
# Suites numériques

exercices

# Généralités

## 101 Un vrai ou faux pour des suites réelles

1. Une suite qui n'a pas de limite est bornée.
2. Si $u_n \to 0$ alors $u_n v_n \to 0$.
3. Si $u_n v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$ ou $v_n \to 0$.
4. Si $u_n u_{n-1} \to 0$ alors $u_n \to 0$.
5. Si $u_n + u_{n+1} \to +\infty$ alors $u_n \to +\infty$.
6. Si $(u_n)$ est strictement décroissante à termes positifs ou nuls, alors $u_n \to 0$.
7. Si $u_n > 0$ pour tout $n$, alors $n u_n \to +\infty$.
8. Si $u_n > 1$ pour tout $n$, alors $u_n^n \to +\infty$.
9. Si $(|u_n|)$ est convergente, alors $(u_n)$ est convergente.
10. Si $(u_n)$ est convergente, alors $(|u_n|)$ est convergente.
11. Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n$ et si $u_n \to 0$ et $w_n \to 1$, alors $\lim v_n \in [0,1]$.
12. Si $(u_{n+1} - u_n) \to 0$, alors $(u_n)$ est convergente.
13. Si $(u_n)$ est convergente, alors $(u_{n+1} - u_n) \to 0$.
14. Si $(u_n)$ n'est pas majorée, alors $u_n \to +\infty$.
15. Si $u_n \to +\infty$, alors $(u_n)$ n'est pas majorée.
16. Si $u_n \to +\infty$, alors $(u_n)$ est croissante à partir d'un certain rang.

## 102 Suites à valeurs entières

Soit $(u_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente.
Montrer, en utilisant la définition epsilonesque, que $u$ est stationnaire.
**Puis** montrer que la limite de $u$ est dans $\mathbb{Z}$.

## 103 Comparaison de deux suites

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels strictement positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. On suppose que $(v_n)$ converge vers 0. Montrer que $(u_n)$ converge aussi vers 0.
2. On suppose que $(u_n)$ tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de $(v_n)$ ?

## 104 Trois situations amusantes

Soit $u$ une suite réelle. Voici trois situations amusantes où l'on peut montrer que $u$ converge.
*Les questions sont indépendantes.*

1. On suppose que $u$ est croissante et que $(u_{2n})$ converge. Montrer que $u$ converge.
2. On suppose que $u$ vérifie
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \frac{n+p}{np}$$
Montrer que $u$ converge et déterminer sa limite.
On prendra garde à ne travailler qu'avec qu'un seul indice, comme dans le cours !
3. On suppose que les suites $(u_{2p}), (u_{2p+1})$ et $(u_{3p})$ convergent. Montrer que la suite $u$ converge.

# Des limites

## 105 Nature

$$a_n = \frac{\cos n}{n+1} \qquad b_n = \sin\left(n^2 \tfrac{\pi}{3}\right) \qquad c_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2+1}$$

$$d_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2} \qquad e_n = \frac{e^n + n^2}{n^4+1} \qquad f_n = \frac{\ln n + 1}{n+4}$$

$$g_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \qquad h_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \qquad i_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \qquad j_n = \frac{n!}{n^n}$$

### 106 Lemme de d'Alembert pour les suites

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u$ est à termes strictement positifs et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. On suppose $\ell < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.
2. On suppose $\ell > 1$. Montrer que $u_n \to +\infty$.
3. Étudier le cas $\ell = 1$.

### 107 Puissance $n$, warning

Montrer les assertions suivantes.

i) $\cancel{\big(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in ]-1,1[\big) \implies u_n^n \to 0}$ mais $q \in ]-1,1[ \implies q^n \to 0$

ii) $u_n \to 0 \implies u_n^n \to 0$

iii) $u_n \to \ell \in ]-1,1[ \implies u_n^n \to 0$

iv) $\cancel{u_n \to 1 \implies u_n^n \to 1}$

v) $\cancel{\big(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1\big) \implies u_n^n \to +\infty}$ mais $q > 1 \implies q^n \to +\infty$

vi) $u_n \to \ell > 1 \implies u_n^n \to +\infty$

### 108 La suite $C$ tend vers $\ln 2$

Soit $(C_n)$ la suite de terme général $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$.

1. Rappeler une façon de montrer que $(C_n)$ converge.
2. Montrer que $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$.
3. En déduire que $C_n \to \ln 2$.

### 109 Cosinus et sinus !

*Les questions sont indépendantes*

1. Déterminer la limite de $u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos n\right)^n$.
2. Montrer que la suite $(x_n)$ définie par $x_n = \cos\left((n + \frac{1}{n})\pi\right)$ est divergente.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
   En déduire que la suite $(s_n)$ de terme général $s_n = \sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right)$ converge et déterminer sa limite.

## Suites récurrentes

### 110 Le retour de j

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $u$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$

En une phrase, justifier que $u$ est une suite réelle et déterminer une forme explicite pour $u_n$.

### 111 En passant au log...

Soit $u$ définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1}^a u_n^b \end{cases}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $a + b < 1$.

Montrer que la suite $u$ converge et déterminer sa limite.
Que se passe-t-il si $a + b = 1$ ?

**112** **Suite récurrente linéaire d'ordre 2, mais affine (pas homogène)**

Soit $u$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 6 \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe une suite constante $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n - 6$.
   On note $c$ cette constante.
2. On considère la suite $v$ de terme général $v_n = u_n - c$.
   Montrer que $v$ est une suite récurrente linéaire (homogène) d'ordre 2.
3. En déduire $u_n$ en fonction de $n$.
4. Montrer que $u$ admet une limite et la déterminer.

**113** **Suite récurrente d'ordre 1**

Étudier la suite $u$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$

**114** **Suite récurrente d'ordre 1 (bis)**

Soit $u$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$

Montrer que la suite $u$ est bien définie.
Montrer que $u$ converge et déterminer sa limite.

On pourra étudier la monotonie des suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$.

**115** **Une suite retord**

Soit $u$ définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n} \end{cases}$

1. Expliciter la fonction $f_n$ pour que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f_n(u_n)$.
   Calculer les premiers termes (disons $u_2$, $u_3$, $u_4$).
2. ** Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$$
3. En déduire que $u$ est croissante, et donner un équivalent de $u_n$.
4. Montrer qu'il existe $a$ et $b$ deux réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :
$$\frac{1}{2} + \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1\right) \leqslant u_n - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{b}{n}} - 1\right)$$
5. Déterminer un équivalent de $u_n - \sqrt{n}$.

**116** **Racines imbriquées**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général
$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$$
autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n} \end{cases}$

1. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n-1}$.
2. Donner un équivalent de $u_{n+1}$ (à l'aide de la relation de récurrence).
   En déduire un équivalent de $u_n$.

# Suites implicites

**117** **Une première suite implicite**

Soit $u$ la suite dont le terme général $u_n$ est l'unique réel $x \in [0,1]$ tel que $x^n + x - 1 = 0$.
Justifier que $u$ est bien définie. Déterminer la nature de la suite $u$, puis le cas échéant sa limite.

**118** **Une deuxième suite implicite**

Pour $n \geqslant 1$, notons $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n : \quad x \ \mapsto \ x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 \ = \ \sum_{k=1}^{n} x^k \ - \ 1$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution, notée $u_n$.
2. Calculer $u_1$ et montrer que $u_n \in \,]0,1[$ pour tout $n \geqslant 2$.
3. Étudier la monotonie de $u$ et donner la nature de $u$.
4. Déterminer la limite de $u_n$.

On pourra commencer par montrer que la limite de $u_n^n$ existe et ensuite transformer l'expression de $f_n$.

