Espaces vectoriels

Algèbre linéaire, épisode 1

exercices

Exercice abstrait

101 Le complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que le produit $E \times E$ muni de l'addition usuelle $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et du produit externe par les complexes défini par :

$$(a + ib) \cdot (x, y) \ = \ (a \cdot x - b \cdot y,\ a \cdot y + b \cdot x)$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (appelé le *complexifié* de E).

Sous-espaces vectoriels

102 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Représenter les ensembles suivants. Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel) ?

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ |x| = |y|\}$$
$$F_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x \geqslant y\big\}$$
$$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ 2x = -3y\}$$

103 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel) ?

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 4z = 0\}$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z + 1 = 0\}$$
$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } 2x + y - 3z = 0\}$$
$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 4z\}$$

104 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: d'une description à l'autre

Voici une liste de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés soit comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre, soit comme ensemble de vecteurs vérifiant une ou deux équations linéaires. Pour chacun d'entre eux, donner une description de l'autre type.

$$A = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\Big\} \qquad E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 2x+y-z = 0\Big\}$$
$$B = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + 2y - 3z = 0\Big\} \qquad F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2z = x+3y-2z = 0\Big\}$$
$$C = \operatorname{Vect}\Big((1, 2, -1), (2, 3, -3)\Big) \qquad G = \operatorname{Vect}\Big((1, 2, -1)\Big)$$
$$D = \operatorname{Vect}\Big((1, 1, 1), (1, -1, 0)\Big) \qquad H = \operatorname{Vect}\Big((2, 3, -3)\Big)$$

105 Sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$

Les ensembles suivants sont-ils des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$?

(i) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, $F_\theta = \{re^{i\theta},\ r \in \mathbb{R}^+\}$

(ii) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, $F_\theta = \{re^{i\theta},\ r \in \mathbb{R}\}$

(iii) Pour $r \in \mathbb{R}$ fixé, $F_r = \{re^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$

(iv) $E = \Big\{re^{i\theta},\ r \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}\Big\}$

(v) $E = \Big\{re^{i\theta},\ r \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in \{-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}\Big\}$

106 Sous-espaces vectoriels de suites

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites réelles ?

(i) l'ensemble des suites réelles convergentes ; divergentes
(ii) l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0 ; convergeant vers 1
(iii) l'ensemble des suites réelles bornées
(iv) l'ensemble des suites réelles croissantes ; monotones
(v) l'ensemble des suites p-périodiques avec $p \in \mathbb{N}^*$ fixé
(vi) l'ensemble des suites réelles périodiques
(vii) l'ensemble des suites géométriques (de raison quelconque)
(viii) l'ensemble des suites géométriques de raison q avec $q \in \mathbb{R}$ fixé
(ix) l'ensemble des suites arithmétiques (de raison quelconque)
(x) l'ensemble des suites arithmétiques de raison r où $r \in \mathbb{R}$ fixé

107 Sous-espaces vectoriels de fonctions

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

(i) l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$
(ii) l'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$
(iii) l'ensemble des fonctions paires
(iv) l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur β en α (où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$)
(v) l'ensemble des fonctions qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs
(vi) l'ensemble des fonctions T-périodiques ($T \in \mathbb{R}_+^*$ fixé)
(vii) l'ensemble des fonctions périodiques
(viii) l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Opérations sur les sous-espaces vectoriels

108 Réunion

Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel E.
Montrer l'équivalence

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \quad \text{ou} \quad G \subset F$$

109 Suite croissante

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces vectoriels de E (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \subset F_{n+1}$) .
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

110 Égalité

Soient F, G, et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que :

i) $F + H = G + H$ ii) $F \cap H = G \cap H$ iii) $F \subset G$.

Montrer que $F = G$.

111 Somme et intersection

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E. Montrer les assertions suivantes :

(i) $A \cap B = A + B \iff A = B$
(ii) $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$
(iii) $B \subset A \implies (A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + C)$

112 Déjà vu en classe

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Comparer $(F + G) \cap H$ et $(F \cap H) + (G \cap H)$.

Sous-espaces supplémentaires

113 **Supplémentaires dans un espace vectoriel abstrait**

Soit A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E tels que $A \oplus B = E$ et $A \subset C$.
Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.

114 **Supplémentaires chez $\mathbb{K}^n$**

Soit $n \geqslant 2$.

Soit $H = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

Soit D le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Montrer que les sous-espace vectoriels H et D sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

115 **Supplémentaires chez les matrices**

Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace non nulle. On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(A_0)$.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus D$.

116 **Supplémentaires chez les suites**

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.
Montrer que l'ensemble des suites constantes C et l'ensemble Z des suites convergeant vers 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

117 **Supplémentaires chez les fonctions dérivables en 3**

Soit E l'espace vectoriel (WHY ?) des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 3.
On pose $F = \{f \in E \mid f(3) = f'(3) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ f : x \mapsto ax + b\}$.
Montrer que $E = F \oplus G$.

118 **Un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$**

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les parties

$$F = \left\{f \in E \mid f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E puis montrer qu'ils sont supplémentaires dans E.

Familles (finies) de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ ou de E quelconque

119 **Familles d'un sous-espace vectoriel et systèmes linéaires**

On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ suivants.

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad d = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad e = \begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix},\quad f = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad g = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

Pour chacune des questions suivantes, indiquez ce qu'il faudrait vérifier pour répondre à la question, sous la forme :

Il s'agit de
- *montrer que le système* $\begin{cases}\cdots = \cdots\\ \cdots = \cdots\end{cases}$ *a des solutions / a une unique solution / n'a pas de solution.*
- *trouver toutes les solutions du système* $\begin{cases}\cdots = \cdots\\ \cdots = \cdots\end{cases}$
- *... (liste non exhaustive).*

On ne cherchera pas à faire les calculs.

(i) Montrer que la famille (a, b, c) est libre.
(ii) Montrer que $e \notin \mathrm{Vect}(c, f)$.
(iii) Montrer que la famille (d, e, f) est génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.
(iv) Montrer que $\mathrm{Vect}(d, g) \subset \mathrm{Vect}(a, b, f)$.
(v) Déterminer toutes les relations de liaison entre a, b, c et d.

120 Égalité de deux Vect dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $a = (-1, 2, 1)$ et $b = (0, 1, -1)$.

1. Déterminer un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(a, b)$.
2. Soit $u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$. Montrer que l'on a $\mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Vect}(u, v)$.

121 Combinaison linéaire ?

1. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(2, 1, 0)$?
2. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(1, 1, 1)$?

122 Petites questions

1. La famille $\big((-1, 2, 3), (-3, -1, 1), (2, 0, -1), (0, 1, 1)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.
3. Montrer, à l'oral seulement, que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 2t = 0 \text{ et } 2x + y = 0\}$ est un espace vectoriel. Puis en déterminer une base.

123 Base de $\mathbb{K}^3$ et coordonnées

Montrer que $\big((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, , -1)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(3, 7, -2)$ dans cette base.

