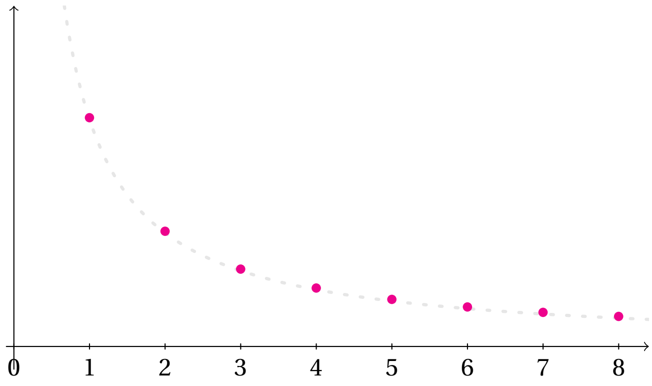
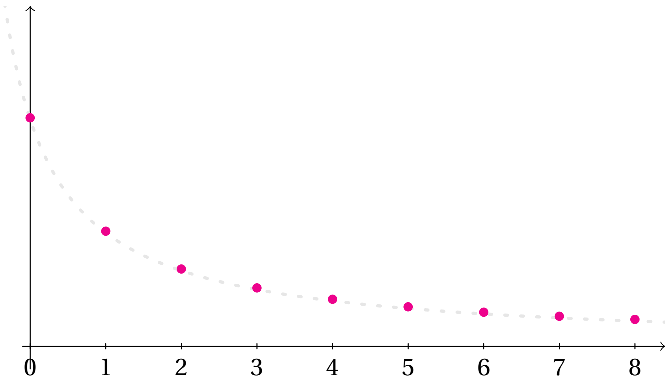
Suites numériques

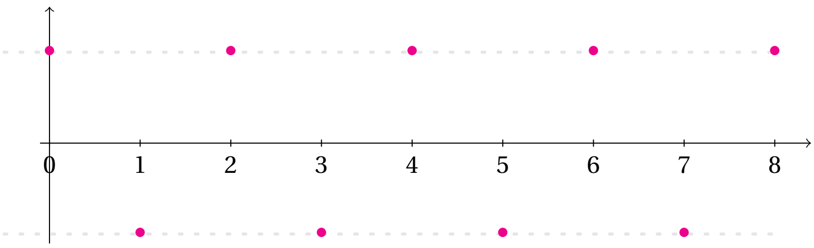
I. Des exemples à graver dans votre tête

- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

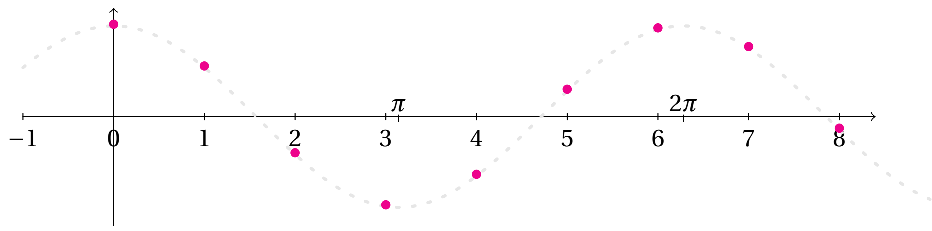




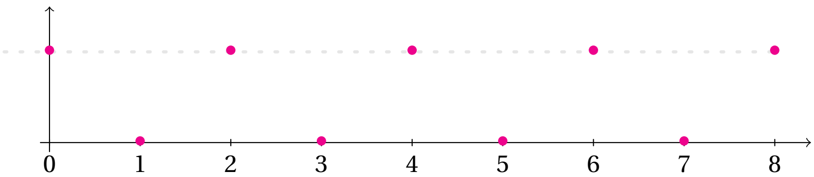
- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$



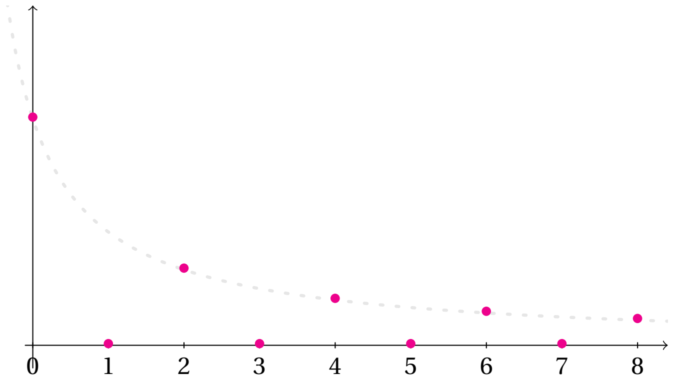
- La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$



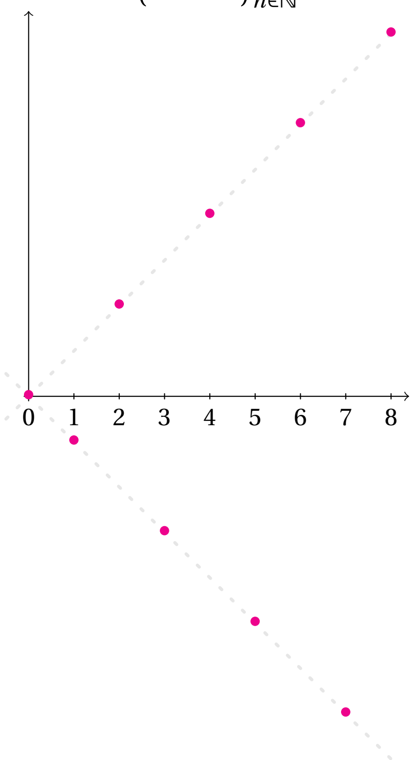
- La suite u de terme général $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ou encore $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$



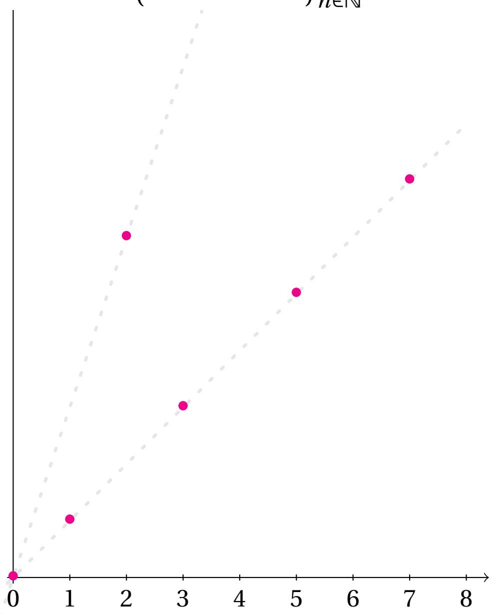
- La suite u de terme général $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ou encore $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}\frac{1}{n+1}$.



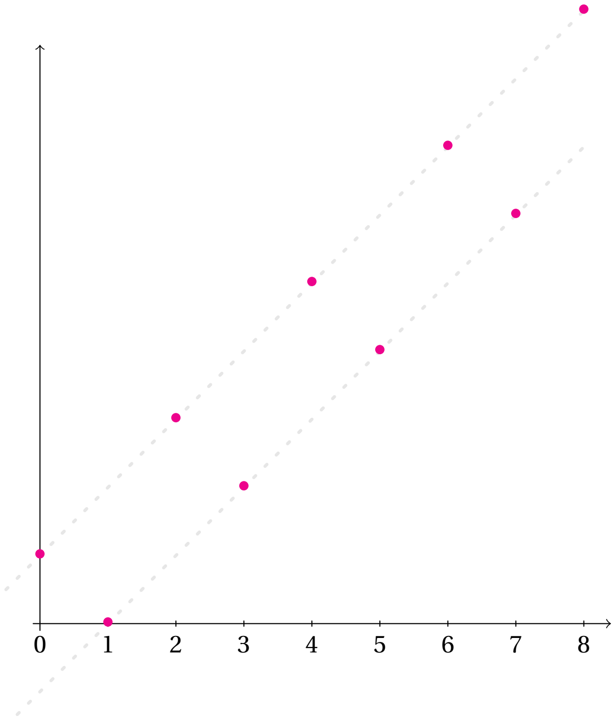
• La suite $\left(n(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$



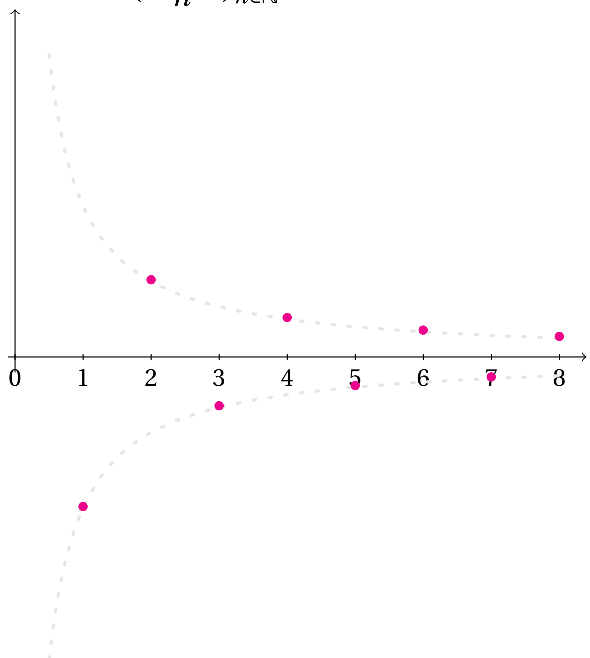
• La suite $\left(n\left((-1)^n+2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$