**119** **Une troisième suite implicite**

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée $x_n$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et la déterminer.
3. Montrer que $x_n \sim n$. Puis que $\ln x_n \sim \ln n$.
4. Donner un équivalent de $x_n - n$.

# Avec deux suites !

**120** **Suites imbriquées**

Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$1 < x_0 < y_0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) \end{cases}$$

1. Montrer que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 < x_n < y_n$.
2. Étudier la monotonie de la suite $y$.
3. En déduire que la suite $y$ converge. On note $\ell_y$ sa limite.
4. En considérant la suite $\left(\sqrt{x_n}\right)$, montrer que la suite $x$ converge. On note $\ell_x$ sa limite.
5. Montrer que $\ell_x = \sqrt{\ell_y}$ et $\ell_y = \sqrt{\ell_x}$.
6. En déduire $\ell_x$ et $\ell_y$.

**121** **Moyenne arithmétique, moyenne géométrique**

Soit $a, b$ deux réels positifs. Soit $u$ et $v$ deux suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite.
On peut aussi poser la question différemment (c'est un peu plus précis, d'ailleurs) : montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$, définies à partir du rang 1, sont adjacentes.
Dans cet exercice, on aura besoin de l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall\, x, y \geqslant 0, \quad \sqrt{xy} \ \leqslant \ \frac{x+y}{2}$$

**122** **Irrationalité de e**

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer que $u$ et $v$ convergent vers la même limite. On note e leur limite commune.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n!\,u_n < n!\,\mathrm{e} < n!\,u_n + \frac{1}{n}$. On fera attention aux inégalités strictes.
3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, en déduire que e est un nombre irrationnel.

## Suites complexes

**123** **Convergence ?**

Étudier la nature de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3u_n - 2\overline{u_n})$.

**124** **Conjugué !**

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 3z_n - \overline{z_n}$. Déterminer une expression explicite du terme général $z_n$.

**125** **Suite géométrique et somme**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la nature de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**126** **Joli !**

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Étudier la convergence de $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et le cas échéant, déterminer sa limite.

**127** **Exponentielle complexe**

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $|u_n| \to \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.
2. Soit $\theta_n \in \,]-\pi, \pi]$ un argument de $1 + \dfrac{z}{n}$. Montrer $\theta_n \to 0$ et $\theta_n \sim \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{n}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

## Un peu d'analyse asymptotique

**128** **Vrai/Faux**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

1. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \longrightarrow 0$.
2. Si $u_n - v_n \longrightarrow 0$ alors $u_n \sim v_n$.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
4. $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n = \mathrm{o}(1)$.
5. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.
6. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \to +\infty$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

## 129 Classement

Classer les suites de terme général $n$, $n^2$, $n\ln n$, $\sqrt{n}\ln n$, $\dfrac{n}{\ln n}$, $\dfrac{n^2}{\ln n}$ par ordre de négligeabilité.

Même question avec $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{\ln n}{n}$, $\dfrac{\ln n}{n^2}$, $\dfrac{1}{\ln n}$, $\dfrac{1}{n\ln n}$.

## 130 En bas et en haut

Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad v_n = \sqrt[n]{n} \qquad w_n = \left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \qquad x_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}-1 \qquad y_n = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

## 131 Fibonnaci

On définit la suite de Fibonnaci par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Déterminer un équivalent simple de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## 132 Équivalent simple

Déterminer un équivalent simple et la limite des suites données par les termes généraux suivants :

$$a_n = (n+3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)}$$

$$b_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$$

$$c_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$$

$$d_n = \frac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$$

$$e_n = \frac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1}$$

$$f_n = \frac{n!+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$$

$$g_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$h_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

$$i_n = \sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$$

## 133 Rapide ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.
Montrer que $u_n \to 0$, déterminer le signe de $u_n$, et en donner un équivalent simple.

## 134 Un équivalent, cela peut servir à ça

On suppose que $(nu_n)$ admet une limite.
Montrer que la suite $(nu_{n+1})$ admet la même limite.

## 135 Somme de parties entières

Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver une constante $C \in \mathbb{R}$ et un exposant $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \sim Cn^\alpha$.

## 136 Une belle limite

1. Soit $a > 0$.
   Déterminer un équivalent simple de $\sqrt[n]{a}$. Même question avec $\ln(\sqrt[n]{a})$.
   Et avec $\sqrt[n]{a}-1$. On pourra utiliser que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\dots} = 1$.
2. Soit $u$ une suite telle que $u_n \to 1$.
   Montrer que $\ln u_n \sim u_n - 1$. On pourra utiliser que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\dots} = 1$.
3. Soit $a, b$ strictement positifs.
   Trouver une constante $C \in \mathbb{R}$ et un exposant $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\ln\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right) = Cn^\alpha + \mathrm{o}(n^\alpha)$.
   Déterminer
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$$

# Autres

## 137 Qui l'emporte ?

On souhaite déterminer $\lim u_n$ où $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n\,!}$.

Commencer par déterminer $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, puis utiliser le lemme de d'Alembert.

## 138 Série alternée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle.

Montrer que la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ converge.

Étudier les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$ converge.

## 139 $e^{in\theta}$

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. On suppose que $\dfrac{\theta}{2\pi}$ est rationnel.
   (a) Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont périodiques.
   (b) En déduire que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\dfrac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel.
   (a) Montrer que $(u_n)$ converge si et seulement si $(v_n)$ converge.
   (b) En déduire que $(u_n)$ et $(v_n)$ divergent.

## 140 Encore du cosinus et du sinus

Soit $\theta$ non congru à 0 modulo $\pi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \cos(n\theta)$ et $s_n = \sin(n\theta)$.
Montrer que $(c_n)$ CV $\iff$ $(s_n)$ CV. En déduire que les deux suites divergent.

Utiliser les formules d'addition.

## 141 Somme des inverses des coefficients binomiaux

Soit $B$ la suite de terme général $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$. Montrer que la suite $(B_n)$ converge.

## 142 Difficile...

Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles convergeant respectivement vers $\alpha$ et $\beta$.

L'objectif est de montrer que la suite $w$ de terme général $w_n = \dfrac{a_0 b_n + \cdots + a_n b_0}{n+1}$ converge vers $\alpha\beta$.

1. Expliquer comment déduire de ce résultat le théorème de Cesàro.
2. Démontrer le théorème avec la définition epsilonesque de la limite.

— Exploiter la convergence de $(a_n)$ et $(b_n)$.

— Découper, àpcr, $w_n$ en trois morceaux $G_n$, $C_n$, $D_n$ puis montrer que

$$|w_n - \alpha\beta| \leqslant |G_n| + |C_n - \alpha\beta| + |D_n|$$

— Constater que $|G_n|$ et $|D_n|$ sont aussi petits que l'on veut.

— Découper $C_n - \alpha\beta$ en deux morceaux et montrer que ces morceaux sont aussi petits que l'on veut (pour le « premier » morceau, utiliser un jeu d'écriture comme celui utilisé dans la limite d'un produit, puis exploiter que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont bornées ; pour le « deuxième », montrer qu'il est du type $\dfrac{\text{cste}}{n+1}$).

## 143 Suite périodique

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique et convergente.
Montrer que $w$ est constante.

Une suite $w$ est dite périodique lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+p} = w_n$.

**144** **Un exercice de Khôlle**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leqslant \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Montrer qu'elle converge.

Introduire la suite $(v_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \max(u_n, u_{n+1})$.

**145**

Montrer que toute suite périodique non constante n'a pas de limite !

**146**

Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles à valeurs dans $[0,1]$ telles que $(a_n b_n)$ converge vers 1.
Que peut-on dire des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ?

**147**

Soit $(u_n)$ une suite réelle CV.
Montrer que $(u_n)$ admet un max ou un min.