124 Belle famille !

Soit $n \geqslant 2$. Soit E un espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E.
Montrer que la famille $(e_1 + e_2,\ e_2 + e_3, \dots,\ e_{n-1} + e_n)$ est libre.
Commencer par $n = 3$, puis $n = 4$.

125 En ajoutant un même vecteur à une famille libre

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

126 Condition pour être liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre dans E et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
On pose $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, ainsi que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = u + e_i$.
Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = -1$.

Familles de matrices

127 Trouver une famille génératrice

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M^\top = M + \mathrm{tr}(M) I_n$.
   Montrer que M est symétrique et de trace nulle.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Ici $n = 3$. Déterminer une famille génératrice de $F = \Big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^\top = M + \mathrm{tr}(M) I_3\Big\}$

128 Base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles

Montrer que l'on peut trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.
Généraliser en taille n.

Familles (finies) de vecteurs (suites, fonctions)

129 **Combinaison linéaire ?**

1. La fonction $x \mapsto \cos(2x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est-elle combinaison linéaire des fonctions cos et sin ?
2. Montrer que les suites qui sont combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites 2 périodiques.

130 **Espace vectoriel engendré par...**

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}) = \mathrm{Vect}(\exp, \widehat{\exp})$, où $\widehat{\exp} : x \mapsto \exp(-x)$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big(x \mapsto \cos(2x), \cos^2, \sin^2\big)$ peut s'obtenir comme $\mathrm{Vect}(f, g)$, pour deux fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bien choisies.

131 **Deux familles génératrices des polynômes trigonométriques paires**

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k : x \mapsto (\cos x)^k$ et $c_k : x \mapsto \cos(kx)$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ suivants :

$$P_N = \mathrm{Vect}(p_0, \dots, p_N) \quad \text{et} \quad C_N = \mathrm{Vect}(c_0, \dots, c_N).$$

Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $P_N = C_N$.

132 **Liberté ?**

1. Les fonctions $\cos, \sin, \exp$ sont-elles linéairement indépendantes ?
2. Les fonctions Arccos, Arcsin et $x \mapsto 1$ sont-elles linéairement indépendantes ?
3. Les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles linéairement indépendantes ?

133 **Liberté d'une famille d'exponentielles**

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f_0, f_1, f_2\big)$ est libre où $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.
2. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{F} = \big(f_0, f_1, \dots, f_n\big)$ est libre $\quad$ où $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.
   Montrer que les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ où $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x}$.

Étudier le comportement en $+\infty$ d'une combinaison linéaire de ces fonctions.

134 **Liberté des puissances de sinus**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\sin^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

135 **Liberté des $\sin(kx)$**

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, considérons $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{array}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Récurrence et dériver deux fois.

136 **Liberté d'une famille de suites**

1. Soit a, b, c trois réels **distincts** (et éventuellement positifs si vous voulez).
   Montrer que la famille $\mathcal{F} = \Big(\big(a^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(b^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(c^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est libre.
2. Soit $0 < a_1 < \cdots < a_s$ des réels.
   Montrer que la famille $\mathcal{F} = \Big(\big(a_1^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \big(a_s^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est libre.

137 **Liberté des $x \mapsto |x - a_k|$**

Soit $n \geqslant 1$. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts.
Montrer que les fonctions $g_1 : x \mapsto |x - a_1|, \dots, g_n : x \mapsto |x - a_n|$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Étudier la dérivabilité en a_i d'une combinaison linéaire de ces fonctions.

Autres

138 Supplémentaire et intersection

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F+G=E$.
Soit F' un supplémentaire de $F\cap G$ dans F. Montrer que $F'\oplus G=E$.

139 Des supplémentaires pour un même hyperplan

Soit H un sous-espace vectoriel de E et $v_0\neq 0_E$.
Si on a $E=H\oplus \text{Vect}(v_0)$, alors nécessairement $v_0\notin H$. WHY ?
Mettons-nous dans les conditions précédentes.
Montrer que tout vecteur $w\notin H$ vérifie $E=H\oplus\text{Vect}(w)$.
On montrera de manière séparée que la somme est directe, puis qu'elle fait E tout entier.

140 Réunion de sev stricts

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $V_1,\dots,V_n$ des sous-espaces vectoriels stricts de E.
On veut montrer que E n'est pas égal à la réunion $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$.
On raisonne par l'absurde.

1. Expliquer pourquoi on peut se ramener au cas où aucun V_j n'est inclus dans V_1 (pour $j\geqslant 2$), et V_1 n'est pas inclus dans $\bigcup\limits_{i=2}^{n} V_i$.

On peut donc trouver, pour tout $j\geqslant 2$, un x_j dans $V_j\setminus V_1$.
On peut aussi trouver $x_1\in V_1\setminus\bigcup\limits_{i=2}^{n} V_i$.
Pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ et $j\geqslant 2$, on pose alors $v_{\lambda,j}=\lambda x_1+x_j$.

2. Soit $j\geqslant 2$ fixé.
Justifier l'existence de $i_0\in[\![1,n]\!]$ et de $\lambda\neq\mu\in\mathbb{K}$ deux scalaires distincts tels que $v_{\lambda,j}\in V_{i_0}$ et $v_{\mu,j}\in V_{i_0}$.
3. Montrer que i_0 est nécessairement égal à 1.
4. Mettre en évidence une absurdité.

141 Réunion de sev stricts : meilleur énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $V_1,\dots,V_n$ des sous-espaces vectoriels **stricts** de E, avec $n\geqslant 2$.
On suppose que $E=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$.

1. On considère $A=\left\{i\in[\![1,n-1]\!]\ \middle|\ V_i\not\subset V_{i+1}\cup\cdots\cup V_n\right\}$.
Montrer que A possède un minimum.
Notons-le i_0.
Montrer que l'on a alors $E=V_{i_0}\cup V_{i_0+1}\cup\cdots\cup V_n$.
2. Quitte à renuméroter les V_j, on suppose (sans perte de généralités, donc) que $i_0=1$.
On suppose donc que $V_1\not\subset V_2\cup\cdots\cup V_n$. On peut donc trouver $y\in(V_2\cup\cdots\cup V_n)\setminus V_1$.
   (a) Montrer que $V_2\cup\cdots\cup V_n\not\subset V_1$. On peut donc trouver $x_1\in V_1\setminus(V_2\cup\cdots\cup V_n)$.
   (b) Montrer que $\quad\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \exists i_\lambda\in[\![2,n]\!],\ y+\lambda x_1\in V_{i_\lambda}$.
   (c) On peut donc considérer une application « choix »
$$\begin{array}{rccl}\varphi: & \mathbb{K} & \longrightarrow & [\![2,n]\!]\\ & \lambda & \longmapsto & i_\lambda \text{ tel que } y+\lambda x_1\in V_{i_\lambda}\end{array}$$
   Montrer que φ est injective.
   (d) Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (ce qui est le cas en PCSI), mettre en évidence une contradiction.

On vient de montrer le théorème suivant :

Lorsque $\mathbb{K}$ est infini, E ne peut pas être la réunion de sous-espaces vectoriels stricts.

