\ . & . & . & . & . & .\end{pmatrix}$$

$$A_8=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 0 & 1\\ . & . & . & 1 & . & 5/12\\ . & . & . & . & 1 & -1/6\\ . & . & . & . & . & .\end{pmatrix}$$

$$A_9=\begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 0 & 0 & -1/4\\ . & . & . & 1 & . & 5/12\\ . & . & . & . & 1 & -1/6\\ . & . & . & . & . & .\end{pmatrix}$$

VI. Compléments

- **Une équivalence.** On a déjà vu une « caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = Y$ » :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y$$

Ce théorème dit :
$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est inversible, alors pour tout second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}Y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si **pour tout** second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, alors A est inversible.

- **Une implication facile.** On a facilement l'implication suivante (WHY?) :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0$$

que l'on peut reformuler en (WHY?)

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \implies X = 0\Big)$$

Cela dit que :
Si A est inversible, alors l'équation $AX = 0$ admet une unique solution, à savoir $X = 0$.

68 **Théorème (Caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = 0$)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si l'équation $AX = 0$ admet une unique solution (qui est nécessairement 0), alors A est inversible.

- **Une équivalence.** On en déduit une « caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = 0$ » :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \implies X = 0\Big)$$

- **Plus tard.** En 2025, on définira ce qu'est le noyau d'une matrice (rectangulaire non nécessairement carrée) :

$$\mathrm{Ker}\, A \;=\; \Big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\Big\}$$

Le théorème s'énoncera alors :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}\, A = \big\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\big\}$$

- **Preuve du théorème.** Par contraposée.
Supposons A non inversible.
Tout d'abord, il existe Ω matrice inversible (produit de matrices d'opérations élémentaires) telle que $\Omega A = T$ où T est triangulaire supérieure.
Comme A est supposée non-inversible, on sait que T est aussi non-inversible.
Travaillons sur la matrice T.
Comme T est non inversible, il existe un coefficient diagonal nul, posons $i_0 = \min\Big\{i \in [\![1, n]\!] \mid t_{ii} = 0\Big\}$.
En effectuant des opérations élémentaires, on peut trouver une matrice inversible Ω' telle que $\Omega' T =$

La colonne d'indice j_0 est donc combinaison linéaire des premières colonnes de $\Omega' T$.
Il existe donc une colonne X non nulle telle que $(\Omega' T)X = 0$.
Puis $\Omega'\Omega AX = 0$. En multipliant par $(\Omega'\Omega)^{-1}$, on obtient $AX = 0$ (où X est une colonne non nulle!).

Matrices
Systèmes linéaires

preuve et éléments de correction

13

On a $A^2 = (CL)(CL)$ qui est donc égal, par associativité du produit matriciel à $C(LC)L$.
On remarque que la matrice LC est carrée de taille 1.
Elle possède qu'un seul coefficient, que l'on note λ.
On a donc $A^2 = C[\lambda]L$.
Or on a $C[\lambda] = \lambda C$ (faire un calcul par le dessin pour s'en convaincre si besoin).
D'où $A^2 = \lambda CL$, c'est-à-dire $A^2 = \lambda A$.

20

Supposons $\left(\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX\right)$.
Montrons que $A = B$, en montrant que $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Col}_j(A) = \mathrm{Col}_j(B)$.
Soit $j \in [\![1,p]\!]$.
Appliquons l'hypothèse à $X = E_j$. On a alors $AE_j = BE_j$.
D'où $\mathrm{Col}_j(A) = \mathrm{Col}_j(B)$.

23

Penser à se faire la main avec des matrices de taille 2, puis de taille 3.
Ensuite généraliser ce que vous avez vu.
Pour $n = 2$, écrivons $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On a alors $AA^\top = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$.
Ainsi, si l'on suppose $AA^\top = 0$, on a alors $a^2+b^2 = 0$ et $c^2+d^2 = 0$.
D'où $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 0$. Ainsi, $A = 0$.

Pour n quelconque, on examine les coefficients de la diagonale de $AA^\top$.
• Exprimons d'abord tous les coefficients.
Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$.
On a

$$\mathrm{coeff}_{i,j}(AA^\top) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{coeff}_{i,k}(A)\mathrm{coeff}_{k,j}(A^\top) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{coeff}_{i,k}(A)\mathrm{coeff}_{j,k}(A)$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,i) vaut :

$$\mathrm{coeff}_{i,i}(AA^\top) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{coeff}_{i,k}(A)^2$$

• Supposons maintenant $AA^\top = 0$.
En particulier, tous les coefficients de la diagonale sont nuls, d'où :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{coeff}_{i,k}(A)^2 = 0$$

C'est une somme de réels positifs nulle, donc tous les réels sont nuls :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{coeff}_{i,k}(A) = 0$$

On vient de montrer que tous les coefficients de A sont nuls, donc $A = 0$.