**148** **Défi**

Trouver $(u_n)$ tel que

$$\begin{cases} \forall\, \alpha > 0, & u_n = \mathrm{o}(n^{\alpha}) \\ \forall\, \beta > 0, & (\ln n)^{\beta} = \mathrm{o}(u_n) \end{cases}$$

**149**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a_n + u_n}.$$

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**150**

Soit $\mu \in [0,1]$. Soit $u_0 \in [0,1]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mu u_n \left(1 - u_n\right).$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**151**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant \frac{u_{n+2} + u_n}{2}.$$

Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

# Suites numériques

corrigés

**102**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$.
Remarquons qu'*a priori*, rien ne nous indique que $\ell \in \mathbb{Z}$ (ce sera en fait une conséquence importante de l'exercice).
On applique la définition de la limite à $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$.
On peut trouver un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3}$.
Remarquons que cela entraîne en particulier $|u_N - \ell| \leqslant \frac{1}{3}$.
Soit $n \geqslant N$.
On a donc $|u_n - \ell|$ et $|u_N - \ell| \leqslant \frac{1}{3}$.
D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|u_n - u_N| \leqslant \frac{2}{3}$ :
ainsi, les deux entiers $u_n$ et $u_N$ sont distants d'au plus $\frac{2}{3}$.
Comme deux entiers *distincts* ne sont jamais distants d'au plus $\frac{2}{3}$, les deux entiers $u_n$ et $u_N$ sont *égaux*.
On a donc montré

$$\forall n \geqslant N,\ u_n = u_N,$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
On en déduit que la limite de $u$ vaut $u_N$ et est donc dans $\mathbb{Z}$.

**Variation de la preuve précédente.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$.
On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$.
Par opérations sur les limites, on a $u_{n+1} - u_n \to 0$.
On applique la définition de la limite à $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$.
Ainsi, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N,\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{2}$.
Ainsi, $\forall\, n \geqslant N,\ u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Or $\mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \{0\}$.
Donc $\forall\, n \geqslant N,\ u_{n+1} - u_n = 0$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

**103**

1. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Comme les suites sont à termes strictement positifs, on en déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$$
Donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Donc elle est majorée par son premier terme :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_0}{v_0}$$
D'où (toujours par stricte positivité des termes) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{v_0} v_n$$
Par hypothèse, $v_n \to 0$.
D'après le théorème des Gendarmes, on a $u_n \to 0$.
2. Reprenons :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_0}{v_0}$$
D'où
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{v_0}{u_0} u_n \leqslant v_n$$
On a $\frac{v_0}{u_0} > 0$ et $u_n \to +\infty$. Par opérations sur les limites, on a $\frac{v_0}{u_0} u_n \to +\infty$.
Par théorème de minoration, on en déduit que $v_n \to +\infty$.

**107**

Attention pour iii), penser à prendre les valeurs absolues pour élever sereinement à la puissance $n$.
La fonction $t \mapsto t^n$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier pour $n$ pair !
Montrons que $|u_n^n - 0| \to 0$, ou encore $|u_n|^n \to 0$.
Comme $u_n \to \ell$, on a, par la seconde inégalité triangulaire $|u_n| \to |\ell| < 1$.
Donc àpcr, on a $|u_n| \leqslant \dfrac{1+|\ell|}{2}$.
D'où àpcr, on a $|u_n|^n \leqslant \left(\dfrac{1+|\ell|}{2}\right)^n = q^n$ avec $q \in [0, 1[$.
D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $|u_n|^n \to 0$.

1. On montre que la suite $C$ est croissante (ce n'est pas complètement évident).
   On montre par ailleurs que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ C_n \leqslant n \times \dfrac{1}{n+1}$, donc $C$ est majorée par 1.
   D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $C$ converge.
2. L'inégalité de concavité du logarithme népérien s'écrit : $\quad \forall\, t \in ]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t$.
   En particulier, on en déduit l'inégalité de gauche.
   Pour montrer l'inégalité de droite, on fixe $x \in [0,1[$. On pose $t=-x$ qui est alors un élément de $]-1,0]$.
   Ainsi, l'inégalité de convexité s'applique et on obtient $\ln(1-x) \leqslant -x$, d'où $-\ln(1-x) \geqslant x$.
   D'où l'inégalité de droite.
3. Montrons que $C_n \to \ln 2$.
   D'après l'inégalité précédente appliquée à $\dfrac{1}{n+k} \in [0,1[$, on a
   $$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \quad \ln(1+\frac{1}{n+k}) \ \leqslant\ \frac{1}{n+k} \ \leqslant\ -\ln(1-\frac{1}{n+k})$$
   Par somme, on obtient
   $$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{n+k}) \ \leqslant\ C_n \ \leqslant\ -\sum_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{n+k})$$
   Or $\ln(1+\dfrac{1}{n+k}) = \ln(n+k+1) - \ln(n+k)$. La somme est donc télescopique, et on obtient à gauche $\ln(2n+1) - \ln n = \ln \dfrac{2n+1}{n}$ qui tend vers $\ln 2$.
   Qu'obtient-on à droite ?
   Le théorème des Gendarmes vous aidera à montrer que $C_n$ tend vers $\ln 2$.

**109**

On a $2\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc àpcr, disons $N$, on a $\left|2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{8}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$\begin{array}{rcll} |u_n| & \leqslant & \left|2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| + \left|\dfrac{3}{4}\cos n\right| & \text{inégalité triangulaire} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4} & \text{car le cosinus est borné en valeur absolue par 1} \end{array}$$

En élevant à la puissance $n$ (qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$), on a

$$|u_n|^n \leqslant \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right)^n$$

Or $\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4} \in \left]-1, 1\right[$, d'où ....

et le théorème des Gendarmes montre que $u_n^n \to 0$ (est-ce bien clair pour vous ?)

**110**

Vous devez trouver :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{a+2b}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

**114**

On introduit $f : x \mapsto \sqrt{6-x}$. L'intervalle $[0, \sqrt{6}]$ est stable par $f$. En effet :

| $x$ | $0$ | $\sqrt{6}$ |
|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\sqrt{6}$ $\searrow$ | $\sqrt{6-\sqrt{6}} > 0$ |

L'intervalle $[0, \sqrt{6}]$ contient $u_0$ et est stable par $f$.
Donc, par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, \sqrt{6}]$.
En particulier, la suite $u$ est bornée.

La fonction $f$ est décroissante, donc $f \circ f$ est croissante.
Par conséquent, les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones (récurrence immédiate pour la monotonie de $(u_{2n})$, puis sans récurrence on obtient la monotonie de $(u_{2n+1})$).
De plus, elles sont bornées.
D'après le théorème de la limite monotone, elles convergent.

Pour l'instant, on ne sait pas encore que $u$ converge.
On sait simplement que les deux suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent.
Notons $a = \lim u_{2n}$ et $b = \lim u_{2n+1}$.
D'après le cours, on sait que $u$ converge si et seulement si $a = b$.
Pour cela, examinons $b - a$ et regardons si ce réel est nul ou pas.

On a $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$.
D'où $b = f(a)$ et $a = f(b)$.
D'où $b - a = f(a) - f(b)$, ce qui s'écrit

$$b - a \;=\; \sqrt{6-a} - \sqrt{6-b} \;=\; \frac{(6-a)-(6-b)}{\sqrt{6-a}+\sqrt{6-b}} \;=\; \frac{b-a}{\sqrt{6-a}+\sqrt{6-b}}$$

D'où

$$(b-a)\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{6-a}+\sqrt{6-b}}\Big) = 0$$

Montrons que la parenthèse est non nulle. Raisonnons par l'absurde. Supposons que

$$1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{6-a}+\sqrt{6-b}} \qquad \text{d'où} \qquad 1 \;=\; \sqrt{6-a}+\sqrt{6-b}$$

Or $\sqrt{6-a}+\sqrt{6-b} \geqslant \sqrt{6-a} \geqslant \sqrt{6-\sqrt{6}} > 1$.
D'où la contradiction.
D'où $a = b$, c'est-à-dire $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1}$.