Khôlles

142

Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et que $F \neq E$).
Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

143

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Espaces vectoriels

Algèbre linéaire, épisode 1

corrigés

106

Grégoire Serres me dit de prendre $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $v_n = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Alors $u_n - v_n = (-1)^n$.

On montre à la main que u et v sont croissantes.

108

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $F \cup G$ est un sev de E.
Montrons que $F \subset G$ ou $G \subset F$.
Raisonnons par l'absurde.
Alors on peut trouver $v_F \in F \setminus G$ et $v_G \in G \setminus F$.
A fortiori, v_F et v_G appartiennent à $F \cup G$.
Par hypothèse, $F \cup G$ est un sev de E, donc $v_F + v_G \in F \cup G$.
Ainsi, on a ou bien $v_F + v_G \in F$, ou bien $v_F + v_G \in G$.
Traitons le premier cas (l'autre cas est analogue).
On a alors $v_G = (v_F + v_G) - v_F$ qui est dans F (WHY ?).
Ce qui contredit le fait que v_G n'appartienne pas à F.

Attention à la preuve fausse suivante.
Fixons $v_F \in F$ et $v_G \in G$. Et montrons que $v_F \in G$ ou $v_G \in F$.
Il y a une erreur de logique subtile ici.
Pour la comprendre, méditer cela.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \in \mathbb{R}^+$ ou bien $x \in \mathbb{R}^-$. Et pourtant, on n'a pas $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^-$.

113

• **Première rédaction.**
Montrons que $\forall c \in C,\ \exists!(a, \beta) \in A \times B \cap C,\ c = a + \beta$.

Existence. Soit $c \in C$.
A fortiori, $c \in E$ donc il s'écrit $c = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
Comme $b = c - a$ et que $A \subset C$, on a $b \in C$.
Il suffit donc de poser $\beta = b$.

Unicité. À la main. Ou avec l'intersection.

• **La même solution, mais déguisée.** Montrons que $A \oplus (B \cap C) = C$.
Pour cela, nous allons montrer que

$$\left\{\begin{array}{lccc} ① & A \ + \ B \cap C & = & C \\ \text{et} & & & \\ ② & A \cap (B \cap C) & = & \{0_E\} \end{array}\right.$$

① On procède par double inclusion.
▷ Montrons que $A + B \cap C \subset C$. **Cette inclusion est cadeau.**
On a

$$A \subset C \text{ (hyp)} \qquad \text{et} \qquad B \cap C \subset C$$

Par somme de sous-espaces vectoriels de C, on a $A + B \cap C$ est un sous-espace vectoriel de C.
▷ Montrons que $C \subset A + B \cap C$.
Soit $c \in C$. En particulier $c \in E \overset{\text{hyp}}{=} A + B$. Donc il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $c = a + b$.
Il ne reste plus qu'à montrer que $b \in C$ (WHY ?).
On a $b = c - a$.
Or $c \in C$ et $a \in A \subset C$, donc $c - a \in C$.
Finalement, $b \in C$.

② Comme A et B sont en somme directe, on a $A \cap B = \{0_E\}$. Ainsi, on a :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = \{0_E\} \cap C = \{0_E\}$$

Par analyse-synthèse.

Soit $u \in E$. Notons ℓ_u sa limite (licite car $u \in E$).

Analyse.

Soit $c = (c_n)$ et (z_n) deux suites telles que $\begin{cases} \text{i)} & c \in C \\ \text{ii)} & z \in Z \\ \text{iii)} & u = c + z \end{cases}$

Comme c est constante, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, c_n = \lambda$.

Comme $z \in Z$, on a $z_n \to 0$.

Par passage à la limite sur les suites convergentes, on a

$$\ell_u \;=\; \lambda + 0.$$

Ainsi, $\lambda = \ell_u$, donc on peut exprimer la suite c en fonction de la suite u.

Précisément, on a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \ell_u$ (ou encore l'égalité de suites $c = \ell_u$).

On peut alors exprimer la suite z en fonction de u.

Comme $z = u - c$, on a $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = u_n - \ell_u$ (ou encore l'égalité de suites $z = u - \ell_u$).

Synthèse.

Posons c et z les suites définies par $\forall\, n \in \mathbb{N}, c_n = \ell_u$ et $z_n = u_n - \ell_u$.

Je vous laisse vérifier sur votre copie que $\begin{cases} \text{i)} & c \in C \\ \text{ii)} & z \in Z \\ \text{iii)} & u = c + z \end{cases}$

En deux temps.

La somme est directe. Montrons que $C \cap Z = \{0_E\}$.

L'inclusion $\supset$ est automatique.

Montrons l'autre inclusion.

Soit $u \in C \cap Z$.

Alors u est constante et converge vers 0.

Par unicité de la limite, la constante vaut 0, donc u est la suite nulle.

L'égalité $E = C + Z$.

L'inclusion $\supset$ est automatique.

Montrons l'autre inclusion.

Fixons $u \in E$. Notons $\ell_u \in \mathbb{R}$ la limite de u (licite, car $u \in E$).

Contemplons l'égalité

$$u \;=\; \ell_u + (u - \ell_u).$$

Cette égalité montre (WHY ?) que $u \in C + Z$.

120

1. Proposer un candidat et faire un mini-raisonnement par l'absurde.
2. Aller chercher dans son cours où il est question de l'égalité de deux Vect.

121

1. Non. En effet, une combinaison linéaire des deux vecteurs de l'énoncé est un vecteur s'écrivant sous la forme
$$\lambda(1,2,0)+\mu(2,1,0)=(\lambda+2\mu,2\lambda+\mu,0),$$
pour un certain couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Un tel vecteur a manifestement sa troisième coordonnée nulle, ce qui n'est pas le cas de $(3,3,1)$.
2. Non. En effet, une combinaison linéaire des deux vecteurs de l'énoncé est un vecteur s'écrivant sous la forme
$$\lambda(1,2,0)+\mu(1,1,1)=(\lambda+\mu,2\lambda+\mu,\mu),$$
pour un certain couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Pour que ce vecteur soit égal à $(3,3,1)$, il faudrait avoir $\mu=1$, ce qui entraîne alors $\lambda+1=2\lambda+1=3$, ce qui est impossible.

124

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1(e_1+e_2) + \lambda_2(e_2+e_3) + \cdots + \lambda_{n-1}(e_{n-1}+e_n) = 0_E$$

On peut réécrire cette égalité sous la forme

$$\lambda_1 e_1 + (\lambda_1+\lambda_2)e_2 + (\lambda_2+\lambda_3)e_3 + \cdots + (\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1})e_{n-1} + \lambda_{n-1}e_n = 0_E.$$

Comme la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre, cette relation de liaison est nécessairement triviale.
On a donc les n égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & + \quad \lambda_{n-1} & = & 0 \\ & & & & \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $\lambda_{n-1} = 0$, puis $\lambda_{n-2} = 0$, puis ..., puis $\lambda_1 = 0$.