31

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons que $\quad \exists!\,(S,A) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \begin{cases} \text{i) } S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \\ \text{ii) } A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \\ \text{iii) } M = S + A \end{cases}$.

Raisonnons par Analyse-Synthèse.

Analyse. Soit (S, A) un tel couple.

On applique la transposée à l'égalité iii).

Par linéarité de l'application transposée, on a :

$$M^\top = S^\top + A^\top$$

On utilise maintenant i) et ii). Ainsi, $S^\top = S$ et $A^\top = -A$.

On a donc les deux égalités

$$\begin{cases} M = S + A \\ M^\top = S^\top + A^\top \end{cases}$$

Par somme et différence, on obtient

$$S = \frac{M + M^\top}{2} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{M - M^\top}{2}$$

Synthèse. On pose (S, A) le couple défini par

$$S = \frac{M + M^\top}{2} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{M - M^\top}{2}$$

On vérifie les points i), ii) et iii)

- i) Montrons que $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
  On a
  $$S^\top = \frac{M^\top + (M^\top)^\top}{2} = \frac{M^\top + M}{2} = \frac{M + M^\top}{2} = S$$
- ii) Montrons que $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
  On a
  $$A^\top = \frac{M^\top - (M^\top)^\top}{2} = \frac{M^\top - M}{2} = -\frac{M - M^\top}{2} = -A$$
- iii) Montrons que $M = S + A$.
  On a
  $$S + A = \frac{M + M^\top}{2} + \frac{M - M^\top}{2} = M$$

On a donc montré que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exists! (S, A) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \begin{cases} \text{i) } S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \\ \text{ii) } A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \\ \text{iii) } M = S + A \end{cases}$$

52

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de B_x ce qui ne change pas son caractère inversible.

$$B_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & -3 & -6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & -3 & -6 \\ . & -6 & x-21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & -6 & x-21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & . & x-9 \end{bmatrix}$$

On a donc l'équivalence :

$$B_x \text{ inversible} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & . & x-9 \end{bmatrix} \text{ inversible}$$

On utilise maintenant le critère d'inversibilité pour les matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & . & x-9 \end{bmatrix} \text{ inversible} \iff x-9 \neq 0$$

Bilan :

$$B_x \text{ inversible} \iff x \neq 9$$

55

On va utiliser le principe suivant « Si en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de Z on arrive à faire apparaître la matrice identité I, alors la matrice Z est inversible. Dans ce cas, l'inverse de Z s'obtient en faisant subir à la matrice identité I les mêmes opérations élémentaires. »

$$Z=\begin{bmatrix} . & 7 & 3\\ 1 & . & 2\\ -1 & 5 & . \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2\\ . & 7 & 3\\ -1 & 5 & . \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3+L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2\\ . & 7 & 3\\ . & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{1}{7}L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2\\ . & 1 & 3/7\\ . & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1/7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3-5L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2\\ . & 1 & 3/7\\ . & . & -1/7 \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1/7 & 0 & 0\\ -5/7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

à ce stade, on peut dire que Z est inversible

$$L_3 \leftarrow -7L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2\\ . & 1 & 3/7\\ . & . & 1 \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1/7 & 0 & 0\\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2-\tfrac{3}{7}L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2\\ . & 1 & .\\ . & . & 1 \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 3\\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1-2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & .\\ . & 1 & .\\ . & . & 1 \end{bmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{bmatrix} -10 & 15 & 14\\ -2 & 3 & 3\\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

On en déduit que Z et inversible et $Z^{-1}=\begin{bmatrix} -10 & 15 & 14\\ -2 & 3 & 3\\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$.

56

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de V, ce qui ne change pas son caractère inversible.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 2 & -9 & -47 & 16 \\ -4 & 10 & 38 & 1/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 0 & -3 & -21 & 12 \\ 0 & -2 & -14 & 25/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{-1}{3} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & -2 & -14 & 25/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice E obtenue à partir de V à partir d'opérations élémentaires n'est pas inversible (elle est triangulaire supérieure avec au moins un 0 sur la diagonale), donc V n'est pas inversible.