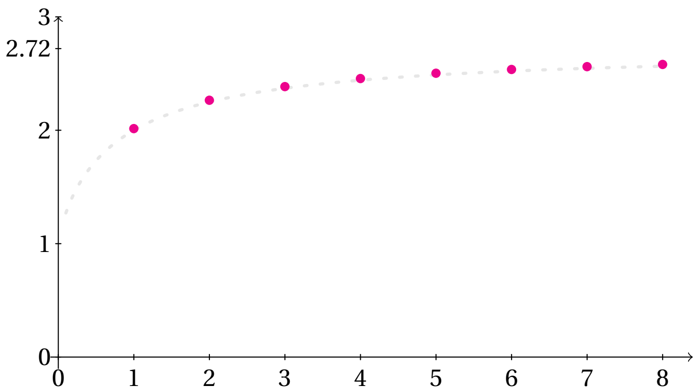
• La suite $\left(n+(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$



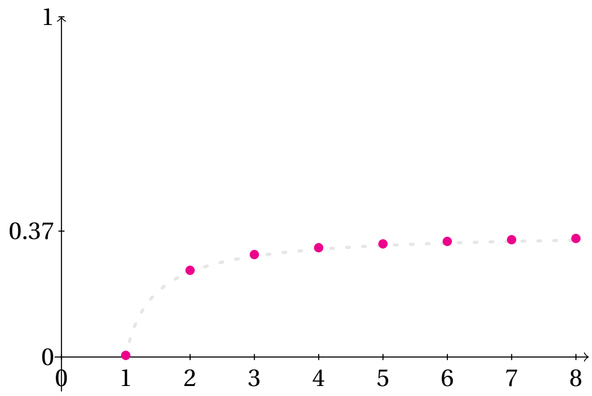
• La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$



• La suite $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$



• La suite $\left((1-\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$



Suite arithmétique, Suite géométrique

- Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est arithmétique lorsqu'il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que son terme général vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On démontre alors par récurrence que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$

- Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'il existe $q \in \mathbb{C}$ tel que son terme général vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

On démontre alors par récurrence que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n.$

Suite arithmético-géométrique

1 **Définition.** Une suite u est arithmético-géométrique lorsque son terme général u_n vérifie une relation du type

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b \qquad \text{avec } a \neq 1 \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

2 **Proposition.**
Pour une suite u arithmético-géométrique comme ci-dessus, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; (u_0 - \gamma) a^n + \gamma \qquad \text{où } \gamma = \frac{b}{1-a}.$$

- **Remarque.** Il ne faut pas apprendre ce résultat, en revanche, il faut apprendre la preuve.
Notamment le fait que γ est l'unique complexe tel que $\gamma = a\gamma + b$.

3 **Question.** Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3} u_n + 4 \end{cases}$ Donner une expression de u_n.

sol → 33

Suite récurrente linéaire d'ordre 2

4 **Définition.**
Une suite u est *récurrente linéaire d'ordre* 2 lorsque son terme général u_n vérifie une relation du type

$$\bigstar_{b,c} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \qquad \text{avec } b, c \in \mathbb{C}$$

- **Vocabulaire.** L'équation $x^2 + bx + c = 0$ va jouer un rôle important, on la note $\text{ÉC}_{b,c}$.
C'est l'équation caractéristique associée à la suite u.
- **Remarque.** On sait traiter à la main le cas $c = 0$, car on a alors $u_{n+2} = -b u_{n+1}$ et on est ramené à l'étude d'une suite géométrique.

5 **Théorème (cas complexe).**
Soit u une suite *complexe* vérifiant la relation $\bigstar_{b,c}$ où $b, c \in \mathbb{C}$.
Notons Δ le discriminant de l'$\text{ÉC}_{b,c}$ de u, à savoir $x^2 + bx + c = 0$.

— Cas $\Delta \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions complexes distinctes de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n.$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons z_0 l'unique solution de $\text{ÉC}_{b,c}$ *que l'on suppose différente de* 0.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda z_0^n + \mu n z_0^n.$$

- **Reformulation importante.** Le théorème se reformule en disant
  — Si $\text{ÉC}_{b,c}$ admet deux solutions distinctes $z_1 \neq z_2$, alors la suite u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des deux suites $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  — Si $\text{ÉC}_{b,c}$ admet une solution double *non nulle*, alors la suite u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des deux suites $(z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nz_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La **preuve** repose sur trois lemmes essentiels :

  Lemme de la racine. Si z est racine de $\text{ÉC}_{b,c}$, alors la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\bigstar_{b,c}$.

  Lemme d'unicité. Si u et v sont deux suites vérifiant $\bigstar_{b,c}$ et telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, alors les suites u et v sont égales.

  Lemme de stabilité. Si u et v sont deux suites vérifiant $\bigstar_{b,c}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ deux scalaires, alors la suite $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie $\bigstar_{b,c}$.
- **Remarque.** Ce théorème ne couvre pas tous les cas : il manque le cas où $\text{ÉC}_{b,c}$ admet la solution double 0. Mais ce cas est facile à traiter : il s'agit du cas où $b = c = 0$, donc du cas des suites u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0$. Une telle suite est entièrement déterminée par son zéroième terme et son premier terme.

6 **Théorème (cas réel).**
Soit u une suite *réelle* vérifiant la relation $\bigstar_{b,c}$ où $b, c \in \mathbb{R}$.
Notons Δ le discriminant de l'$\text{ÉC}_{b,c}$ de u, à savoir $x^2 + bx + c = 0$.

— Cas $\Delta > 0$. Notons x_1 et x_2 les deux solutions réelles distinctes de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons x_0 l'unique solution de $\text{ÉC}_{b,c}$ *que l'on suppose différente de* 0.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_0^n + \mu n x_0^n$$

— Cas $\Delta < 0$. Notons $z = re^{i\theta}$ l'une des deux solutions complexes conjuguées de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A r^n \cos(n\theta) + B r^n \sin(n\theta)$$

7 **Question.** Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ Déterminer u_n en fonction de n.

sol → 33

Opérations

L'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Il est muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \lambda\cdot u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Il est également muni d'une loi $\times$ définie par $u \times v = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a accès à la relation d'ordre usuelle $\leqslant$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on n'a pas accès à $\leqslant$.

Monotonie, dans le cas réel

8 **Définition.** Soit u une suite **réelle**.
On dit que u est :

— *croissante* lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

— *strictement croissante* lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.

— *croissante à partir d'un certain rang* lorsque $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

— *stationnaire* lorsque $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ u_n = u_{n+1}$.

Remarques.

- Une suite u est croissante si et seulement si la suite $-u$ est décroissante.
- Une suite est *monotone* lorsqu'elle est ou bien croissante, ou bien décroissante.

9 sol → 34 **Question.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
Que vaut x_1 ?
Montrer que la suite (x_n) est monotone.

10 sol → 34 **Question.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$
Montrer que u est monotone.

Caractère borné

11 **Définition.** Soit u une suite **réelle**. On dit que u est

— *majorée* lorsque $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$

— *minorée* lorsque $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$

— *bornée* lorsque u est majorée et minorée, ou encore lorsque $\exists\, K \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K$

12 **Lemme (caractère asymptotique du caractère borné).**
Si une suite est bornée à partir d'un certain rang, alors elle est bornée.

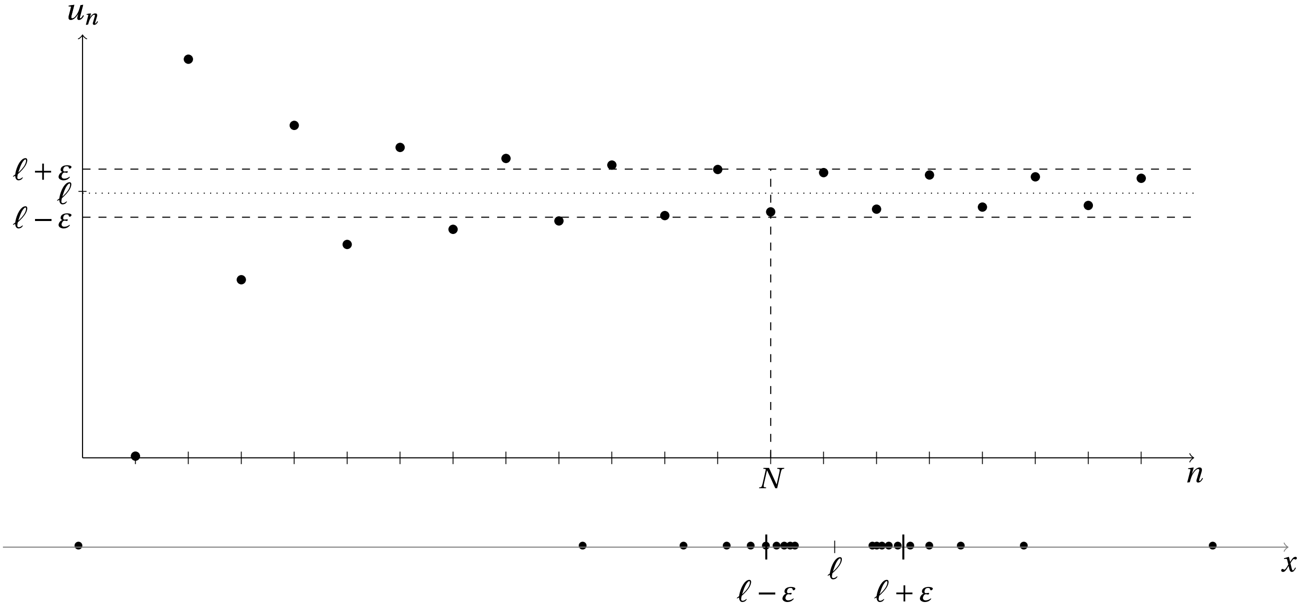
- **Remarque fondamentale.** C'est une des premières apparitions d'un grand principe dans l'étude des suites : on peut souvent se concentrer sur ce qui se passe à partir d'un certain rang car « avant ce certain rang », il n'y a qu'un nombre *fini* de cas à tester.

13 **Question.** Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. En utilisant que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour $k \geqslant 2$, montrer que la suite S est majorée.

II. Limites

Suite convergente : limite finie

Un exemple de suite réelle convergente.



14 **Définition.** Soit u une suite.

— Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que u *tend vers* ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

— On dit que u *converge* lorsque :

$$\exists \ell \in \mathbb{K}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

— On dit que u *diverge* lorsque u ne converge pas.

- **Exemple.** Montrons à l'aide de la définition que $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

15 preuve **Proposition (Unicité de la limite).**
Soit u une suite et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{K}$ tels que $u_n \to \ell_1$ et $u_n \to \ell_2$. Alors $\ell_1 = \ell_2$.

16 **Proposition (limite nulle).** Soit u une suite et $\ell \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$$u_n \to \ell \quad \iff \quad |u_n - \ell| \to 0$$

- **Preuve.** On constate que les deux assertions sont équivalentes (voire identiques ici !) :
L'assertion de gauche est $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
L'assertion de droite est $\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N', \Big||u_n - \ell| - 0\Big| \leqslant \varepsilon'$

17 **Proposition (CV $\Rightarrow$ bornée).**
Toute suite convergente est bornée.
La réciproque est fausse, par exemple la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas.

18 **Proposition (caractère asymptotique de la limite).** Soit $\ell \in \mathbb{K}$.
Soit u et v deux suites coïncidant à partir d'un certain rang.
Si $u_n \to \ell$ alors $v_n \to \ell$.

Limite finie et inégalités pour les suites réelles

19 preuve **Proposition (Passage à la limite dans les inégalités larges).**
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **réelles**. Soit ℓ et ℓ' deux réels.
On a l'implication suivante :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u'_n \\ u \text{ converge vers } \ell \\ u' \text{ converge vers } \ell' \end{cases} \implies \quad \ell \leqslant \ell'$$

- **Amélioration.** On a mieux :

$$\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang} \quad u_n \leqslant u'_n \\ u \text{ converge vers } \ell \\ u' \text{ converge vers } \ell' \end{cases} \implies \quad \ell \leqslant \ell'$$

- Cas particulier (avec une suite constante).

$$\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang} \quad u_n \leqslant 2023 \\ u \text{ converge vers } \ell \end{cases} \implies \quad \ell \leqslant 2023$$

- Cas particulier (avec une égalité).

$$\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang} \quad u_n = u'_n \\ u \text{ converge vers } \ell \\ u' \text{ converge vers } \ell' \end{cases} \implies \quad \ell = \ell'$$

- **Attention, Attention, Attention.** $$\cancel{\begin{cases} \text{àpcr, } u_n < u'_n \\ u \text{ converge vers } \ell \\ u' \text{ converge vers } \ell' \end{cases} \implies \quad \ell < \ell'}$$

  C'est un phénomène fondamental en analyse : les inégalités larges sont plus stables que les inégalités strictes. Il est bon d'en prendre conscience et de considérer les inégalités larges comme le cas « par défaut », et d'avoir des scrupules à chaque fois qu'on écrit une inégalité stricte.

- **Sur sa copie.** Pour utiliser le « passage à la limite », il faut savoir que les limites existent et sont finies !
  On écrira : « En passant à la limite (licite, car chaque limite existe et est finie), on obtient ... ».

20 **Proposition (quand la limite est strictement positive).**
Soit u une suite **réelle** telle que $u_n \to \ell$.
Si $\ell > 0$, alors à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont strictement positifs.

- **Remarque.** Soit u une suite à valeurs complexes telle que $u_n \to \ell \in \mathbb{C}$.
  Si $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont non nuls (WHY, ce n'est pas évident).

21 **Définition.**
Soit u une suite **réelle**.

— On dit que u tend vers $+\infty$ lorsque

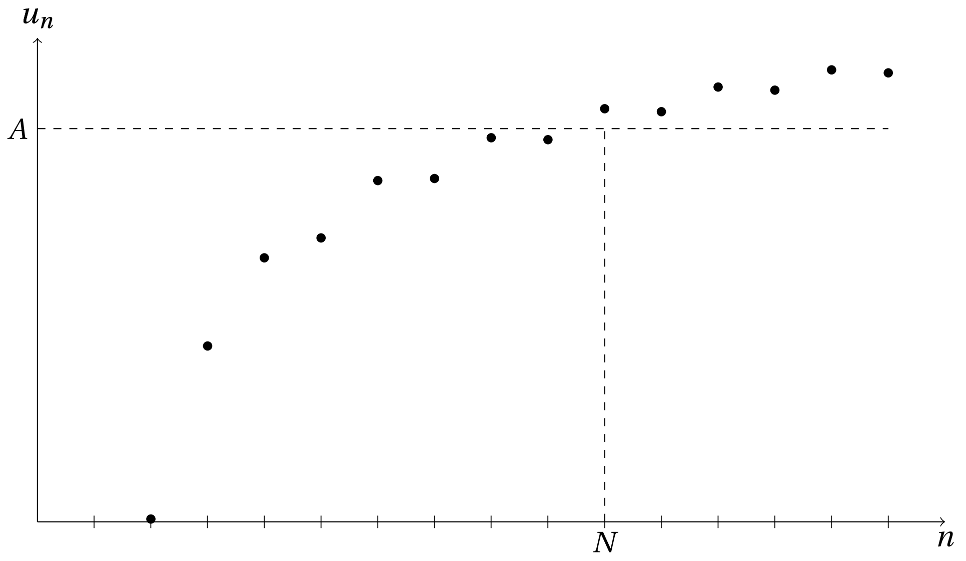
$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

On note $u_n \to +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

— On dit que u tend vers $-\infty$ lorsque

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ u_n \leqslant A$$

On note $u_n \to -\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Exemples.

- On a $n^2 \to +\infty$.
- Une suite qui tend vers $+\infty$ sans être croissante ....

Limite et suite extraite

22 **Définition.** Soit u une suite.
Une suite extraite de u est une suite v du type $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

23 **Proposition.**
Si u admet une limite (finie ou infinie), alors toute suite extraite de u admet une limite (qui est la même que celle de u).

Corollaire.

— Si u admet une limite (finie ou infinie), alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent une limite, qui est la même que celle de u.

— Si (u_{2n}) n'admet pas de limite **ou** si (u_{2n+1}) n'admet pas de limite, alors u n'a pas de limite.

— Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent une limite différente, alors la suite u n'a pas de limite.

- **Exemple.** La suite $u = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, en particulier diverge.

24 **Proposition.** Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On a l'implication suivante :

$$\begin{cases} u_{2n} \to L \\ u_{2n+1} \to L \end{cases} \implies u_n \to L$$

Nature

25 **Définition (Nature d'une suite).**
Une suite est ou bien convergente ou bien divergente.
Donner sa nature, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

- **Attention.**
Une suite admet une limite ou bien n'admet pas de limite.
Une suite est convergente ou bien divergente.

- **Exemple.**
Une suite divergente admettant une limite ....

Une suite sans limite et non bornée ....

Le lemme très utile

26 **Lemme très utile.**

— Le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0.

— La somme d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers $+\infty$ est une suite qui tend vers $+\infty$.

- **Remarque.** Ce lemme est très utilisé dans la pratique, et en plus, il permet de prouver toutes les propriétés d'opérations de la page suivante.

III. Opérations sur les limites

Pour donner de façon plus concises les propriétés de la limite par rapport aux opérations algébriques, il est pratique d'étendre un peu l'ensemble des nombres réels en travaillant avec l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On a

$+$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**X**
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**X**	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**X**	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	**X**	0	0	0	**X**
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**X**	$+\infty$	$+\infty$

27 **Proposition (limites finies ou infinies).** Soit u et u' deux suites, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\boxed{L, L' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}$.

- **loi** $\cdot$

$$u_n \to L \quad \Longrightarrow \quad \lambda u_n \to \begin{cases} \lambda L & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

En multipliant par un scalaire une suite-ayant-une-limite, on obtient une suite ayant une limite.

- **loi** $+$

$$\begin{cases} u_n \to L \\ u'_n \to L' \\ L + L' \text{ existe} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n + u'_n \to L + L'$$

La limite de la-somme-de-deux-suites-ayant-une-limite existe, sauf dans le cas $(+\infty) + (-\infty)$.

- **loi** $\times$

$$\begin{cases} u_n \to L \\ u'_n \to L' \\ LL' \text{ existe} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n u'_n \to LL'$$

La limite du produit-de-deux-suites-ayant-une-limite existe, sauf dans le cas $0 \times (\pm\infty)$.

- **Cas particulier des suites convergentes.** Soit u et u' deux suites, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\boxed{\ell, \ell' \in \mathbb{R}}$.

- **loi** $\cdot$

$$u_n \to \ell \quad \Longrightarrow \quad \lambda u_n \to \lambda \ell$$

En multipliant par un scalaire une suite convergente, on obtient une suite convergente.

- **loi** $+$

$$\begin{cases} u_n \to \ell \\ u'_n \to \ell' \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n + u'_n \to \ell + \ell'$$

La somme de deux suites convergentes est une suite convergente, et la limite de la somme est la somme des limites.

- **loi** $\times$

$$\begin{cases} u_n \to \ell \\ u'_n \to \ell' \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n u'_n \to \ell\ell'$$

Le produit de deux suites convergentes est une suite convergente, et la limite du produit est le produit des limites.

28 **Proposition (opérations et nature).** Tout se passe bien avec les suites convergentes :

$$\lambda \cdot \text{CV} = \text{CV} \qquad \text{CV} + \text{CV} = \text{CV} \qquad \text{CV} \times \text{CV} = \text{CV}$$

Par ailleurs, CV + DV = DV.

- **Attention.** C'est plus délicat avec les suites divergentes :

$$\lambda \cdot \text{DV} = \begin{cases} \text{DV} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \text{constante égale à } 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \qquad \cancel{\text{DV} + \text{DV} = \text{DV}} \qquad \cancel{\text{DV} \times \text{DV} = \text{DV}}$$

- **Très pratique.** On a (WHY)

$$\begin{cases} a_n - b_n \to 0 \\ b_n \to \ell \end{cases} \implies a_n \to \ell$$

Limite et passage à l'inverse

29 preuve **Proposition (inverse).**

— Si $\begin{cases} u_n \to \ell \\ \ell \neq 0 \end{cases}$ alors $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.