Donc (WHY), la suite $u$ converge.
Par théorème, la suite $u$ converge vers un point fixe de $f$, c'est-à-dire vers $\ell$ vérifiant $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\sqrt{6-\ell} = \ell$.
On obtient (WHY ?) $\ell = 2$.

1. On pose $f_n : x \mapsto 1 + \dfrac{n}{x}$ de sorte que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{H}_n$

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3}) \ \leqslant u_n \ \leqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$$

**Initialisation.** Pour $n = 1$, la double inégalité s'écrit

$$1 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Comme $u_1 = 1$ et que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{4}}{2} = \dfrac{3}{2}$, on en déduit que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

D'après $\mathcal{H}_n$, on a :

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3}) \ \leqslant u_n \ \leqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$$

On passe à l'inverse, on multiplie par $n$, on ajoute 1

$$1+\frac{2n}{1+\sqrt{4n+1}} \ \leqslant 1+\frac{n}{u_n} \ \leqslant 1+\frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}}$$

Il n'y a plus qu'à croiser les doigts pour que

$$(G) \qquad \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1}) \ \leqslant\ 1+\frac{2n}{1+\sqrt{4n+1}} \qquad \text{et} \qquad (D) \qquad 1+\frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}} \ \leqslant\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+5})$$

Pour (G), on a les équivalences suivantes :

$$(G) \iff \sqrt{4n+1} \ \leqslant\ 1+\frac{4n}{1+\sqrt{4n+1}} \iff \left(\sqrt{4n+1}-1\right)\left(\sqrt{4n+1}+1\right) \leqslant 4n \iff (4n+1)-1 \leqslant 4n$$

L'assertion finale étant vraie, on en déduit que $(G)$ est vraie.

Occupons-nous de $(D)$. En posant $V = \sqrt{4n-3}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
1+\frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}} \ \leqslant\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+5}) &\iff \frac{1+\sqrt{4n-3}+4n}{1+\sqrt{4n-3}} \ \leqslant\ \sqrt{4n+5} \\
&\iff 4n+1+\sqrt{4n-3} \ \leqslant\ \sqrt{4n+5}\left(1+\sqrt{4n-3}\right) \\
&\iff \left(4n+1+\sqrt{4n-3}\right)^2 \ \leqslant\ \left(\sqrt{4n+5}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)\right)^2 \\
&\iff (4n+1)^2+2(4n+1)V+(4n-3) \ \leqslant\ (4n+5)(1+2V+4n-3) \\
&\iff 16n^2+12n-2+2(4n+1)V \ \leqslant\ 16n^2+12n-10+2(4n+5)V \\
&\iff -2+2V \leqslant -10+10V \\
&\iff 0 \leqslant -1+V \\
&\iff 1 \leqslant 4n-3 \\
&\iff 1 \leqslant n
\end{aligned}$$

L'assertion finale étant vraie, on en déduit que $(D)$ est vraie.

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

3. • La double inégalité précédente s'écrit $v_n \leqslant u_n \leqslant v_{n+1}$.
Ainsi, on a $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$, d'où $u_n \leqslant u_{n+1}$.

• On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3}) \ \leqslant u_n \ \leqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{n}\sqrt{1 - \frac{3}{4n}} \ \leqslant u_n \ \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{4n}}$$

En divisant par $\sqrt{n}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 - \frac{3}{4n}} \ \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \ \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n}}$$

Le membre gauche et le membre droit tendent vers 1.
D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

4. En soustrayant $\sqrt{n}$ à la double inégalité, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{n}\left(\sqrt{1 - \frac{3}{4n}} - 1\right) \ \leqslant u_n - \sqrt{n} \ \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} - 1\right)$$

D'où $a = \dfrac{-3}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$.

5. Reprenons la double inégalité précédente et examinons la limite des membres extrêmes.
Montrons que les deux membres extrêmes convergent vers $\dfrac{1}{2}$.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $u_n - \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Donc $\quad u_n - \sqrt{n} \ \sim \ \dfrac{1}{2}$.

**Première solution.**
Le membre gauche vaut $\dfrac{1}{2} + \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \dfrac{a}{n}} - 1\right)$.

Montrons que $\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \dfrac{a}{n}} - 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1\right) \ = \ \sqrt{n+a} - \sqrt{n} \ = \ \frac{a}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}}$$

qui tend évidemment vers 0.

**Deuxième solution évoluée, que je laisse pour mémoire.**
On a

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1\right) \ = \ \sqrt{n} \times \frac{a}{n}\frac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}} \ = \ \frac{a}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}}$$

On a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+t} - 1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \text{d'où, par composition de limites, } \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

De plus, $\dfrac{a}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Par produit, on a $\dfrac{a}{\sqrt{n}} \times \dfrac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ainsi

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

**116**

1. Par récurrence.
2. **Argument évolué.** L'encadrement précédent montre que $u_n = \mathrm{O}(\sqrt{n})$.
   Comme $\sqrt{n} = \mathrm{o}(n)$, on en déduit que $u_n = \mathrm{o}(n)$.

   **Preuve terre à terre.** L'encadrement précédent divisé par $n$ montre que $\dfrac{u_n}{n} \to 0$ (utiliser le théorème des Gendarmes).
   Donc $u_n = \mathrm{o}(n)$.

   **Résumons.** On a $u_n = \mathrm{o}(n)$ que l'on peut aussi écrire que $u_n = \mathrm{o}(n+1)$ (car $n \sim n+1$).
   Ainsi, $n + 1 + u_n \sim n + 1$.
   Par élévation à une puissance fixe (indépendante de $n$, ici $\frac{1}{2}$), on a $\underbrace{\sqrt{n+1+u_n}}_{u_{n+1}} \sim \sqrt{n+1}$.

   Par décalage d'indice, on a $u_n \sim \sqrt{n}$.

**Remarque.** La question suivante serait « Déterminer un équivalent de $u_n - \sqrt{n}$ ».

**117**

Pour $n = 0$, que vaut $u_0$ ? Réponse, $u_0$ est l'unique solution de $[0,1]$ de l'équation $x^0 + x - 1 = 0$, c'est-à-dire de l'équation $x = 0$.
Donc $u_0 = 0$.

Désormais, intéressons-nous à $n \in \mathbb{N}^*$.
Posons $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ que l'on étudie sur $[0,1]$.

— On a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$.
  Par continuité de $f_n$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
— De plus, $f_n$ est strictement croissante sur $[0,1]$.
  Donc le $u_n$ est unique.

En fait, il est peut être utile pour la suite d'avoir le tableau de variations de $f_n$.

| $x$ | $0$ | | $u_n$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f_n$ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ |

**Monotonie de la suite $u$.**
On cherche le signe de $f_n(u_{n+1})$.
On a $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n + u_{n+1} - 1$.
Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, d'où $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1}$, qui est $\geqslant 0$, car $u_{n+1} \in [0,1]$.
Ainsi, $f_n(u_{n+1}) \geqslant 0$, ce qui s'écrit encore $f_n(u_{n+1}) \geqslant f_n(u_n)$.
Par stricte croissance de $f_n$, on en déduit que $u_{n+1} \geqslant u_n$ (si on avait $u_{n+1} < u_n$, on aurait par stricte croissance de $f_n$, $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$, ce qui n'est pas !).

| $x$ | $0$ | | $u_n$ | | $u_{n+1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f_n$ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $\geqslant 0$ | ↗ | $1$ |

Bilan : la suite $u$ est croissante.