Remarque. Le système linéaire n'est pas carré (ce n'est pas grave), donc on ne peut pas parler d'inversibilité d'une certaine matrice (ce n'est pas grave).
Si l'on veut, on peut le rendre carré en disant que l'on a déjà $\lambda_{n-1} = 0$, ce qui supprime une égalité.
On a donc $n-1$ égalités et $n-1$ inconnues, d'où le système carré de taille $n-1$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & + \quad \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système est carré de taille $n-1$. La matrice de ce système est (carrée) triangulaire inférieure à diagonale unité, donc est inversible, d'où la nullité de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$.
Comme on avait déjà $\lambda_{n-1} = 0$, on a bien obtenu la nullité de tous les λ_k.

On va montrer l'équivalence sous la forme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \neq -1 \implies \text{famille } (v_1,\ldots,v_n) \text{ est libre} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = -1 \implies \text{famille } (v_1,\ldots,v_n) \text{ est liée}$$

— Supposons $\sum_{k=1}^{n} a_k \neq -1$.
Montrons que la famille $(v_1,\ldots,v_n)$ est libre.
Soit $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.
Comme $v_i = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k + e_i$, on a

$$\lambda_1\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k + e_1\Big) + \cdots + \lambda_n\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k + e_n\Big) \;=\; 0$$

Regroupons les termes en fonction de e_1, e_2, …, e_n, c'est-à-dire faisons apparaître une relation de liaison entre les e_i.
On a

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_1 + \lambda_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n a_n + \cdots + \lambda_n a_n + 1)e_n = 0$$

En notant $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, on a

$$(sa_1 + \lambda_1)e_1 + \cdots + (sa_n + \lambda_n)e_n = 0$$

On obtient une relation de liaison entre les e_i. La famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre, donc cette relation de liaison est triviale.
Ainsi,

$$(\bigstar) \qquad \forall\, k \in [\![1,n]\!],\ sa_k + \lambda_k = 0$$

Solution astucieuse.
Par somme de ces n égalités, on a

$$s(a_1 + \cdots + a_n) \;+\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \;=\; 0$$

c'est-à-dire

$$s(a_1 + \cdots + a_n) + s \;=\; 0$$

d'où $s\big(\sum_{k=1}^{n} a_k + 1\big) = 0$.
Par hypothèse, la somme des a_k est différente de -1, donc $s = 0$.
En reportant cette information dans les égalités $(\bigstar)$, on obtient

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k = 0$$

Solution moins astucieuse, mais plus difficile.
On repart de $(\bigstar)$.
On renverse la vapeur en exprimant ces n égalités comme n équations en les inconnues $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.
Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
(1+a_1)\lambda_1 & + & a_1\lambda_2 & + & \cdots & + & a_1\lambda_n & = & 0 \\
a_2\lambda_1 & + & (1+a_2)\lambda_2 & + & \cdots & + & a_2\lambda_n & = & 0 \\
 & & & & \ddots & & & & \\
a_n\lambda_1 & + & a_n\lambda_2 & + & \cdots & + & (1+a_n)\lambda_n & = & 0
\end{array}\right.$$

Il n'y a plus qu'à montrer que la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ & & \ddots & \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$$

ou de manière équivalente, il suffit de montrer que sa transposée est inversible :

$$\begin{bmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$$

Un élève de spé peut dire : il s'agit d'une matrice du type $A+I$ avec A matrice de rang 1, qui a pour valeur propre 0 et sa trace, à savoir $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

La matrice $A+I$ est inversible si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de A.

Comme on a supposé que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \neq -1$, on en déduit que $A+I$ est inversible.

Un élève de sup peut échelonner (plutôt la transposée mais ce n'est pas du tout immédiat, ni facile ; on peut quand même y arriver...). On peut poser $M = A+I$ et remarquer que $A^2 = \alpha A$ où $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Donc $(M-I)^2 = \alpha(M-I)$, ce qui fournit un polynôme annulateur pour M avec un coefficient constant non nul :

$$M^2 - (2+\alpha)M + (1+\alpha)I = 0$$

Comme $\alpha \neq -1$, le coefficient constant de $X^2 - (2+\alpha)X + (1+\alpha)$ est non nul, donc M est inversible (savez-vous prouver ce résultat ?).

— Supposons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = -1$.

Montrons que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée.

Il suffit d'exhiber une relation de liaison non triviale entre les v_i.

En voici une

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

Les a_k sont non tous nuls puisque leur somme vaut -1.

Justifions l'égalité

$$\begin{array}{rcl} a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n & = & a_1(u+e_1) + \cdots + a_n(u+e_n) \\ & = & (a_1 + \cdots + a_n)u + (a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) \\ & = & (-1)u + u \\ & = & 0 \end{array}$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M^\top = M + \operatorname{tr}(M) I_n$.
   Appliquons la transposée à cette égalité. On obtient, par linéarité de la transposée :
   $$\left(M^\top\right)^\top = M^\top + \operatorname{tr}(M) I_n^\top$$
   d'où
   $$M = M^\top + \operatorname{tr}(M) I_n$$
   On obtient le petit système
   $$\left\{\begin{array}{rcl} M^\top & = & M + \operatorname{tr}(M) I_n \\ M & = & M^\top + \operatorname{tr}(M) I_n \end{array}\right.$$
   Effectuons $L_1 - L_2$. On obtient $M^\top - M = M - M^\top$, d'où $M^\top = M$. Ainsi M est symétrique. Et en reportant cette information dans l'égalité initiale, on trouve $\operatorname{tr}(M) I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, donc $\operatorname{tr}(M) = 0$.

   La réciproque est vraie.
   Si M est symétrique et de trace nulle, alors on a $M^\top = M$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$, d'où l'égalité $M^\top = M + \operatorname{tr}(M) I_n$.
2. On a montré que F est exactement l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle.
   Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
   Ou bien vous faites la preuve standard, ou bien vous invoquez le fait que F est l'intersection de deux sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, lesquels ?
   Déterminons une famille génératrice de F.
   $\boxed{\subset}$ Soit $M \in F$, c'est-à-dire une matrice carrée de taille 3 symétrique et de trace nulle.
   Alors M est de la forme :
   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \qquad \text{avec } a + d + f = 0$$
   donc de la forme
   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$
   Ainsi M s'écrit
   $$a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   On a donc montré l'inclusion $F \subset \operatorname{Vect}(\text{ces 5 matrices})$.

   $\boxed{\supset}$ On vérifie que les 5 matrices ci-dessus sont bien symétriques et de trace nulles, donc sont dans F.
   Comme F est stable par combinaison linéaire, on en déduit que $\operatorname{Vect}(\text{ces 5 matrices}) \subset F$.