— Si $u_n \to +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to 0$.

— Si $\begin{cases} u_n \to 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \end{cases}$ alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.

- **Remarque.** Dans l'énoncé précédent, il n'est pas dit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, alors que l'on voit écrit $\dfrac{1}{u_n}$.
Ce n'est pas un oubli ! Quand on écrit $\dfrac{1}{u_n} \to$ truc, on sous entend que $\dfrac{1}{u_n}$ a du sens *au moins à partir d'un certain rang*.
Est-ce le cas dans les trois points de la proposition ?
Par exemple, dans le premier point, le fait que $u_n \to \ell$ avec $\ell \neq 0$ implique qu'à partir d'un certain rang tous les termes sont non nuls.

Passage à la limite dans les égalités

30 **Principe (Passage à la limite dans les égalités).**
Si chaque suite intervenant dans une égalité admet une limite (finie ou infinie), on peut passer à la limite dans l'égalité en utilisant les règles opératoires usuelles et en déduire, si cela a du sens, une égalité d'éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

31 **Question.** Soit u une suite à termes strictement positifs, et convergente, telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Déterminer la limite de u.

32 **Proposition (composition de limites du type suite/fonction).**
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un élément de I ou bien une borne de I.
Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ \varphi(t) \xrightarrow[t\to\ell]{} L \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \varphi(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

33 **Corollaire (image d'une suite convergente par une fonction continue).**
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I.
Soit $\ell \in I$.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ \varphi \text{ continue en } \ell \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \varphi(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\ell)$$

L'image d'une suite convergente par une fonction continue est une suite convergente.

34 **Question.** Déterminer les limites de :

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n \qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad d_n = \left(n+\frac{1}{n}\right)^3 \qquad e_n = \left(n+\frac{1}{n}\right)^n$$

IV. Théorèmes fondamentaux d'existence de limites (suite réelle)

Théorème de la limite monotone

Voici un théorème que je nomme souvent abusivement « LE théorème d'existence de limite ».
Il est vraiment très puissant.

35 preuve **Théorème de la limite monotone.**

♡ *Une suite monotone possède une limite (finie ou infinie).*

Précisément,

— Une suite croissante majorée converge. De plus, la suite est majorée par sa limite.

— Une suite croissante NON majorée tend vers $+\infty$.

Résultats analogues avec « décroissante » :

— Une suite décroissante minorée converge. De plus, la suite est minorée par sa limite.

— Une suite décroissante NON minorée tend vers $-\infty$.

- **Remarque importante.** Dans la preuve, on a vu le résultat suivant :
  Une suite croissante qui converge est majorée par sa limite.

36 **Question.**

Soit $(H_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

— Montrer que la suite H est croissante.

— Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

— Que peut-on en déduire sur la limite de H ?

Théorèmes d'existence de limite avec valeur de la limite

37 **Théorème des Gendarmes.** Soit u, g, d trois suites et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ g_n \leqslant u_n \leqslant d_n \quad \text{(ou encore àpcr)} \\ g_n \to \ell \\ d_n \to \ell \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \text{la limite de } u \text{ existe et vaut } \ell$$

- **Corollaire du th. des Gendarmes.**
  On a :

$$\begin{cases} \text{àpcr, } |u_n - \ell| \leqslant w_n \\ w_n \to 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n \to \ell$$

38 **Théorème de majoration/minoration**

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ g_n \leqslant u_n \quad \text{(ou encore àpcr)} \\ g_n \to +\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \text{la limite de } u \text{ existe et vaut } +\infty$$

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant d_n \quad \text{(ou encore àpcr)} \\ d_n \to -\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \text{la limite de } u \text{ existe et vaut } -\infty$$

39 **Proposition (Suite géométrique).** Soit $q \in \mathbb{R}$.

— **Limite.**

$$\text{La suite } (q^n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{n'a pas de limite} & \text{si } q \leqslant -1 \\ \text{tend vers } 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{est constante égale à } 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{tend vers } +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

En particulier,

$$q^n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q \in \,]-1,1[$$

— **Nature.**
La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\Big(q \in \,]-1,1[\text{ ou } q = 1\Big)$.

- **Reformulation.**

$$\text{La suite } (q^n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{converge} & \text{si } q \in \,]-1,1[\text{ ou } q = 1 \\ \text{diverge} & \text{sinon} \end{cases}$$

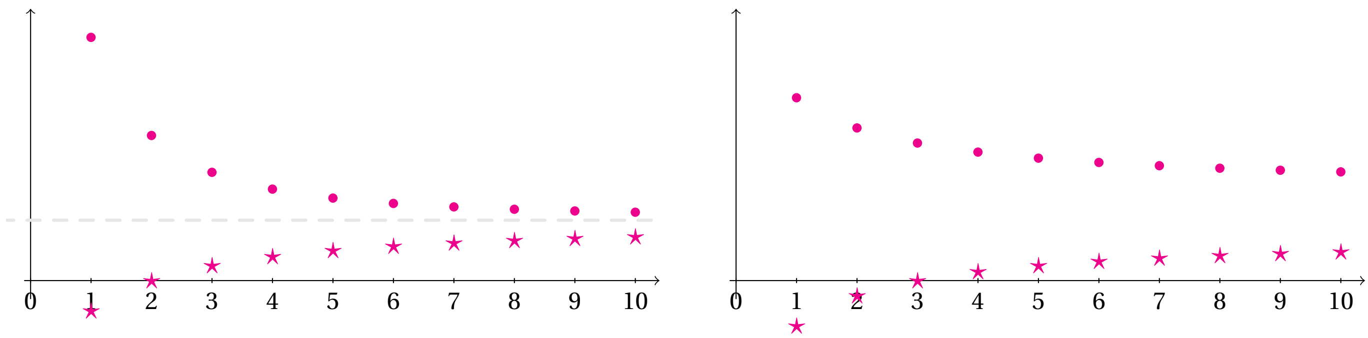
V. Suites adjacentes

40 **Un lemme (apprendre la preuve).** Soit u et v deux suites. Montrer que

$$\begin{cases} u \text{ est croissante} \\ v \text{ est décroissante} \\ v-u \text{ positive} \end{cases} \implies u \text{ et } v \text{ convergent}$$

En notant ℓ_u et ℓ_v les limites de u et v, montrer que

$$\forall\, p,q \in \mathbb{N}, \quad u_p \leqslant \ell_u \leqslant \ell_v \leqslant v_q$$



41 **Définition.** Deux suites sont adjacentes lorsque
- l'une est croissante
- l'autre est décroissante
- leur différence tend vers 0

42 **Théorème (convergence des suites adjacentes).** Soit u et v deux suites.

$$\begin{cases} u \text{ est croissante} \\ v \text{ est décroissante} \\ v-u \text{ tend vers } 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u \text{ et } v \text{ convergent vers } \ell \in \mathbb{R} \\ \forall\, p,q \in \mathbb{N},\ u_p \leqslant \ell \leqslant v_q \end{cases}$$

- On peut retenir un énoncé un peu moins précis, mais intéressant :

  ♡ *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

43 sol → 36 **Question.** Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$C_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} \qquad\qquad D_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+n}$$

Montrer que C et D sont adjacentes.

44 sol → 36 **Question.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) u_n$$

En reprenant les mêmes idées que la preuve du lemme, montrer que les suites u et v convergent.

45 **Définition/Proposition (Approximation décimale).**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre décimal $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ vérifie $\quad r_n \leqslant x < r_n + 10^{-n}$.
Ce nombre décimal r_n est appelé *approximation décimale par défaut* de x à la précision 10^{-n}.
La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de *rationnels*, croissante, qui converge vers le réel x.

- Avec les notations de la définition précédente, le nombre $r_n + 10^{-n}$ est appelé *approximation décimale par excès* de x à la précision 10^{-n}.
- Voici un tableau donnant, pour quelques constantes usuelles, les valeurs décimales approchées à 10^{-3} près par défaut et par excès :

	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	π	e	ln(2)
par défaut à 10^{-3} près	1,000	1,414	1,732	3,141	2,718	0,693
par excès à 10^{-3} près	1,001	1,415	1,733	3,142	2,719	0,694

46 **Théorème des segments emboîtés.**
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments non vides $I_n = [a_n, b_n]$ tels que

— $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n$

— la longueur de I_n vérifie $b_n - a_n \to 0$.

Alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même point c, qui est l'unique point appartenant à tous les intervalles $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}$.

- L'énoncé est plutôt à comprendre qu'à apprendre. Il se reformule en une seule phrase :

  L'intersection d'une suite décroissante de segments non vides dont la longueur tend vers 0 *est un singleton.*

- **Preuve.**

  — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} \subset I_n$, donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.
  Donc la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante.

  — Par hypothèse $b_n - a_n \to 0$.

  On en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
  Ainsi, elles convergent vers une même limite.
  Notons c leur limite commune.

  — On a (WHY?) $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad$ c'est-à-dire $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ c \in I_n$
  Donc $c \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

  — Pour l'autre inclusion, prenons $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
  On a alors $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
  Passons à la limite dans les inégalités larges (licite, car chaque terme admet une limite), on obtient $c \leqslant x \leqslant c$, d'où $x = c$.

  Bilan : $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}$.

VI. Extension des notions aux suites à valeurs complexes

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit :

— la *partie réelle* de u, notée $\operatorname{Re} u$, la suite réelle de terme général $\operatorname{Re} u_n$

— la *partie imaginaire* de u, notée $\operatorname{Im} u$, la suite réelle de terme général $\operatorname{Im} u_n$

— la suite *conjuguée de* u, notée $\overline{u}$, la suite de terme général $\overline{u_n}$

— la suite *module de* u, notée $|u|$, la suite réelle de terme général $|u_n|$

47 **Définition.**

— Une suite complexe u est *bornée* lorsque la suite *réelle* module de u est bornée, c'est-à-dire lorsque $\exists K\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant K$.