**Nature.** Résumons. La suite $u$ est croissante et majorée par 1, donc le théorème de la limite monotone affirme qu'elle converge.

**Valeur de la limite.** Notons $\ell$ sa limite qui appartient alors à $[0,1]$ (par passage à la limite dans les inégalités larges).
Montrons que $\ell = 1$.
Par l'absurde, supposons que $\ell < 1$.
Le fait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ implique que $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (ce n'est pas du tout évident dans un cadre général, mais Aubin Vandier me fait remarquer que l'on peut le démontrer à la main, ici. Faisons-le).

> Comme $u_n > 0$, on peut écrire $u_n^n = \exp(n \ln u_n)$.
> Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$.
> Comme $\ell > 0$ (car $u$ est strictement positive et croissante), on a $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln \ell$.
> Comme $\ell < 1$, on a $\ln \ell < 0$.
> Ainsi, $n \ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
> Par composition avec l'exponentielle, on a $\exp(n \ln u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, càd $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité $u_n^n + u_n - 1 = 0$, on obtient $0 + \ell - 1 = 0$, d'où $\ell = 1$, ce qui contredit l'hypothèse.
Bilan : $\ell = 1$.

1. — La fonction $f_n$ est continue (en tant que fonction polynomiale)

   — On a $f_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$, donc 0 est une valeur intermédiaire entre $f_n(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n$.

   Avec ces deux points et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il **existe** un zéro dans $[0, +\infty[$ pour la fonction $f_n$.

   — De plus, $f_n$ est strictement croissante (en tant que somme de fonctions strictement croissantes et d'une fonction constante égale à $-1$).

   Cette stricte monotonie prouve l'**unicité** du zéro.

   Bilan : on a montré qu'il **existe un unique** $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. ▷ On a $f_1 : x \mapsto x - 1$. L'unique zéro de $f_1$ est 1, donc $u_1 = 1$.

   ▷ Montrons que $\quad \forall n \geqslant 2,\ u_n \in\ ]0, 1[$.
   Soit $n \geqslant 2$. Pour bien comprendre la situation, voici ce que nous avons à notre disposition :

   | $x$ | $0$ | $u_n$ | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|
   | Variations de $f_n$ | $-1$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

   Petit zoom sur $[0, 1]$ (on a $n - 1 > 0$, WHY ?)

   | $x$ | $0$ | $u_n$ | $1$ |
   |---|---|---|---|
   | Variations de $f_n$ | $-1$ ↗ | $0$ ↗ | $n-1$ |

   Écrivons ce que nous voyons. On a

   $$-1 \ < \ 0 \ < \ n - 1$$

   ce qui s'écrit encore

   $$f_n(0) \ < \ f_n(u_n) \ < \ f_n(1)$$

   Par croissance (la stricte croissance n'est pas utile ici), on en déduit $0 < u_n < 1$ (en effet, si on avait $0 \geqslant u_n$, on aurait par croissance de $f_n$, l'inégalité $f_n(0) \geqslant f_n(u_n)$, ce qui n'est pas ; idem pour si on avait $u_n \geqslant 1$, etc.)

   Si on avait eu la question suivante : montrer que $u_n \in [0, 1]$, voilà ce que nous aurions écrit.

   On a

   $$-1 \ \leqslant \ 0 \ \leqslant \ n - 1$$

   ce qui s'écrit encore

   $$f_n(0) \ \leqslant \ f_n(u_n) \ \leqslant \ f_n(1)$$

   Par stricte croissance (la stricte croissance est utile ici), on en déduit $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ (en effet, si on avait $0 > u_n$, on aurait par stricte croissance de $f_n$, l'inégalité $f_n(0) > f_n(u_n)$, ce qui n'est pas ; idem pour si on avait $u_n > 1$, etc.)

3. • Étudions la monotonie de $u$.
   Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.
   Deux solutions possibles : étudier $f_n(u_{n+1})$ ou $f_{n+1}(u_n)$. Je rédige la seconde solution.

   **à retenir :** Pour comparer $u_n$ et $u_{n+1}$, on va comparer leur image par $f_{n+1}$ qui est strictement croissante.

   ▷ Pour commencer, on cherche une relation entre $f_{n+1}$ et $f_n$.

On a $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$, donc

$$\forall\, x, \qquad f_{n+1}(x) \;=\; x^{n+1} \;+\; f_n(x)$$

$\triangleright$ On évalue la relation précédente en $u_n$, en utilisant que $f_n(u_n) = 0$.
On obtient

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} \;+\; 0$$

$\triangleright$ Cherchons à comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, autrement dit à comparer $u_n^{n+1}$ et 0.
D'après la question précédente, on a $u_n \geqslant 0$, d'où $u_n^{n+1} \geqslant 0$, ce qui s'écrit encore $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$.
Comme $f_{n+1}$ est strictement croissante, on en déduit $u_n \geqslant u_{n+1}$ (en effet, si on avait $u_n < u_{n+1}$, on aurait, par stricte croissance de $f_{n+1}$, l'inégalité $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce qui n'est pas).

Bilan : la suite $u$ est décroissante.

• La suite $u$ est décroissante et minorée (par 0), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

4. ** D'après la question précédente, la suite $u$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer.

Pour cela, commençons par montrer que $\lim u_n^n$ existe.

On a

$$\forall\, x \neq 1, \qquad f_n(x) \;=\; x\frac{1-x^n}{1-x} \;-\; 1$$

Comme $u_n \neq 1$ pour $n \geqslant 2$, on a, en prenant $x = u_n$ :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \;=\; u_n\frac{1-u_n^n}{1-u_n} \;-\; 1$$

On a envie de passer à la limite dans cette égalité ; ce n'est pas encore licite, car on ne sait pas si $\lim u_n^n$ existe.
Prouvons-le.
On a (WHY ?)

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n^n \leqslant u_2^n$$

Or $u_2 \in \,]-1, 1[$, donc $u_2^n \to 0$.
D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $u_n^n \to 0$.

Reprenons ce que l'on voulait faire, qui est maintenant licite. On obtient (car $1 - \ell \neq 0$, WHY ?) :

$$0 \;=\; \ell\frac{1-0}{1-\ell} \;-\; 1$$

En résolvant cette équation d'inconnue $\ell$, on trouve $\ell = \frac{1}{2}$.

1. À vous : TVI pour l'existence, et stricte monotonie pour l'unicité.
2. La suite $(x_n)$ est croissante (à montrer).
   D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que l'on note $L$.
   On va montrer que $L = +\infty$.
   Raisonnons par l'absurde, en supposant que $L$ est un réel.
   On a $x_n \to L$, et on on montre que $L > 0$ (comment ?).
   Par continuité de ln en $L$, on obtient $\ln x_n \to \ln L$.
   Par passage à la limite dans l'égalité $x_n + \ln x_n = n$, on obtient
   $$L \ + \ \ln L = +\infty$$
   D'où la contradiction (à gauche, on a la somme de deux réels).
3. • Montrons que $x_n \sim n$.
   On a
   $$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \ln t = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(t) \end{cases} \qquad \text{d'où, par composition, on a} \quad \ln x_n = \mathrm{o}(x_n)$$
   Ainsi, $x_n + \ln x_n \sim x_n$.
   Or $x_n + \ln x_n = n$. D'où $x_n \sim n$.