   BILAN. On a l'égalité $F = \operatorname{Vect}(\text{ces 5 matrices})$ où les 5 matrices sont :
   $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{11}-E_{33}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}+E_{21}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{13}+E_{31}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{22}-E_{33}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{23}+E_{32}}$$

Le cas $n = 2$

La famille des E_{ij} est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (c'en est même une base).
On a

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \;=\; \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21}) \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21}, I) \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{Vect}(I{+}E_{11}, I{+}E_{22}, I{+}E_{12}, I{+}E_{21}, I)$$

Les 5 dernières matrices sont inversibles (elles sont triangulaires/diagonales avec aucun 0 sur la diagonale).
Le premier WHY est dû au fait que $I = E_{11} + E_{22}$.
Le deuxième WHY se justifie par double inclusion :

— Il est clair que E_{ij} est combinaison linéaire des matrices de droite : écrire $E_{ij} = (I + E_{ij}) - I$.

— Et les matrices $I + E_{ij}$ sont bien combinaison linéaire des matrices de gauche (facile).

Bilan : La famille $(I + E_{11},\ I + E_{22},\ I + E_{12},\ I + E_{21},\ I)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et formée de matrices inversibles.
Hélas, elle n'est pas libre. En effet, I est combinaison linéaire des $I + E_{ij}$, puisque

$$(I + E_{11}) \;+\; (I + E_{22}) \;=\; 3I$$

On peut donc reprendre les égalités précédentes et obtenir :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \;=\; \mathrm{Vect}(I + E_{11},\ I + E_{22},\ I + E_{12},\ I + E_{21})$$

Ainsi, la famille $(I + E_{11},\ I + E_{22},\ I + E_{12},\ I + E_{21})$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Je vous laisse montrer que cette famille $(I + E_{11},\ I + E_{22},\ I + E_{12},\ I + E_{21})$ est libre.

Le cas n quelconque

— Déterminons une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.
On a

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;=\; \mathrm{Vect}\Big((E_{ij})_{i,j}\Big) \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{Vect}\Big((E_{ij})_{i,j},\ I\Big) \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{Vect}\Big((I + E_{ij})_{i,j},\ I\Big)$$

Or la matrice I est combinaison linéaire des $I + E_{ij}$, car :

$$I \;=\; \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (I + E_{ii})$$

On peut donc supprimer I « du Vect » et obtenir :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;=\; \mathrm{Vect}\Big((I + E_{ij})_{i,j}\Big)$$

Les matrices $I + E_{ij}$ sont inversibles (elles sont triangulaires/diagonales avec aucun 0 sur la diagonale).
Bilan. La famille $(I + E_{ij})_{i,j}$ est formée de matrices inversibles, et est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Montrons que la famille $(I + E_{ij})_{i,j}$ est libre.
À vous !

1. Non. Raisonnons par l'absurde.
   Supposons que la fonction $f : x \mapsto \cos(2x)$ soit combinaison linéaire de cos et sin.
   On peut alors trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
   $$f = \lambda \cos + \mu \sin$$
   D'où
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$$
   En particulier pour $x = 0$ et $x = \pi$, on a les égalités $\begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = -\lambda \end{cases}$
   D'où une contradiction.
2. Posons $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des suites 2-périodiques, qui est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
   $$\mathcal{P}_2 \ = \ \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n \right\}$$
   Montrons l'égalité
   $$\mathrm{Vect}\Big((1)_{n\in\mathbb{N}},\ \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \Big) \ = \ \mathcal{P}_2$$
   $\boxed{\subset}$ Les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.
   Comme $\mathcal{P}_2$ est stable par combinaison linéaire, on a l'inclusion $\boxed{\subset}$.
   $\boxed{\supset}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_2$.
   On peut donc trouver deux scalaires $a, b \in \mathbb{K}$ tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est pair} \\ b & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
   On a alors
   $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \ &= \ a \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} + \ b \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \ a\frac{1 + (-1)^n}{2} \ + \ b\frac{1 - (-1)^n}{2} \\ &= \ \frac{a+b}{2} \times 1 \ + \ \frac{a-b}{2} \times (-1)^n \end{aligned}$$
   Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des deux suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\boxed{\supset}$ **Autre preuve.** Une suite 2-périodique est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on peut donc invoquer le cours (le polynôme caractéristique est $X^2 - 1$ dont les racines sont 1 et -1).

1. • On a les égalités de réels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

que l'on peut réécrire avec des égalités de fonctions :

$$\operatorname{ch} = \frac{\exp + \widehat{\exp}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} = \frac{\exp - \widehat{\exp}}{2}$$

D'où

$$\operatorname{ch} \in \operatorname{Vect}(\exp, \widehat{\exp}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} \in \operatorname{Vect}(\exp, \widehat{\exp})$$

Par stabilité par combinaison linéaire,

$$\operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) \subset \operatorname{Vect}(\exp, \widehat{\exp}).$$

• Réciproquement, on a les égalités de réels

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) \quad \text{et} \quad \exp(-x) = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$$

que l'on peut réécrire comme égalité de fonctions :

$$\exp = \operatorname{ch} + \operatorname{sh} \quad \text{et} \quad \widehat{\exp} = \operatorname{ch} - \operatorname{sh},$$

D'où

$$\exp \in \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) \quad \text{et} \quad \widehat{\exp} \in \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$$

Par stabilité par combinaison linéaire,

$$\operatorname{Vect}(\exp, \widehat{\exp}) \subset \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}).$$

2. Posons $f : x \mapsto \cos(2x)$.
On a l'égalité de réels

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

qui se réécrit via l'égalité de fonctions $f = \cos^2 - \sin^2$.
D'après le cours, on a donc $\operatorname{Vect}(f, \cos^2, \sin^2) = \operatorname{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.

Remontrons-le si vous n'étiez pas convaincu.

$\boxed{\subset}$ On a automatiquement $\cos^2, \sin^2 \in \operatorname{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.
Par ailleurs, on a $f = \cos^2 - \sin^2 \in \operatorname{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.
Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit $\operatorname{Vect}(f, \cos^2, \sin^2) \subset \operatorname{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.

$\boxed{\supset}$ Réciproquement, on a automatiquement $\cos^2, \sin^2 \in \operatorname{Vect}(f, \cos^2, \sin^2)$, donc, par stabilité par combinaison linéaire, $\operatorname{Vect}(\cos^2, \sin^2) \subset \operatorname{Vect}(f, \cos^2, \sin^2)$.

132

1. Soit α, β, γ tels que $\alpha \cos + \beta \sin + \gamma \exp = 0$.
   Dérivons deux fois cette égalité de fonctions.
   On obtient $-\alpha \cos - \beta \sin + \gamma \exp = 0$.
   Par somme, on a donc $2\gamma \exp = 0$.
   Comme la fonction exp n'est pas la fonction nulle (elle ne s'annule pas en 3 par exemple), on a $\gamma = 0$.
   Reportons cette information dans l'égalité initiale.
   On trouve $\alpha \cos + \beta \sin = 0$.
   En prenant deux valeurs bien choisies, par exemple $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

   Bilan : les fonctions $\cos, \sin, \exp$ sont linéairement indépendantes.