— Une suite complexe u *converge* lorsqu'il existe $\ell\in\mathbb{C}$ telle que la suite *réelle* $\big(|u_n-\ell|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

$$\exists \ell\in\mathbb{C},\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant N,\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$$

48 **Proposition.** Soit u une suite complexe.

— **Unicité de la limite.** S'il existe $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{C}$ tels que $u_n\to\ell_1$ et $u_n\to\ell_2$ alors $\ell_1=\ell_2$.

— **Passage au module.** Si $u_n\to\ell\in\mathbb{C}$, alors $|u_n|\to|\ell|$.

Si la suite u converge vers ℓ, la suite réelle « module de u » converge vers « module de ℓ ».

— **CV ⇒ borné.** Si u converge, alors u est bornée.

- **Preuve de l'unicité de la limite.** On peut refaire la même preuve que précédemment (à vous).
Ou bien, on peut s'appuyer sur le cas réel. On a

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant|\ell_1-\ell_2|\ \leqslant\ |u_n-\ell_1|+|u_n-\ell_2|$$

Comme les suites *réelles* de terme général $|u_n-\ell_1|$ et $|u_n-\ell_2|$ tendent vers 0, par passage à la limite dans les inégalités larges (licite), on en déduit $0\leqslant|\ell_1-\ell_2|\leqslant 0$, d'où $\ell_1=\ell_2$.

- **Preuve du « passage au module ».** D'après la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \Big||u_n|-|\ell|\Big|\leqslant|u_n-\ell|$$

Comme la suite *réelle* de terme général $|u_n-\ell|$ tend vers 0, le théorème des Gendarmes appliqué aux suites réelles permet d'obtenir que la suite *réelle* de terme général $|u_n|-|\ell|$ tend vers 0, donc $|u_n|\to|\ell|$.

- **Preuve de « CV ⇒ borné ».** On peut refaire la même preuve que précédemment, ou bien dire :
Comme u converge, la suite *réelle* $|u|$ converge, donc est bornée (on sait déjà que toute suite réelle convergente est bornée).
En particulier, la suite réelle $|u|$ est majorée.
Par définition 47, on en déduit que la suite complexe u est bornée.

49 **Proposition.** Soit u une suite complexe et $\ell\in\mathbb{C}$.

— La suite *complexe* u est bornée si et seulement si les suites *réelles* $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont bornées.

— La suite *complexe* u converge si et seulement si les suites *réelles* $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ convergent.
Précisément, pour $\ell\in\mathbb{C}$, on a l'équivalence :

$$u_n\to\ell\qquad\Longleftrightarrow\qquad\Big(\operatorname{Re} u_n\to\operatorname{Re}\ell\ \text{ et }\ \operatorname{Im} u_n\to\operatorname{Im}\ell\Big)$$

- **Exemples.**

La suite u définie par $u_n = 1 + n^2\mathrm{i}$ ne converge pas (donc diverge) car la suite réelle $\operatorname{Im} u$ diverge (en effet, $\operatorname{Im} u$ est la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$).

La suite u définie par $u_n = \left(3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\right) + \left(7 + \dfrac{1}{\ln n}\right)\mathrm{i}$ converge vers $3 + 7\mathrm{i}$; en effet,

— la suite *réelle*, partie réelle de u, converge vers 3

— la suite *réelle*, partie imaginaire de u, converge vers 7

- **Opérations sur les limites complexes.**

Le deuxième point de l'énoncé permet de démontrer facilement que les opérations sur les limites finies se généralisent aux suites complexes.

Précisément, si u et u' sont deux suites complexes tendant respectivement vers $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$,

⋆ la suite $u + u'$ tend vers $\ell + \ell'$. En effet, la suite *réelle* $\operatorname{Re}(u + u')$ vaut $(\operatorname{Re} u_n + \operatorname{Re} u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tend (par opérations sur les limites de suites réelles) vers $\operatorname{Re} \ell + \operatorname{Re} \ell'$ qui vaut $\operatorname{Re}(\ell + \ell')$. Même argument pour la partie imaginaire. On a donc

$$\operatorname{Re}(u_n + u'_n) \to \operatorname{Re}(\ell + \ell') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(u_n + u'_n) \to \operatorname{Im}(\ell + \ell')$$

et la proposition précédente permet de conclure.

⋆ la suite uu' tend vers $\ell\ell'$. En effet, la suite *réelle* $\operatorname{Re}(uu')$ vaut $\operatorname{Re} u \operatorname{Re} u' - \operatorname{Im} u \operatorname{Im} u'$ et tend (par opérations sur les limites de suites réelles) vers $\operatorname{Re} \ell \operatorname{Re} \ell' - \operatorname{Im} \ell \operatorname{Im} \ell'$ qui vaut $\operatorname{Re}(\ell\ell')$. Même argument pour la suite $\operatorname{Im}(uu') = \operatorname{Re} u \operatorname{Im} u' + \operatorname{Re} u' \operatorname{Im} u$. On a donc

$$\operatorname{Re}(u_n u'_n) \to \operatorname{Re}(\ell\ell') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(u_n u'_n) \to \operatorname{Im}(\ell\ell')$$

et la proposition précédente permet de conclure.

- Pour résumer, on peut garder à l'esprit qu'une bonne partie des notions et propriétés valables sur les suites réelles se généralisent aux suites complexes, **sauf celles qui font intervenir des inégalités**.

Ainsi, à propos d'une suite complexe, on n'utilisera surtout **pas** :

— la notion de suite monotone ;

— la notion de suite majorée et/ou minorée ;

— la notion de suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$;

— le théorème d'encadrement ;

— les suites adjacentes.

50 **Proposition (Suite géométrique).** Soit $a \in \mathbb{C}$.

— **Limite.**

$$\text{La suite } (a^n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{tend vers } 0 & \text{si le module de } a \text{ est } < 1 \\ \text{est constante égale à } 1 & \text{si } a = 1 \\ \text{diverge} & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier,

$$a^n \to 0 \iff |a| < 1$$

— **Nature.**

La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\big(|a| < 1 \text{ ou } a = 1\big)$

VII. Suite récurrente

Retour sur le mode de définition d'une suite

- **Rappel.** Une suite peut être définie
  - de manière explicite ; par exemple la suite u de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
  - de manière implicite ; par exemple la suite u dont le terme général u_n est l'unique réel $x \in]0, +\infty[$ tel que $x + \ln x = n$.
  - par récurrence ; par exemple la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$

- **Étonnant.** On pourrait être tenté de dire qu'en posant $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, on définit une suite.

  Mais il n'en est rien !

  Contemplez $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1} \end{cases}$ Pour une telle suite, on aurait $u_1 = 2$, puis $u_2 = 1$, puis $u_3 = \dfrac{1}{0}\ldots$

  Autre exemple, $\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} - 2 \end{cases}$ On aurait $u_1 = 1$, puis $u_2 = -1$, puis $u_3 = \sqrt{-1} - 2\ldots$

  Autre exemple, $\begin{cases} u_0 = \frac{-1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$ On aurait, $u_1 = -\ln 2$, puis $u_2 = \ln(1 - \ln 2) \approx -1{,}181$, puis ?

51 **Proposition (suite récurrente d'ordre 1).**
Soit f une fonction réelle de la variable réelle.
Soit J un intervalle **stable** par f.

Alors la suite $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est bien définie et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$.

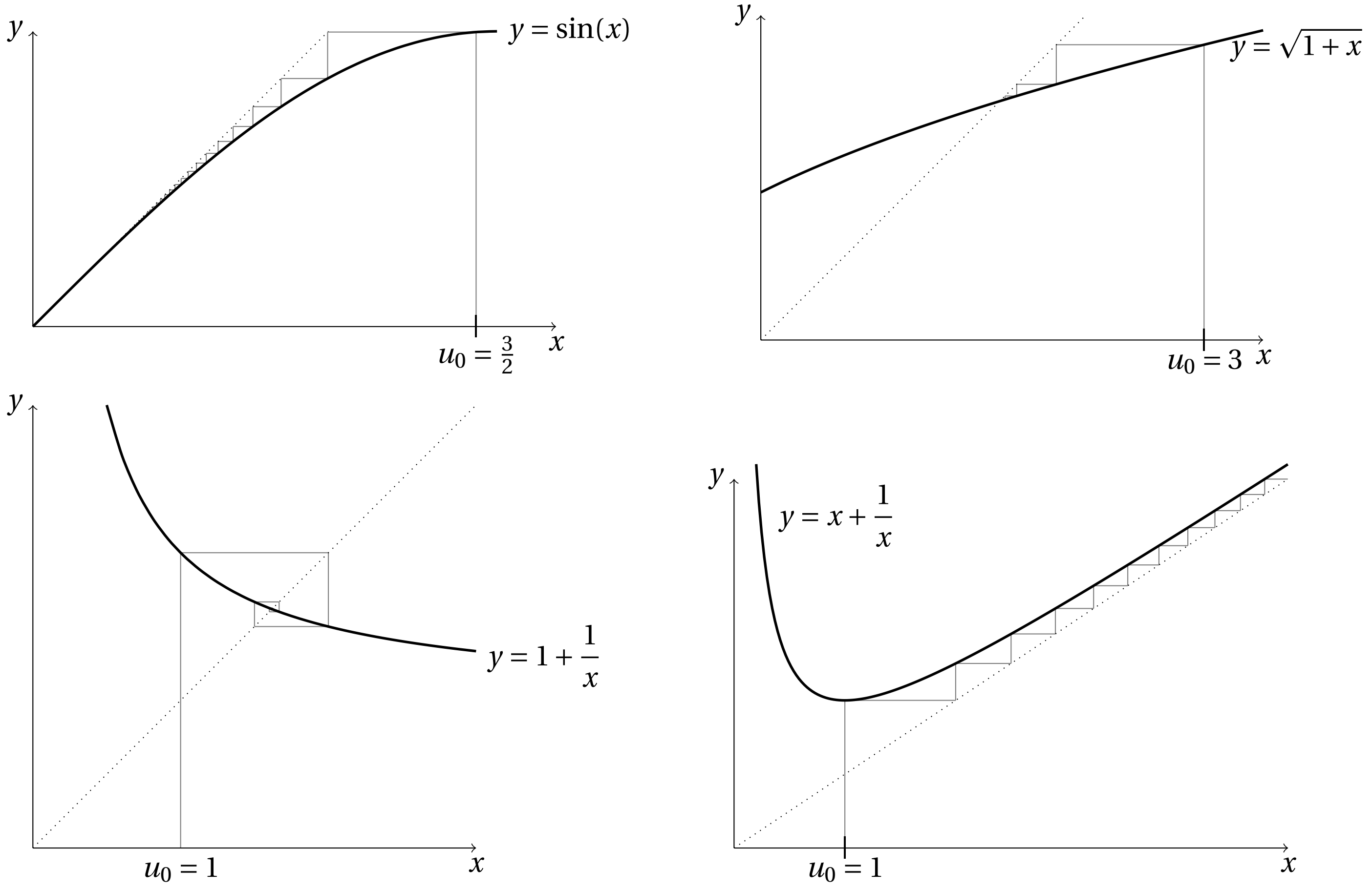
- Il faut essentiellement retenir :

$$\begin{cases} J \text{ stable par } f \\ u_0 \in J \end{cases} \implies \text{la suite ci-dessus est bien définie et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$$