   • Montrons que $\ln x_n \sim \ln n$.
   Comme $x_n \sim n$, on peut écrire $x_n = n + \mathrm{o}(n)$, d'où
   $$\begin{aligned} \ln x_n &= \ln\big(n + \mathrm{o}(n)\big) \\ &= \ln n + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) \\ &= \ln n + \text{qq-chose-qui-tend-vers-0} \\ &\sim \ln n \end{aligned}$$
4. Donnons un équivalent de $x_n - n$.
   D'après la relation fondamentale, on a $x_n - n = -\ln(x_n)$.
   D'après la question précédente, on a $\ln x_n \sim \ln n$.
   D'où
   $$x_n - n \ \sim \ -\ln n$$
   On peut donc écrire un développement asymptotique de $x_n$ à 2 termes
   $$x_n = n - \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$$

   **Question supplémentaire.** Trouver un développement asymptotique de $x_n$ à 3 termes.
   Trouvons un équivalent de $x_n - n + \ln n$.
   On a, d'après la relation fondamentale :
   $$x_n - n + \ln n = -\ln x_n + \ln n$$
   D'où
   $$x_n - n + \ln n \ = \ \ln \frac{n}{x_n}$$
   On a
   $$\begin{cases} \dfrac{n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ \ln t \underset{t\to 1}{\sim} t - 1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \ln\left(\frac{n}{x_n}\right) \ \sim \ \frac{n}{x_n} - 1$$
   Ainsi,
   $$\ln\left(\frac{n}{x_n}\right) \ \sim \ \frac{n}{x_n} - 1 \ = \ \frac{n - x_n}{x_n} \ \sim \ \frac{\ln n}{n}$$
   Ainsi,
   $$x_n - n + \ln n \ \sim \ \frac{\ln n}{n}$$
   Autrement dit,
   $$x_n \ = \ n \ - \ \ln n \ + \ \frac{\ln n}{n} \ + \ \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

1. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ :
$$1 < x_n < y_n$$
• $\mathcal{H}_0$ est vraie : c'est immédiat d'après l'énoncé.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.
D'après $\mathcal{H}_n$, on a $x_n > 1$ et $y_n > 1$.
⋆ On a donc $x_{n+1} = \frac{1}{2}(\underbrace{x_n}_{>1} + \underbrace{\sqrt{y_n}}_{>1}) > 1$
⋆ On a
$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big((y_n - x_n) - (\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n})\Big) = \frac{1}{2}(\underbrace{\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}}_{>0 \text{ cf.}\mathcal{H}_n})\Big(\underbrace{(\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n}) - 1}_{>1 \text{ cf.}\mathcal{H}_n}\Big) > 0$$
Autre solution.
Remarquer que $t \mapsto t - \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$, donc sur $]1, +\infty[$.
D'après $\mathcal{H}_n$, on a $1 < x_n < y_n$. Donc par stricte croissante, on a $x_n - \sqrt{x_n} < y_n - \sqrt{y_n}$. Et ainsi, $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$.
BILAN : $1 < x_{n+1} < y_{n+1}$, donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
• D'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - y_n)$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{Comme } 1 < x_n, \text{ on a } \sqrt{x_n} < x_n. \\ \text{On a aussi } x_n < y_n.\end{array}\right\} \quad \text{Donc } \sqrt{x_n} < y_n$$
On a mq : $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n < 0$, donc $(y_n)$ est strictement décroissante.
3. La suite $y$ est décroissante et minorée par 1.
D'après le théorème de la limite monotone, la suite $y$ converge.
4. Pour tout $n$, on a $\sqrt{x_n} = 2y_{n+1} - y_n$. La suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ converge (donc la suite $(y_{n+1})_{n\geqslant 0}$ aussi !). En tant que différence de deux suites convergentes, la suite $(\sqrt{x_n})_{n\geqslant 0}$ converge. Donc la suite $(x_n)$ converge, par continuité de la fonction carré.
5. Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ convergent. On peut donc passer à la limite dans :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) \end{cases}$$
On obtient :
$$\begin{cases} \ell_x = \frac{1}{2}(\ell_x + \sqrt{\ell_y}) \\ \ell_y = \frac{1}{2}(\ell_y + \sqrt{\ell_x}) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x = \sqrt{\ell_y} \\ \ell_y = \sqrt{\ell_x} \end{cases}$$
6. Reprenons le résultat de la question précédente.
$$\begin{cases} \ell_x = \sqrt{\ell_y} \\ \ell_y = \sqrt{\ell_x} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x^2 = \ell_y \\ \ell_y^2 = \ell_x \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x^4 = \ell_x \\ \ell_y^4 = \ell_y \end{cases}$$
Rappel : l'équation $t^4 = t$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont 1 et 0 (preuve ?).
Pour tout $n$, on a $1 < x_n < y_n$.
Donc par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient $1 \leqslant \ell_x \leqslant \ell_y$.
Bilan : $\ell_x = 1$ et $\ell_y = 1$

Autre solution (très similaire).
On a $\ell_y = \sqrt{\ell_x}$.
En passant à la limite dans $1 < x_n < y_n$, on obtient alors $1 \leqslant \ell_x \leqslant \sqrt{\ell_x}$,
donc $1 \leqslant \sqrt{\ell_x} \leqslant \ell_x \leqslant \sqrt{\ell_x}$. Donc $\ell_x = \sqrt{\ell_x}$. Donc $\ell_x \in \{0\,;1\}$.
Comme $1 \leqslant \ell_x$, on a forcément $\ell_x = 1$.

**121**

Il est clair que les suites $u$ et $v$ sont bien définies (on prend bien la racine-carrée d'un nombre positif ou nul).

• Commençons par prouver que $\quad \forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant v_n$.

Soit $n \geqslant 1$.
En posant $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$, on voit que $u_n$ est de la forme $\sqrt{xy}$ et $v_n$ est de la forme $\dfrac{x+y}{2}$.
D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a $u_n \leqslant v_n$.

• Montrons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Soit $n \geqslant 1$. Étudions la différence $u_{n+1} - u_n$.
On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$ qui est positif d'après le point précédent et le fait que la fonction racine-carrée est croissante.

• Montrons que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
Soit $n \geqslant 1$. Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$.
On a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$ qui est négatif d'après le premier point.

• On n'a pas encore montré que $\lim(u_n - v_n) = 0$, donc on ne peut pas encore dire que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
Cependant, on peut reprendre les idées de la démonstration du théorème du cours qui dit que deux suites adjacentes convergent vers la même limite. Allons-y.

D'après les trois points précédents, on a

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$$

La suite $u$ est croissante majorée (par $v_1$) donc converge (d'après le th de la limite monotone).
La suite $v$ est décroissante minorée (par $u_1$) donc converge (d'après le th de la limite monotone).

• Montrons maintenant que $u$ et $v$ convergent vers la **même limite**.
Il faut regarder où l'on voit du $u_n - v_n$ dans ce qui précède.
Et bien, par exemple, dans le troisième point. On voit $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$.
Ainsi $u_n - v_n = 2(v_{n+1} - v_n)$. On passe à la limite dans cette égalité en utilisant que $v$ converge.
On en déduit que $\lim(u_n - v_n) = 0$.

• On a vu que $u$ et $v$ convergent et que $\lim(u_n - v_n) = 0$, donc $u$ et $v$ convergent vers la même limite.