133

1. Montrons que la famille $\mathcal{F} = \big(f_0, f_1, f_2\big)$ est libre où $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

   (a) **Première solution (résolution d'un système en donnant des valeurs particulières à x)**

   Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\lambda_0 f_0 \ + \ \lambda_1 f_1 \ + \ \lambda_2 f_2 \ = \ 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

   Cette dernière égalité est une égalité de fonctions.
   Faisons-en des égalités de nombres réels. On obtient donc

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \times 1 \ + \ \lambda_1 \times \mathrm{e}^x \ + \ \lambda_2 \times \mathrm{e}^{2x} \ = \ 0_{\mathbb{R}}$$

   En particularisant à $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, on obtient :

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 \times 1 & + & \lambda_1 \times 1 & + & \lambda_2 \times 1 & = & 0 \\ \lambda_0 \times 1 & + & \lambda_1 \times \mathrm{e} & + & \lambda_2 \times \mathrm{e}^2 & = & 0 \\ \lambda_0 \times 1 & + & \lambda_1 \times \mathrm{e}^2 & + & \lambda_2 \times \mathrm{e}^4 & = & 0 \end{array}\right.$$

   que l'on écrit matriciellement :

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \\ 1 & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   L'objectif est de montrer que ce système admet $(0, 0, 0)$ pour unique solution. Ceci sera réalisé si on arrive à montrer que la matrice carrée du système est inversible.
   Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, ce qui ne change pas son caractère inversible.

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \\ 1 & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^4 \end{bmatrix}$$

   Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathrm{e} - 1 & \mathrm{e}^2 - 1 \\ 0 & \mathrm{e}^2 - 1 & \mathrm{e}^4 - 1 \end{bmatrix}$$

   Effectuons $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{\mathrm{e} - 1} L_2$ et $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}^2 - 1} L_3$. On obtient :

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{e} + 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{e}^2 + 1 \end{bmatrix}$$

   Effectuons $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient :

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{e} + 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} \end{bmatrix}$$

   La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec aucun 0 sur la diagonale donc elle est inversible.
   Donc $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.

   (b) **Deuxième solution (passage à la limite après avoir divisé par le terme dominant)**

   Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\lambda_0 f_0 \ + \ \lambda_1 f_1 \ + \ \lambda_2 f_2 \ = \ 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

Cette dernière égalité est une égalité de fonctions.
Faisons-en des égalités de nombres réels. On obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \times 1 \ + \ \lambda_1 \times \mathrm{e}^{x} \ + \ \lambda_2 \times \mathrm{e}^{2x} \ = \ 0_{\mathbb{R}}$$

En divisant par le terme dominant en $+\infty$, à savoir e^{2x}, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \times \mathrm{e}^{-2x} \ + \ \lambda_1 \times \mathrm{e}^{-x} \ + \ \lambda_2 \times 1 \ = \ 0_{\mathbb{R}}$$

En passant à la limite en $+\infty$, on obtient :

$$\lambda_0 \times 0 \ + \ \lambda_1 \times 0 \ + \ \lambda_2 \times 1 \ = \ 0_{\mathbb{R}}$$

D'où $\lambda_2 = 0$.
On injecte cette information dans l'égalité initiale, et on obtient :

$$\lambda_0 f_0 \ + \ \lambda_1 f_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

On constate que l'on est dans la même situation que la situation initiale, mais avec seulement deux fonctions.
On peut donc recommencer le même coup (égalité de réels puis division par e^{x}) et obtenir $\lambda_1 = 0$.
Puis, on obtient

$$\lambda_0 f_0 \ = \ 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

Comme f_0 n'est pas la fonction nulle (on a $f_0(2022) = 1$, c'est même la fonction constante égale à 1), on a $\lambda_0 = 0$.

2. Montrons que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{F} = \big(f_0, f_1, \ldots, f_n\big)$ est libre $\quad$ où $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

(a) par récurrence, en dérivant

Notons $\mathcal{H}_n$ la propriété : « la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre ».
▷ Initialisation.
La famille (f_0) est libre, car c'est une famille à un seul élément qui n'est pas le vecteur nul (ici qui n'est pas la fonction nulle).
▷ Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$ càd montrons que la famille $(f_0, \ldots, f_{n+1})$ est libre.
Pour cela, donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que

$$(\star) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Pour tout k, les fonctions f_k sont dérivables, et on a $f_k' = k f_k$.
Dérivons une fois $(\star)$, on obtient :

$$\lambda_0 f_0' + \lambda_1 f_1' + \cdots + \lambda_k f_k' + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1}' = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

d'où

$$(\diamondsuit) \qquad 0\lambda_0 f_0 + 1\lambda_1 f_1 + \cdots + k\lambda_k f_k + \cdots + (n+1)\lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Multiplions $(\star)$ par $(n+1)$ et ajoutons lui $-(\diamondsuit)$.
Les termes en $n+1$ disparaissent et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} (n+1-k)\lambda_k \cdot f_k \ = \ 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Cette égalité est une relation de liaison entre $(f_0, \ldots, f_n)$.
D'après $\mathcal{H}_n$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad (n+1-k)\lambda_k = 0$$

D'où (WHY ?)

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \lambda_k = 0$$

Reportons cette information dans $(\star)$.
On obtient $\lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.
Or f_{n+1} n'est pas la fonction nulle, donc $\lambda_{n+1} = 0$.

On a donc montré que tous les λ_i sont nuls.
Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Bilan. D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (f_0, \ldots, f_n) \text{ est libre}$$

(b) par récurrence, avec une limite

Notons $\mathcal{H}_n$ la propriété : « la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre ».

▷ Initialisation.

La famille (f_0) est libre, car c'est une famille à un seul élément qui n'est pas le vecteur nul (ici qui n'est pas la fonction nulle).

▷ Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.

Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$ càd montrons que la famille $(f_0, \ldots, f_{n+1})$ est libre.

Pour cela, donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que

$$(\star) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

On a donc une infinité d'égalités de nombres réels :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

On utilise maintenant la définition des f_k :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 1 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} + \lambda_{n+1} \mathrm{e}^{(n+1)x} = 0_{\mathbb{R}}$$

Divisons par $\mathrm{e}^{(n+1)x}$ qui n'est pas nul. On obtient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \mathrm{e}^{-(n+1)x} + \lambda_1 \mathrm{e}^{-nx} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{-x} + \lambda_{n+1} = 0_{\mathbb{R}}$$

Passons à la limite quand $x \to +\infty$. On obtient

$$\lambda_0 \times 0 \ + \ \lambda_1 \times 0 \ + \ \cdots \ + \ \lambda_n \times 0 \ + \ \lambda_{n+1} \ = \ 0_{\mathbb{R}}$$

d'où $\lambda_{n+1} = 0$.

En reportant cette information dans $(\star)$, on obtient

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Cette égalité est une relation de liaison entre $(f_0, \ldots, f_n)$.

On peut donc appliquer $\mathcal{H}_n$ et conclure que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Résumons. On a $\lambda_{n+1} = 0$ et $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

On a donc montré la nullité de tous les λ_i.