52 **Question.** Voici quatre suites définies par récurrence

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

À l'aide des desssins, conjecturer la nature de chaque suite.



53 sol → 38 **Question.**

Justifier l'existence de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$ puis étudier sa nature.

54 **Proposition à ne pas apprendre, mais à redémontrer dans chaque cas particulier.**
Soit f une fonction réelle de la variable réelle et J un intervalle stable par f.

Soit u la suite $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Voici des situations non exhaustives.

i) **Si $f(x) - x$ est de signe constant.**
Si $\forall\, x \in J,\ x \leqslant f(x)$, alors u est croissante.
Si $\forall\, x \in J,\ f(x) \leqslant x$, alors u est décroissante.
Autrement dit,
si $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur J, alors u est monotone (croissante si φ est positive et décroissante sinon).

ii) **Si f est croissante.**
Si f est croissante sur J, alors u est monotone et son sens de variation est donné par la position de u_1 par rapport à u_0.
Autrement dit,
si f croissante sur J et si $u_0 \leqslant u_1$, alors u est croissante.
si $u_0 \geqslant u_1$, alors u est décroissante.

iii) **Si f est décroissante.**
Si f est décroissante sur J, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont montones de sens de variation contraire. Le sens de variation de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de la position de u_2 par rapport à u_0.
Autrement dit,
si f décroissante sur J et si $u_0 \leqslant u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
si $u_0 \geqslant u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

iv) **Cas f quelconque.**
À étudier au cas par cas.

55 **Proposition (cas des suites convergentes)**
Soit f une fonction réelle de la variable réelle et J un intervalle stable par f.

Soit u la suite $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On suppose que $u_n \to \ell$.
Si J est un intervalle **fermé**, alors $\ell \in J$.
Si de plus, f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

- Un intervalle fermé est défini par des inégalités **larges**.
Il est du type $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

VIII. Un peu d'analyse asymptotique

Croissances comparées des suites tendant vers $+\infty$

56 **Théorème (croissances comparées)**
Soit $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$.
Les suites ci-dessous tendent vers $+\infty$

$$(\ln n)^\beta \qquad n^\alpha \qquad a^n \qquad n! \qquad n^n$$

et on a :

$$\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} \to 0 \qquad \frac{n^\alpha}{a^n} \to 0 \qquad \frac{a^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{n!}{n^n} \to 0$$

- **Preuve.** Elle repose soit sur la preuve faite pour les fonctions, soit sur une preuve indépendante qui utilise le lemme suivant, appelé *lemme de d'Alembert pour les suites* :

  Lemme de d'Alembert pour les suites. On a

$$\begin{cases} u \text{ une suite strictement positive} \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \quad \textbf{avec } \ell < 1 \end{cases} \implies u_n \to 0$$

57 **Proposition.** Soit $q \in \mathbb{R}$.

— **Limite.**

$$\text{La suite } (nq^n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{n'a pas de limite} & \text{si } q \leqslant -1 \\ \text{tend vers } 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{tend vers } +\infty & \text{si } q \geqslant 1 \end{cases}$$

En particulier, la suite $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ssi $q \in]-1, 1[$.

— **Nature.**
La suite $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $q \in]-1, 1[$.

Relation de comparaison

Les suites sont à valeurs réelles ou complexes.

58 **Définition.** Étant donné deux suites u et v, on dit que :

- u est *dominée* par v lorsqu'il existe une suite b *bornée* telle que $u_n = b_n v_n$ àpcr.
  On note $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
- u est *négligeable* devant v lorsqu'il existe une suite ε *tendant vers* 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ àpcr.
  On note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.
- u est *équivalente* à v lorsqu'il existe une suite α *tendant vers* 1 telle que $u_n = \alpha_n v_n$ àpcr
  ou encore lorsque $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$, c'est-à-dire $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$.
  On note $u_n \sim v_n$.

- **À retenir.** Lorsque v est la suite constante égale à 1 :
  - ⋆ $u_n = \mathrm{O}(1) \iff (u_n)$ est bornée
  - ⋆ $u_n = \mathrm{o}(1) \iff u_n \to 0$
  - ⋆ $u_n \sim 1 \iff u_n \to 1$
- **Prononciation.**
  L'écriture $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ se lit :
  « u_n est un grand Ô de v_n, au voisinage de $+\infty$ » ou « u_n est dominée par v_n, au voisinage de $+\infty$ »

  L'écriture $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ se lit :
  « u_n est un petit ô de v_n, au voisinage de $+\infty$ » ou « u_n est négligeable devant v_n, au voisinage de $+\infty$ »

Les caractérisations suivantes donnent les moyens pratiques pour démontrer de telles relations.

59 **Proposition (faisant presque office de définition en PCSI).** Soit u et v deux suites.
On suppose que la suite v ne s'annule pas àpcr.

- ⋆ $u_n = \mathrm{O}(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée
- ⋆ $u_n = \mathrm{o}(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 0$
- ⋆ $u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 1$

- **Warning.**

  L'égalité $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ signifie que la suite u *appartient* à l'*ensemble* des suites négligeables devant v.

  Autrement dit, l'**égalité** « $= \mathrm{o}(v_n)$ » est une **notation** pour signifier une **appartenance à un ensemble** (l'ensemble des suites négligeables devant v).

  Cette remarque doit vous faire comprendre que : $\xcancel{\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n = \mathrm{o}(v_n) \end{cases} \implies u_n = u'_n}$

  En effet,

  $$\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n = \mathrm{o}(v_n) \end{cases} \quad \text{signifie} \quad \begin{cases} u \in \{\text{suites négligeables devant } v\} \\ u' \in \{\text{suites négligeables devant } v\} \end{cases}$$

  Donc aucune raison pour que $u = u'$, ni même que $u_n = u'_n$ à partir d'un certain rang.

60 **Proposition (propriétés immédiates)**
Soit u et v deux suites.

(i) $\begin{cases} u_n \to \ell \\ \ell \neq 0 \end{cases} \implies u_n \sim \ell$ La réciproque est toujours vraie : $u_n \sim \ell \implies u_n \to \ell$

(ii) $\begin{cases} v \text{ est bornée} \\ u_n \to +\infty \end{cases} \implies v_n = \mathrm{o}(u_n)$

(iii) $\begin{cases} v \text{ est bornée} \\ u_n \to +\infty \end{cases} \implies u_n + v_n \sim u_n$ En particulier, $\begin{cases} v \text{ converge} \\ u_n \to +\infty \end{cases} \implies u_n + v_n \sim u_n$

(iv) $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(w_n) \\ w_n \to 0 \end{cases} \implies u_n \to 0$ Plus généralement, $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(w_n) \\ w_n = \mathrm{o}(t_n) \end{cases} \implies u_n = \mathrm{o}(t_n)$

(v) **Partage de limite.** Si deux suites sont équivalentes et si l'une possède une limite (finie ou pas), l'autre possède la même limite :

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \to L \end{cases} \implies u_n \to L$$

(vi) **Partage de non nullité.** $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \neq 0 \text{ àpcr} \end{cases} \implies u_n \neq 0 \text{ àpcr}$

(vii) **Partage de signe, pour les suites réelles.** $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \geqslant 0 \text{ àpcr} \end{cases} \implies u_n \geqslant 0 \text{ àpcr}$

- **Warning.** On a (WHY) :

$$u_n \sim 0 \iff \text{àpcr } u_n = 0$$

En écrivant $u_n \sim 0$, ...

- **Warning bis.** $\cancel{u_n \sim u_{n+1}}$ Penser à ....

Les deux propositions suivantes ne sont pas à apprendre, mais à comprendre.
On s'en servira comme une « boîte à outils ».

61 **Proposition (boîte à outils - règles de calcul avec o)**

(1) **Transitivité**

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ v_n = \mathrm{o}(w_n) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n = \mathrm{o}(w_n)$$

Si une suite u est négligeable devant une suite v, elle-même négligeable devant une suite w, alors u est négligeable devant w.

(2) **Somme**

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(w_n) \\ u'_n = \mathrm{o}(w_n) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n + u'_n = \mathrm{o}(w_n)$$

La somme de deux suites négligeables devant w est négligeable devant w.

(3) **Multiplication par un scalaire**

$$u_n = \mathrm{o}(w_n) \quad \Longrightarrow \quad \lambda u_n = \mathrm{o}(w_n)$$

La multiplication par un scalaire d'une suite négligeable devant w est négligeable devant w.