1. Je vous laisse montrer que :
   — La suite $u$ est croissante.
   — La suite $v$ est décroissante (ce n'est pas évident).
   Après calculs, vous devez trouver
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n \;=\; \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$
   — On a $v_n - u_n \to 0$

   Les suites $u$ et $v$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite.
2. Les suites $u$ et $v$ sont adjacentes (avec $u$ croissante). Leur limite commune e vérifie :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \;\leqslant\; \mathrm{e} \;\leqslant\; v_n$$
   Justifions que l'on peut obtenir des inégalités strictes.
   Comme les suites $u$ et $v$ sont strictement monotones (WHY ?), on peut écrire
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \;<\; u_{n+1} \;\leqslant\; \mathrm{e} \;\leqslant\; v_{n+1} \;<\; v_n$$
   On obtient en particulier :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \;<\; \mathrm{e} \;<\; v_n$$
3. Supposons que e s'écrive $\dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
   D'après la question précédente, on a :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n!\, u_n \;<\; n!\, \frac{a}{b} \;<\; n!\, u_n + \frac{1}{n}$$
   D'où
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \;<\; n!\, \frac{a}{b} - n! u_n \;<\; \frac{1}{n}$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n!\, u_n \in \mathbb{N}$ (il faut savoir justifier cette appartenance).
   Particularisons $n$ de sorte que $n!\, \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z}$, par exemple $n = b$.
   Ainsi, pour cet entier $n$, on a $n!\, \dfrac{a}{b} - n! u_n \in \mathbb{Z} \cap \left]0, \frac{1}{n}\right[$.
   Comme $\mathbb{Z} \cap \left]0, \frac{1}{n}\right[ = \emptyset$, on obtient une contradiction.

**123**

Penser à examiner $\operatorname{Re} u_n$ et $\operatorname{Im} u_n$.

On obtient que la suite $\operatorname{Re} u$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$, donc tend vers 0.

Et la suite $\operatorname{Im} u$ est constante, donc tend vers $\operatorname{Im} u_0$.

Bilan. La suite $u$ converge vers $0 + \mathrm{i} \operatorname{Im} u_0$.

**125**

On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} z^k \;=\; \begin{cases} \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si } z \neq 1 \\[2ex] n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Quand $z = 1$, la suite est divergente.

• Pour $z \neq 1$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{1}{1 - z} + \dfrac{-1}{1 - z} z^{n+1}$.

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de la suite constante égale à 1, qui converge, et de la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si ($|z| < 1$ ou $z = 1$), c'est-à-dire $|z| < 1$ (car $z \neq 1$ dans ce cas).

BILAN. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

**129**

1. Voici le classement :

$$\sqrt{n}\ln n, \qquad \frac{n}{\ln n}, \qquad n, \qquad n\ln n, \qquad \frac{n^2}{\ln n}, \qquad n^2$$

   où il faut comprendre que

   i) $\sqrt{n}\ln n = \mathrm{o}\big(\frac{n}{\ln n}\big)$ ; en effet, on a $(\ln n)^2 = \mathrm{o}\big(\frac{n}{\sqrt{n}}\big)$, par croissances comparées.

   ii) $\frac{n}{\ln n} = \mathrm{o}(n)$ ; en effet, on a $\frac{1}{\ln n} = \mathrm{o}(1)$.

   iii) $n = \mathrm{o}(n\ln n)$ ; en effet, on a $1 = \mathrm{o}(\ln n)$.

   iv) $n\ln n = \mathrm{o}\big(\frac{n^2}{\ln n}\big)$ ; en effet, on a $(\ln n)^2 = \mathrm{o}\big(\frac{n^2}{n}\big)$, par croissances comparées.

   v) $\frac{n^2}{\ln n} = \mathrm{o}(n^2)$ ; en effet, on a $\frac{1}{\ln n} = \mathrm{o}(1)$.

2. Voici le classement :

$$\frac{1}{n^2}, \ \frac{\ln n}{n^2}, \ \frac{1}{n\ln n}, \ \frac{1}{n}, \ \frac{\ln n}{n}, \ \frac{1}{\ln n}$$

   où il faut comprendre que :

   i) $\frac{1}{n^2} = \mathrm{o}\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$ ; en effet, $1 = \mathrm{o}(\ln n)$.

   ii) $\frac{\ln n}{n^2} = \mathrm{o}\big(\frac{1}{n\ln n}\big)$ ; en effet, $(\ln n)^2 = \mathrm{o}(n)$.

   iii) $\big(\frac{1}{n\ln n}\big) = \mathrm{o}\big(\frac{1}{n}\big)$ ; en effet, $\big(\frac{1}{\ln n}\big) = \mathrm{o}(1)$

   iv) $\frac{1}{n} = \mathrm{o}\big(\frac{\ln n}{n}\big)$ ; en effet, $1 = \mathrm{o}(\ln n)$.

   v) $\frac{\ln n}{n} = \mathrm{o}\big(\frac{1}{\ln n}\big)$ ; en effet, on a $(\ln n)^2 = \mathrm{o}(1)$.

**133**

• Montrons que $u_n \to 0$.
Comme la suite est décroissante, elle possède une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, que l'on note $L$.
Par somme de limites, on a $u_n + u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2L$.
Or $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.
Par partage de limites, on en déduit que $2L = 0$, d'où $L = 0$.

• Montrons qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \geqslant 0$.
On a $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Par partage de signe, on en déduit qu'àpcr, $u_n + u_{n+1} \geqslant 0$.
Par décroissance de $u$, on obtient, à partir de ce rang, $u_n + u_n \geqslant 0$.
Ainsi, àpcr $u_n \geqslant 0$.

• Déterminons un équivalent simple de $u_n$.
On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

D'où, en ajoutant $u_{n+1}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_{n+2} \leqslant u_{n+1} + u_{n+1} \leqslant u_n + u_{n+1}$$

À gauche, la quantité est équivalente à $\dfrac{1}{n+1}$.
À droite, la quantité est équivalente à $\dfrac{1}{n}$, elle-même équivalente à $\dfrac{1}{n+1}$.
D'après le théorème des Gendarmes pour les équivalents [1], le membre du milieu est équivalent à $\dfrac{1}{n+1}$, autrement dit :

$$2u_{n+1} \sim \frac{1}{n+1}$$

D'où, par décalage d'indice, on a :

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

1. Ce théorème figure-t-il dans notre cours ?

**134**

Supposons que $nu_n \to L$ avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
Alors $n \sim n+1$.
Multiplions par $u_{n+1}$, d'où $nu_{n+1} \sim (n+1)u_{n+1}$.
Par hypothèse, on a $nu_n \to L$, donc par décalage, on a $(n+1)u_{n+1} \to L$.
Par partage de limites avec les équivalents, on a $nu_{n+1} \to L$.

**135**

Utiliser l'encadrement de la partie entière.
Il faudra peut-être distinguer le cas où $x = 0$.

**Première partie de la question.**

Supposons $(c_n)$ convergente.
En utilisant la formule d'addition du cosinus, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \cos\big((n+1)\theta\big) \;=\; \cos(n\theta)\cos\theta \;-\; \sin(n\theta)\sin\theta$$

Comme $\theta \not\equiv 0[\pi]$, on a $\sin\theta \neq 0$. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad s_n \;=\; \frac{1}{\sin\theta}\Big(\cos\theta\, c_n \;-\; c_{n+1}\Big)$$

On voit ainsi que $(s_n)$ est une combinaison linéaire de $(c_n)$ et $(c_{n+1})$ toutes deux convergentes par hypothèse.
Ainsi, $(s_n)$ est convergente.

L'implication $(s_n)$ CV $\implies$ $(c_n)$ CV se prouve de manière assez analogue en utilisant la formule d'addition du sinus.

**Attention à cette preuve fausse.**

Supposons $c_n \to \ell$. Comme le cosinus est compris entre $-1$ et $1$, on obtient que $\ell \in [-1,1]$.
Comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n^2 + s_n^2 = 1$, on a $s_n^2 \to 1-\ell^2$. Comme $\ell \in [-1,1]$, on a $1-\ell^2 \in \mathbb{R}^+$.
Comme la racine carrée est continue en $1-\ell^2 \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{s_n^2} \to \sqrt{1-\ell^2}$, d'où $|s_n| \to \sqrt{1-\ell^2}$.
Hélas, on ne peut pas en déduire que la suite $(s_n)$ converge.
On pourrait très bien avoir $s_n = (-1)^n\sqrt{1-\ell^2}$ qui est le terme général d'une suite divergente.