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Bilan. D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (f_0, \ldots, f_n) \text{ est libre}$$

(c) Sans récurrence, en partant par la droite

Sans récurrence en fixant $n \in \mathbb{N}$ une fois pour toutes.
Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

On a donc une infinité d'égalités de nombres réels :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

On utilise maintenant la définition des f_k :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0_{\mathbb{R}}$$

Divisons par e^{nx} qui n'est pas nul. On obtient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \mathrm{e}^{-nx} + + \cdots + \lambda_{n-1} \mathrm{e}^{-x} + \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$$

Passons à la limite quand $x \to +\infty$. On obtient

$$\lambda_0 \times 0 \;+\; \lambda_1 \times 0 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_{n-1} \times 0 \;+\; \lambda_n \;=\; 0_{\mathbb{R}}$$

D'où $\lambda_n = 0$.
On reporte cette information dans l'égalité initiale :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_{n-1} \mathrm{e}^{(n-1)x} = 0_{\mathbb{R}}$$

On recommence **un nombre fini de fois** ce processus, on obtient que tous les λ_i sont nuls. CQFD.
On a donc montré que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
Finalement, on a montré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (f_0, \dots, f_n) \text{ est libre}$$

(d) Par l'absurde, en partant par la droite

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé une fois pour toutes.
Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

On veut montrer que tous les λ_k sont nuls.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un λ_k non nul.
Prenons l'indice i le plus **grand** pour lequel λ_i est non nul.
On a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_i f_i(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

On utilise maintenant la définition des f_k :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 1 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_i \mathrm{e}^{ix} = 0_{\mathbb{R}}$$

Divisons par e^{ix} qui n'est pas nul. On obtient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \mathrm{e}^{-ix} + \lambda_1 \mathrm{e}^{-(i-1)x} + \cdots + \lambda_{i-1} \mathrm{e}^{-x} + \lambda_i = 0_{\mathbb{R}}$$

Passons à la limite quand $x \to +\infty$. On obtient

$$\lambda_0 \times 0 \;+\; \lambda_1 \times 0 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_{i-1} \times 0 \;+\; \lambda_i \;=\; 0_{\mathbb{R}}$$

On obtient $\lambda_i = 0$, ce qui est une contradiction (puisque l'on avait supposé $\lambda_i \neq 0$).

(e) Sans récurrence, en partant par la gauche

Sans récurrence en fixant $n \in \mathbb{N}$ une fois pour toutes.
Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

On a donc une infinité d'égalités de nombres réels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

On utilise maintenant la définition des f_k :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0_{\mathbb{R}}$$

Passons à la limite quand $x \to -\infty$. On obtient

$$\lambda_0 \ + \ \lambda_1 \times 0 \ + \ \cdots \ + \ \lambda_{n-1} \times 0 \ + \ \lambda_n \times 0 \ = \ 0_{\mathbb{R}}$$

d'où $\lambda_0 = 0$.
On reporte cette information dans l'égalité initiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0_{\mathbb{R}}$$

Et on divise par e^{x} qui est non nul. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{(n-1)x} = 0_{\mathbb{R}}$$

On est donc dans la même situation que la situation initiale. On recommence **un nombre fini de fois** ce processus, on obtient que tous les λ_i sont nuls. CQFD.
On a donc montré que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
Finalement, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f_0, \dots, f_n) \text{ est libre}$$

(f) Par l'absurde, en partant par la gauche

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé une fois pour toutes.
Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

On veut montrer que tous les λ_k sont nuls.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un λ_k non nul.
Prenons l'indice i le plus **petit** pour lequel λ_i est non nul.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i f_i(x) + \lambda_{i+1} f_{i+1}(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

On utilise maintenant la définition des f_k :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i \mathrm{e}^{ix} + \lambda_{i+1} \mathrm{e}^{(i+1)x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0_{\mathbb{R}}$$

Divisons par e^{ix} qui n'est pas nul. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i + \lambda_{i+1} \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{(n-i)x} = 0_{\mathbb{R}}$$

Passons à la limite quand $x \to -\infty$. On obtient

$$\lambda_i \ + \ \lambda_{i+1} \times 0 \ + \ \cdots \ + \ \lambda_n \times 0 \ = \ 0_{\mathbb{R}}$$

On obtient $\lambda_i = 0$, ce qui est une contradiction (puisque l'on avait supposé $\lambda_i \neq 0$).

(g) Avec un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé une fois pour toutes.
Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

On a donc une infinité d'égalités de nombres réels :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

On utilise maintenant la définition des f_k :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 1 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0_{\mathbb{R}}$$

Cette égalité peut s'écrire (c'est cela qui est remarquable) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 (\mathrm{e}^{x})^0 + \lambda_1 (\mathrm{e}^{x})^1 + \cdots + \lambda_n (\mathrm{e}^{x})^n = 0_{\mathbb{R}}$$

Introduisons le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n \in \mathbb{R}[X]$.
Il s'agit de montrer que ce polynôme est nul (WHY ?).
On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(\mathrm{e}^{x}) = 0$$

Comme l'image de la fonction l'exponentielle est $]0, +\infty[$, on obtient

$$\forall\, t \in\,]0, +\infty[, \quad P(t) = 0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines.
Donc P est le polynôme nul. Ainsi tous ses coeffs sont nuls, c'est-à-dire, tous les λ_i sont nuls.
On a donc montré que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
Finalement, on a montré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (f_0, \ldots, f_n) \text{ est libre}$$

3. Donnons-nous des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

On veut montrer que tous les λ_k sont nuls.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un λ_k non nul.
Prenons l'indice r le plus **grand** pour lequel λ_r est non nul.
On a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \underbrace{\lambda_r}_{\neq 0} f_r(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

On utilise maintenant la définition des f_k :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 x} + \cdots + \lambda_{n-1} \mathrm{e}^{\alpha_{n-1} x} + \underbrace{\lambda_r}_{\neq 0} \mathrm{e}^{\alpha_r x} = 0_{\mathbb{R}}$$

Divisons par $\mathrm{e}^{-\alpha_r x}$, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^{(\alpha_1 - \alpha_r)x} + \cdots + \lambda_{r-1} \mathrm{e}^{(\alpha_{r-1} - \alpha_r)x} + \lambda_r = 0_{\mathbb{R}}$$

Passons à la limite quand $x \to +\infty$. On obtient grâce à $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{r-1} < \alpha_r$:

$$\lambda_1 \times 0 \; + \; \cdots \; + \; \lambda_{r-1} \times 0 \; + \; \lambda_r \; = \; 0_{\mathbb{R}}$$

On obtient $\lambda_r = 0$, ce qui est une contradiction (puisque l'on avait supposé $\lambda_r \neq 0$).