(4) **Multiplication par une suite** (s_n)

$$u_n = \mathrm{o}(v_n) \quad \Longrightarrow \quad u_n s_n = \mathrm{o}(v_n s_n)$$

La relation de négligeabilité est compatible avec la multiplication des suites.

(5) **Produit**

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n = \mathrm{o}(v'_n) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_n u'_n = \mathrm{o}(v_n v'_n)$$

(6) **Passage à l'inverse**

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ (v_n \neq 0 \text{ àpcr}) \\ u_n \neq 0 \text{ àpcr} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{v_n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

(7) **Simplification par une constante multiplicative**

$$u_n = \mathrm{o}(\mu v_n) \quad \Longrightarrow \quad u_n = \mathrm{o}(v_n)$$

« Le petit ô absorbe les constantes multiplicatives ».

- **Remarque.** Toutes les propriétés ont lieu avec des grands O.
- **La suite nulle.** L'égalité $u_n = \mathrm{o}(0)$ signifie $u_n = 0$ àpcr.
- **Curiosité.** Pour le point (7), il y a une réciproque lorsque μ est non nul.

  Supposons $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. Alors en multipliant par $\frac{1}{\mu}$, on a en utilisant le point (3) $\dfrac{1}{\mu} u_n = \mathrm{o}(v_n)$, d'où $u_n = \mathrm{o}(\mu v_n)$.

62

Proposition (boîte à outils - règles de calcul avec $\sim$)

(1) **Transitivité**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad u_n \sim w_n$$

(2) • **On ne peut pas sommer des équivalents !**

• **Ni même ajouter une suite** (s_n)

Penser à $s_n = -u_n$

• **Ni même ajouter une constante**

Penser à $u_n = -\ell + \frac{1}{n}$ et $v_n = -\ell + \frac{1}{n^2}$

(3) **Multiplication par un scalaire** λ

$$u_n \sim v_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda u_n \sim \lambda v_n$$

(4) **Multiplication par une suite** (s_n)

$$u_n \sim v_n \quad \Longrightarrow \quad s_n u_n \sim s_n v_n$$

(5) **Produit**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad u_n u'_n \sim v_n v'_n$$

(6) **Passage à l'inverse**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \neq 0 \text{ àpcr} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$$

(7) **NON simplification par une constante multiplicative**

(8) **Élévation à une puissance fixe (indépendante de** n**)**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n > 0 \text{ àpcr} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

(9) **On ne peut pas élever à une puissance dépendant de** n

Penser à $u_n = 2^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = 1$.

63 **Proposition (lien entre o et ~)**

♠ On a $b_n = \mathrm{o}(a_n) \implies a_n + b_n \sim a_n$ — Passer d'un petit ô à un ~

Ce que l'on peut résumer abusivement en $a_n + \mathrm{o}(a_n) \sim a_n$

♡ On a $\begin{cases} u_n = \beta v_n + \mathrm{o}(v_n) \\ \beta \neq 0 \end{cases} \implies u_n \sim \beta v_n$ — Trouver un ~ à partir d'un petit ô

♢ On a $u_n \sim v_n \implies u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ — Passer d'un ~ à un petit ô

♣ On a $\begin{cases} r_n = \mathrm{o}(v_n) \\ v_n \sim v'_n \end{cases} \implies r_n = \mathrm{o}(v'_n)$ — Transformer un petit ô

Des exos

64 **Question.** Déterminer des équivalents simples de

$$\ln(n+1) - \ln n \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

65 sol → 38 **Question.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer de diverses manières que $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \to x$.

IX. Compléments

Caractérisation séquentielle

66 **Proposition (caractérisation séquentielle de la borne sup).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : & \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ s \text{ est la limite d'une suite d'éléments de } A : & \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \to s \end{cases}$$

67 **Proposition (caractérisation séquentielle de la densité).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
La partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Théorème de Cesàro

68 **Théorème.** Soit u une suite et $\ell \in \mathbb{K}$.
Soit v la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ (ainsi v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite u).
Si u converge vers ℓ, alors v converge vers ℓ.

- **Pour les yeux.**

$$u_n \to \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \to \ell$$

- **Preuve.**
Pour démontrer ce théorème, on ne peut pas utiliser les règles opératoires. Il faut donc *revenir* à la définition avec les ε. Ce qui est en fait une preuve un peu difficile pour un élève !
Étape 1 : on suppose $\ell = 0$.
Supposons que la suite u converge vers 0.
Montrons que la suite v converge vers 0, c'est-à-dire montrons que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad |v_n| \leqslant \varepsilon$$

On commence donc par fixer $\varepsilon > 0$.

— Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\quad \forall\, n \geqslant N, \quad |v_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |u_k| + \dfrac{\varepsilon}{2}$

— Justifier l'existence de $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\quad \forall\, n \geqslant N', \quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |u_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}.$

— Conclure.

Étape 2 : on suppose ℓ quelconque.
à vous.

- **Réciproque fausse.** En prenant $u_n = (-1)^n$, montrer que la réciproque de Cesàro est fausse.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème est largement hors-programme, mais vous pouvez lire la preuve !
Voilà ce qu'il raconte :

De toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente.

Idée de la preuve pour le cas d'une suite *réelle*.
Considérons $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

— Procéder par *dichotomie* en construisant par récurrence une suite de segments $I_n = [a_n, b_n]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u ait une infinité de termes dans I_n et tels que $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

— Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Ensuite, notant λ la limite commune, construire $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \to \lambda$.

Notation.
Si $I = [a, b]$ est un segment, on notera $\mathrm{Long}(I) = b - a$ sa longueur.
Soit $c = \frac{a+b}{2}$ le milieu de I.
On pose $g(I) = [a, c]$ (« la moitié gauche de I ») et $d(I) = [c, b]$ (« la moitié droite de I »).
On a :

— $g(I) \subset I$ et $d(I) \subset I$

— on a $\mathrm{Long}(g(I)) = \mathrm{Long}(d(I)) = \dfrac{\mathrm{Long}(I)}{2}$.

Preuve. Soit u une suite bornée. Notons m un minorant de u et notons M un majorant de u.

⋆ Construction de la suite de segments $I_n = [a_n, b_n]$.

— Pour cela on commence par poser $I_0 = [m, M]$. Le segment I_0 vérifie bien la propriété souhaitée, car il contient tous les termes de la suite.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons construit un segment $I_n = [a_n, b_n]$ contenant une infinité de termes de la suite.
Puisque $I_n = g(I_n) \cup d(I_n)$, au moins l'un des segments $g(I_n)$ ou $d(I_n)$ contient une infinité de termes de u.
Posons alors :

$$I_{n+1} = \begin{cases} g(I_n) & \text{si } g(I_n) \text{ contient une infinité de termes de } u\,; \\ d(I_n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que I_{n+1} contient une infinité de termes de u.

Remarquons que l'on a $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car I_{n+1} vaut $g(I_n)$ ou $d(I_n)$.

⋆ Notons $I_n = [a_n, b_n]$ et montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $I_{n+1} \subset I_n$, on a $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.
La suite a est donc croissante et la suite b décroissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $\mathrm{Long}(I_{n+1}) = \dfrac{\mathrm{Long}(I_n)}{2}$ (WHY ?).
On en déduit (WHY ?), $\mathrm{Long}(I_n) = \dfrac{\mathrm{Long}(I_0)}{2^n}$, d'où $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$.

Cela prouve que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Notons λ la limite commune.

⋆ Construisons par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \in I_n.$$

— On pose $\varphi(0) = 0$. On a évidemment $u_{\varphi(0)} \in I_0$.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons avoir défini $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$ vérifiant :

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) \quad \text{et} \quad \forall\, p \in [\![0, n-1]\!], \quad u_{\varphi(p)} \in I_p.$$

Comme l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ est infini, il n'est pas majoré et donc contient des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n-1)$. Choisissons l'un de ces éléments comme valeur de $\varphi(n)$. On a alors :

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) < \varphi(n) \quad \text{et} \quad \forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad u_{\varphi(p)} \in I_p.$$

On a ainsi défini une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \in I_n.$$

Ainsi, par définition de la suite (I_n), on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n.$$

Comme les suites (a_n) et (b_n) ont même limite λ, on obtient $u_{\varphi(n)} \to \lambda$ d'après le théorème des Gendarmes.

On a bien trouvé une suite extraite de u qui converge !

Suites numériques

preuve et éléments de correction

3

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$

On introduit le nombre complexe γ, qui est l'unique nombre tel que $\gamma = -\dfrac{1}{3}\gamma + 4$ (en résolvant, on trouve $\gamma = 3$).
On a les deux égalités :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -\dfrac{1}{3}u_n + 4 \\ \gamma &= -\dfrac{1}{3}\gamma + 4 \end{cases}$$

Par différence, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \gamma = -\frac{1}{3}(u_n - \gamma).$$

Ainsi, la suite $(u_n - \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \gamma = (u_0 - \gamma)\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Comme $u_0 = 1$ et $\gamma = 3$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2\left(\frac{-1}{3}\right)^n + 3.$$

7

Soit u définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

L'équation caractéristique de la suite u est $x^2 - x - 1 = 0$.
Le discriminant est > 0 ; les racines sont $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
D'après le théorème, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u = \lambda \cdot (r^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu \cdot (s^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ou encore tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

On peut déterminer ce couple à l'aide des termes initiaux.
On obtient le système :

$$\begin{cases} u_0 &= \lambda r^0 + \mu s^0 \\ u_1 &= \lambda r^1 + \mu s^1 \end{cases} \qquad \text{qui s'écrit matriciellement} \qquad \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

La matrice carrée est inversible d'inverse $\dfrac{1}{s-r}\begin{pmatrix} s & -1 \\ -r & 1 \end{pmatrix}$. D'où

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{s-r}\begin{pmatrix} s & -1 \\ -r & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Ici $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{s-r}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculons ! On a $s-r=\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$.
D'où

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

BILAN. On a

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n = \lambda r^n + \mu s^n \qquad \text{avec } \lambda=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \mu=\frac{-1}{\sqrt{5}} \text{ et } r=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ s=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

9

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f: x\mapsto x+\ln x$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution.
On a le tableau de variations suivant :

x	0	x_n	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	n	$+\infty$

— La fonction f est strictement monotone, donc l'équation $f(x)=n$ admet *au plus* une solution.