**Deuxième partie de la question.**

**Preuve 1 (avec des complexes).**
On raisonne par l'absurde en supposant NON(les deux suites divergent), c'est-à-dire « au moins une des deux suites converge ».
D'après la première partie de la question, on obtient la convergence des deux suites.
Ainsi, la suite complexe $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On rappelle le résultat de cours

$$(z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \qquad \iff \qquad |z|<1 \text{ ou } z=1$$

Posons $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (donc $|z|=1$). Comme $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, l'implication directe nous permet d'en déduire que $\mathrm{e}^{i\theta} = 1$.
D'où $\theta \equiv 0\ [2\pi]$.
D'où la contradiction car $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$.

**Preuve 2 (en mode lycée).**
Notons $a = \lim c_n$ et $b = \lim s_n$.
En écrivant $c_{n+1}$ et $s_{n+1}$ en fonction de $c_n$ et $s_n$, on obtient après passage à la limite (et utilisation de Pythagore) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& a\cos\theta - b\sin\theta \\ b &=& b\cos\theta + a\sin\theta \\ a^2+b^2 &=& 1 \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& a(\cos\theta-1) - b\sin\theta \\ 0 &=& b(\cos\theta-1) + a\sin\theta \\ 1 &=& a^2+b^2 \end{array}\right.$$

Remarquons que les lignes L1 et L2 sont identiques après $a \leftrightarrow b$ et $\theta \leftrightarrow -\theta$.
Donc pour l'instant, je laisse tomber L2 et je ne garde que les lignes L1 et L3.
On a $2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta$.
La ligne L1 fournit après simplification par $-2\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ car $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& a\sin\frac{\theta}{2} + b\cos\frac{\theta}{2} \\ 1 &=& a^2+b^2 \end{array}\right.$$

Élevons L1 au carré et utilisons L3.
On a

$$0 = 1 + 2ab\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{d'où} \qquad 0 = 1 + ab\sin\theta$$

De la même manière avec $L_2$, on obtient $0 = 1 - ab\sin\theta$.
Résumons. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 1 + ab\sin\theta \\ 0 & = & 1 - ab\sin\theta \end{array}\right.$$

Par somme, on obtient $0 = 2$, d'où la contradiction.

On va montrer « d'un seul coup d'un seul » que la suite $B$ converge en attrapant même au passage sa limite !
Soit $n \in \mathbb{N}$ que l'on suppose supérieur à 2.
On a

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \left( \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right) + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

On a $\frac{2}{n} \to 0$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \to 0$ (cf. ci-dessous).
Par opérations sur les limites, on en déduit que $B_n \to 2$.

**Justification.** Soit $n \geqslant 2$.
On a

$$(\clubsuit) \qquad \forall\, k \in [\![2, n-2]\!], \quad \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

Par somme, on a donc

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{n-3}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

Reprenons. On a donc

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

D'après le théorème des Gendarmes, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \to 0$ (WHY ?).

**Justification de ($\clubsuit$)**
Posons $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.
On a les inégalités suivantes sur les coefficients binomiaux (à montrer en exercice) :

$$\forall\, k \in [\![0, m]\!], \ \binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1} \qquad \text{et} \qquad \forall\, j \in [\![m+1, n]\!], \ \binom{n}{j} \geqslant \binom{n}{j+1}$$

Pour la preuve, il sera judicieux d'écrire $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$.
Ainsi,

$$\forall\, k \in [\![2, m]\!], \quad \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{1}{\binom{n}{2}} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in [\![m+1, n-2]\!], \quad \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{1}{\binom{n}{2}} \quad \text{prendre } j = n-3$$

**Remarque.** La suite $(B_n)$ est décroissante à partir du rang 3.
On a

$$\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{n+1}{n(n-1)} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{n^2+n+4}{n(n+1)(n-1)}$$

et pour tout $k \in [\![3, n]\!]$, on a $\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$ (penser à la relation de Pascal).
Ainsi

$$B_n = 1 + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant 1 + \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = B_{n+1}$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Par convergence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |b_n - \beta| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on coupe la somme définissant $w_n$ en trois parties, en isolant les termes du type $a_k b_{n-k}$ pour lesquels simultanément $k \geqslant n_0$ et $n - k \geqslant n_0$.
On écrit donc :

$$w_n = \frac{a_0 b_n + \cdots + a_{n_0-1} b_{n-n_0+1}}{n+1} + \frac{a_{n-n_0+1} b_{n_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} + \frac{a_{n_0} b_{n-n_0} + a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} + \cdots + a_{n-n_0} b_{n_0}}{n+1}$$

On étudie séparément chaque terme $G_n$, $D_n$ puis $C_n$.
Le numérateur de $G_n$ est une somme de $n_0$ termes (donc le nombre de termes est indépendant de $n$) qui sont tous bornés : en effet, les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent donc sont bornées.
Le terme général $G_n$ est donc du type $\dfrac{1}{n+1} \times$ borné.
Ainsi $(G_n)$ est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0, donc $(G_n)$ tend vers 0.
Idem pour $D_n$.
Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad |G_n| \leqslant \varepsilon \text{ et } |D_n| \leqslant \varepsilon.$$

C'est donc $C_n$ qui doit être proche de $\alpha\beta$. On va s'inspirer de la preuve du fait que le produit de deux suites convergentes est convergent. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} C_n - \alpha\beta &= C_n - \frac{\alpha\beta + \cdots + \alpha\beta}{n+1} \\ &= \frac{(a_{n_0} b_{n-n_0} - \alpha\beta) + (a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} - \alpha\beta) + \cdots + (a_{n-n_0} b_{n_0} - \alpha\beta)}{n+1} - \frac{2n_0\alpha\beta}{n+1} \end{aligned}$$

Occupons-nous du premier terme. Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|a_n| \leqslant M$ et $|b_n| \leqslant M$. On a alors :

$$\forall k \in [\![ n_0, n - n_0 ]\!], \quad |a_k b_{n-k} - \alpha\beta| \leqslant |a_k|\,|b_{n-k} - \beta| + |\beta|\,|a_k - \alpha| \leqslant 2M\varepsilon.$$

D'où

$$\frac{(a_{n_0} b_{n-n_0} - \alpha\beta) + (a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} - \alpha\beta) + \cdots + (a_{n-n_0} b_{n_0} - \alpha\beta)}{n+1} \leqslant \frac{n - 2n_0 + 1}{n+1} \times 2M\varepsilon \leqslant 2M\varepsilon$$

Occupons-nous du deuxième terme. Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_2, \quad \left| \frac{2n_0\alpha\beta}{n+1} \right| \leqslant \varepsilon$$

Par somme des deux termes, on a :

$$\forall n \geqslant n_2, \quad |C_n - \alpha\beta| \leqslant (2M+1)\varepsilon$$

Résumons. Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$, on a :

$$|w_n - \alpha\beta| \leqslant |G_n| + |C_n - \alpha\beta| + |D_n| \leqslant (2M+3)\varepsilon.$$

Ceci prouve que $(w_n)$ converge vers $\alpha\beta$

**143**

Aubin Vandier me dit $\forall \varepsilon > 0,$ àpcr, $|w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Or $w$ est périodique, donc le « àpcr » se transforme en « pour tout $n$ ».
Ainsi, $\boxed{\text{à } n \text{ fixé}}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon$, on a $w_n = \ell$.
Et ceci est vrai pour tout $n$ !
Donc $w$ est constante.