— La fonction f est continue et $\lim\limits_{0} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, donc l'équation $f(x)=n$ admet *au moins* une solution, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.

Bilan : il existe un unique $x_n\in[0,+\infty[$ tel que $f(x_n)=n$.

Monotonie.
Idée. Contempler le tableau suivant.

x	0	x_n	x_{n+1}	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	n	$n+1$	$+\infty$

On conjecture ainsi que la suite est croissante. Prouvons-le.

1ère rédaction. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que $x_n\leqslant x_{n+1}$.
Par l'absurde, supposons que $x_n>x_{n+1}$.
Par stricte croissance de f, on a $f(x_n)>f(x_{n+1})$.
D'où $n>n+1$.
D'où la contradiction.

2ème rédaction. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que $x_n\leqslant x_{n+1}$.
La fonction f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, elle admet une bijection réciproque qui a le même sens de variation que f et on a $x_n=f^{-1}(n)$.
On a $n\leqslant n+1$.
Comme f^{-1} est croissante (au sens large suffit), on a $f^{-1}(n)\leqslant f^{-1}(n+1)$.
D'où $n\leqslant n+1$.

10

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1$.
Or $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 1 \geqslant 0$ (penser au discriminant).
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

15

Montrons que $\ell_1 = \ell_2$ en montrant que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$ et ceci en montrant que $\quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad |\ell_1 - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $u_n \to \ell_1$, il existe un rang N_1 à partir duquel on a $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
Comme $u_n \to \ell_2$, il existe un rang N_2 à partir duquel on a $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Donc àpcr (le maximum de N_1 et N_2), on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\ell_1 - \ell_2| \;=\; \Big|(u_n - \ell_1) - (u_n - \ell_2)\Big| \;\leqslant\; |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \;\leqslant\; 2\varepsilon$$

On a donc $|\ell_2 - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon$.

19

Montrons que $\ell \leqslant \ell'$, c'est-à-dire que $\ell - \ell' \leqslant 0$.
C'est équivalent à montrer (WHY, ce n'est pas du tout une évidence) :

$$\forall\, \varepsilon' > 0,\ \ell - \ell' \leqslant \varepsilon' \qquad \text{ou encore WHY?} \qquad \forall\, \varepsilon > 0,\ \ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $u_n \to \ell$, il existe N tel que $\quad \forall\, n \geqslant N, \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n$.
Comme $u'_n \to \ell'$, il existe N' tel que $\quad \forall\, n \geqslant N', \quad u'_n \leqslant \ell' + \varepsilon$.
Par hypothèse $u_n \leqslant u'_n$, donc :

$$\forall\, n \geqslant \max(N, N'), \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant u'_n \leqslant \ell' + \varepsilon$$

En oubliant les termes du milieu, on a $\ell - \varepsilon \;\leqslant\; \ell' + \varepsilon$. D'où $\ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon$.
Bilan. On a prouvé

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon$$

D'où (WHY?) $\ell - \ell' \leqslant 0$, puis $\ell \leqslant \ell'$.

29

Supposons que $u_n \to \ell \neq 0$.
Montrons que $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$ en montrant que $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \to 0$.
Le terme général vaut $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \;=\; \dfrac{1}{|\ell|} \times \dfrac{1}{|u_n|} \times |u_n - \ell|$ qui est du type « constante × suite-bornée × suite-qui-tend-vers-0 ».
D'après le lemme très utile, la suite tend vers 0.
Justifions que $\left(\dfrac{1}{|u_n|}\right)$ est bornée.
Comme $u_n \to \ell \neq 0$, on a $|u_n| \to |\ell| > 0$, donc àpcr $|u_n| \geqslant \dfrac{|\ell|}{3}$.
D'où par passage à l'inverse $0 \leqslant \dfrac{1}{|u_n|} \leqslant \dfrac{3}{|\ell|}$.

35

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
• On suppose que u est croissante et majorée.
Montrons que u converge.

— **Candidat pour la limite.** Considérons $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc admet une borne supérieure.
Posons $\ell = \sup A$, c'est-à-dire $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

— **Bonus.** Comme la borne supérieure est un majorant, on a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.

— **Montrons que** $u_n \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'àpcr $\ell - \varepsilon \leqslant u_n$ (l'inégalité $u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ est toujours vraie d'après le bonus précédent).
Le réel $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc on peut trouver $a \in A$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant a$, autrement dit, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant u_N$.
Comme u est croissante, on a $\forall\, n \geqslant N,\ u_N \leqslant u_n$.
Ainsi,
$$\forall\, n \geqslant N,\ \ell - \varepsilon \leqslant u_n$$

• On suppose u non majorée. Montrons que $u \to +\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme A n'est pas majorée, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$.
Par croissance de u, on a alors $\forall\, n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$.

43

Soit (C_n) et (D_n) définies par
$$C_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} \qquad\qquad D_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+n}$$

— Montrons que la suite C est croissante.
On a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad C_{n+1} - C_n = \dots$$
D'où la croissance de la suite.

— Montrons que la suite D est décroissante.
On a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad D_{n+1} - D_n \quad =$$
D'où la décroissance de la suite.

— Montrons que la suite $D - C$ tend vers 0.
On a
$$D_n - C_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

44

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$$
Montrons que les suites u et v convergent.
On procède en deux temps.
Premier temps.

- Montrons que u est croissante.
  Comme la suite est à termes strictement positifs, cela revient à montrer que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 1$$
  ce qui conclut.
- Montrons que v est décroissante.
  Comme la suite est à termes strictement positifs, cela revient à montrer que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a
  $$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})u_{n+1}}{(1+\frac{1}{n})u_n} \\ &= \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big(1+\frac{1}{(n+1)^2}\Big) \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\,\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$
  Le dénominateur vaut $n^4+4n^3+6n^2+4n+1$.
  Et le numérateur vaut
  $$n(n+2)\big((n+1)^2+1\big) \ = \ (n^2+2n)(n^2+2n+2) \ = \ n^4+4n^3+6n^2+4n$$
  On a donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.
- Montrons que la suite $v-u$ est positive.
  On a
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - u_n = \frac{1}{n}u_n \geqslant 0$$

Deuxième temps.
On vient de montrer que la suite $v-u$ est positive, donc on a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant v_n$$
De plus, u est croissante et v est décroissante, donc
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_1 \leqslant u_n \qquad \text{et} \qquad v_n \leqslant v_1$$
On a donc
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant v_1 \qquad \text{et} \qquad v_n \leqslant u_1$$
Ainsi la suite u est croissante et majorée (par v_1) et la suite v est décroissante et minorée (par u_1).
D'après le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent.

Variante du deuxième temps.
On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = \dfrac{1}{n}u_n$.

— La suite u est bornée (elle est minorée par son premier terme, car croissante ; et elle est majorée par v_1 car $u_n \leqslant v_n$ et $v_n \leqslant v_1$ par décroissance de v),

— On a $\dfrac{1}{n} \to 0$

Par un petit résultat de cours, on en déduit que $\frac{1}{n}u_n \to 0$.
Autrement dit $v_n - u_n \to 0$.
Et c'était le dernier point qu'il manquait pour montrer que u et v sont adjacentes.
On conclut en invoquant le fait que deux suites adjacentes convergent.

53

Posons $f : x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1, +\infty[$.
On remarque que l'intervalle $J = [0, +\infty[$ est stable par f (examiner les variations de f).
La suite u est alors égale à $\begin{cases} u_0 = 3 \in J \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
Par récurrence, on montre que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$. En particulier, la suite u est minorée par 0.
En étudiant le signe de $x \mapsto f(x) - x$, on voit que $\forall\, x \in J,\ f(x) \leqslant x$ (faire un dessin, c'est une inégalité de convexité !).
Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \leqslant u_n$$

D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite u est donc décroissante et minorée par 0
D'après le théorème de la limite monotone, la suite u converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
Comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$ et que J est défini par des inégalités larges (on dit que J est un intervalle fermé), la limite ℓ appartient à J. Ainsi, ℓ appartient à l'ensemble de définition de la fonction f.
En passant à la limite dans l'égalité $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$, on a $\ell = f(\ell)$.
On est dans le cas d'égalité de l'inégalité de convexité et on obtient $\ell = 0$.
Bilan : la suite u converge vers 0 (ce que l'on pouvait conjecturer sur un dessin).

65

Rédaction de lycéen, à connaître. Montrons que $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \to x$ à l'aide d'un encadrement de cette suite, puis en utilisant le théorème des Gendarmes.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ pour l'instant.
Par définition de la partie entière, on a :

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

D'où l'encadrement :

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

A fortiori,

$$nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

Multiplions par $\frac{1}{n}$ qui est positif :

$$x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$$

Mini bilan. On a alors

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x \\ x - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \\ x \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \end{cases}$$

D'après le théorème des Gendarmes, on a alors

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

Rédaction un peu pédante (mais efficace).
On a $\lfloor nx \rfloor = nx + \underbrace{\big(\lfloor nx \rfloor - nx\big)}_{\in]-1,0]}$.
Donc la suite de terme général $\lfloor nx \rfloor - nx$ est bornée.
Ce qui se réécrit :

$$\lfloor nx \rfloor \ = \ nx + \mathrm{O}(1)$$

En multipliant par $\frac{1}{n}$, on obtient d'après 61, point (4) :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \ = \ x + \mathrm{O}(\frac{1}{n})$$

Or une suite qui est un $\mathrm{O}(\frac{1}{n})$ est, a fortiori, un $\mathrm{o}(1)$ (WHY[1])
Bref, on a

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \ = \ x + \mathrm{o}(1)$$

D'où (WHY ?) $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \to x$.

1. La réponse est dans le point (iv) de 60