134

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on se donne une relation de liaison entre les $n+1$ fonctions :

$$\lambda_0 \sin^0 \;+\; \lambda_1 \sin^1 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n \sin^n \;=\; 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$$

En évaluant cette égalité de fonctions en 0, on trouve $\lambda_0 = 0$.
On reporte cette information dans l'égalité initiale :

$$\lambda_1 \sin^1 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n \sin^n \;=\; 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$$

On évalue en x et on divise par x pour $x \neq 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda_1 \frac{\sin^1(x)}{x} \;+\; \lambda_2 \frac{\sin^2(x)}{x} \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n \frac{\sin^n(x)}{x} \;=\; 0$$

On passe à la limite en 0 en exploitant le fait que $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ et que

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad \frac{\sin^k(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \sin^{k-1}(x) \;\xrightarrow[x \to 0]{}\; 1 \times 0 = 0$$

Ainsi,

$$\lambda_1 \times 1 \;+\; \lambda_2 \times 0 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n \times 0 \;=\; 0$$

D'où $\lambda_1 = 0$.
On reporte cette information dans l'égalité précédente, et on a :

$$\lambda_2 \sin^2 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n \sin^n \;=\; 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$$

On évalue en x et on divise par x^2 pour $x \neq 0$, puis on passe à la limite quand $x \to 0$.
On obtient $\lambda_2 = 0$.
On recommence ce processus un nombre fini de fois et on obtient la nullité de tous les λ_i.

Si vous n'êtes pas satisfaits par cette preuve (vous avez tort), vous pouvez rédigez une récurrence montante finie sur $k \in [\![0, n]\!]$ (ici, n est fixé) :

$$\mathcal{H}_k : \qquad \forall\, i \in [\![0, k]\!],\; \lambda_i = 0$$

L'initialisation. Montrons que $\lambda_0 = 0$. À vous.
L'hérédité. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_k$.
Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$, c'est-à-dire (WHY ?) montrons que $\lambda_{k+1} = 0$. Je vous laisse rédiger cela.

135

Montrons que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Notons $\mathcal{H}_n$ la propriété : « la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre ».

▷ Initialisation.
La famille (f_1) est libre, car c'est une famille à un seul élément qui n'est pas le vecteur nul (ici qui n'est pas la fonction nulle : en effet, la fonction sinus n'est pas la fonction nulle).

▷ Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$ càd montrons que la famille $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ est libre.
Pour cela, donnons-nous des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que

$$(\star) \qquad \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Pour tout k, les fonctions f_k sont deux fois dérivables, et on a $f_k'' = -k^2 f_k$.
Dérivons deux fois $(\star)$, on obtient :

$$\lambda_1 f_1'' + \cdots + \lambda_k f_k'' + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1}'' = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

d'où

$$(\diamondsuit) \qquad \lambda_1(-1) f_1 + \cdots + \lambda_k(-k^2) f_k + \cdots + \lambda_{n+1}(-(n+1)^2) f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Multiplions $(\star)$ par $(n+1)^2$ et ajoutons lui $(\diamondsuit)$.
Les termes d'indice $n+1$ disparaissent et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} ((n+1)^2 - k^2)\lambda_k \cdot f_k \;=\; 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Cette égalité est une relation de liaison entre $(f_1, \ldots, f_n)$.
D'après $\mathcal{H}_n$, on en déduit que

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \qquad ((n+1)^2 - k^2)\lambda_k = 0$$

D'où (WHY ?)

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \qquad \lambda_k = 0$$

Reportons cette information dans $(\star)$. On obtient :

$$\lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Comme f_{n+1} n'est pas la fonction nulle, on obtient $\lambda_{n+1} = 0$.
Finalement, on a montré la nullité de tous les λ_k.
D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

Montrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(b^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(c^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est libre.

Première solution (résolution d'un système en donnant des valeurs particulières à n)

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \; + \; \beta\left(b^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \; + \; \gamma\left(c^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \; = \; 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

Cette dernière égalité est une égalité de suites.
Faisons-en des égalités de nombres réels. On obtient donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times a^n \; + \; \beta \times b^n \; + \; \gamma \times c^n \; = \; 0_{\mathbb{R}}$$

En particularisant à $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha a^0 & + & \beta b^0 & + & \gamma c^0 & = & 0 \\ \alpha a^1 & + & \beta b^1 & + & \gamma c^1 & = & 0 \\ \alpha a^2 & + & \beta b^2 & + & \gamma c^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

que l'on écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} a^0 & b^0 & c^0 \\ a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'objectif est de montrer que ce système admet $(0, 0, 0)$ pour unique solution. Ceci sera réalisé si on arrive à montrer que la matrice carrée du système est inversible.
Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, ce qui ne change pas son caractère inversible.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{bmatrix}$$

Comme $b^2 - a^2$ est multiple de $b - a$, en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - (b + a)L_2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2 - a^2 - (b+a)(c-a) \end{bmatrix}$$

Le coefficient en bas à droite vaut $(c - a)(c + a) - (b + a)(c - a) = (c - a)(c - b)$.
La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec sur la diagonale :

$$1 \qquad b - a \qquad (c - a)(c - b)$$

Aucun de ces coefficients n'est nul, car a, b, c sont distincts deux à deux.
Bilan, la matrice est inversible.
Donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Deuxième solution dans un cas particulier (passage à la limite après avoir divisé par le terme dominant)

Attention, cette solution ne fonctionne que dans le cas où a, b, c sont positifs...
Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha\big(a^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \;+\; \beta\big(b^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \;+\; \gamma\big(c^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

Cette dernière égalité est une égalité de suites.
Faisons-en des égalités de nombres réels. On obtient donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times a^n \;+\; \beta \times b^n \;+\; \gamma \times c^n \;=\; 0_{\mathbb{R}}$$

Quitte à permuter les suites (ou à les renommer), on peut supposer que $0 \leqslant a < b < c$, de sorte que

$$\left|\frac{a}{c}\right| < 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{b}{c}\right| < 1$$

(question au lecteur : pourquoi peut-on diviser par c ?)
En divisant par c^n, on obtient donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times \left(\frac{a}{c}\right)^n \;+\; \beta \times \left(\frac{a}{c}\right)^n \;+\; \gamma \;=\; 0_{\mathbb{R}}$$

Par passage à la limite, on obtient (WHY ?)

$$\alpha \times 0 \;+\; \beta \times 0 \;+\; \gamma \;=\; 0_{\mathbb{R}}$$

D'où $\gamma = 0$.
On injecte cette information dans l'égalité initiale, et on obtient :

$$\alpha\big(a^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \;+\; \beta\big(b^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

On constate que l'on est dans la même situation que la situation initiale, mais avec seulement deux suites (toujours avec a, b distincts !). On peut donc recommencer le même coup (division par b : pourquoi b est-il non nul), et obtenir $\beta = 0$.
En injectant dans l'égalité initiale, on obtient

$$\alpha\big(a^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

Or la suite $\big(a^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle (car son premier terme vaut $a^0 = 1$), donc $\alpha = 0$.

Bilan. On a montré que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

137

Donnons-nous des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

Fixons $i \in [\![1, n]\!]$ et montrons que $\lambda_i = 0$.
On a

$$\lambda_i g_i \ = \ \sum_{k \neq i} \lambda_k g_k$$

On sait que :

- La fonction g_i est non-dérivable en a_i.
- Les fonctions g_k pour $k \neq i$ sont dérivables en a_i. Par combinaison linéaire, il en est de même de $\displaystyle\sum_{k \neq i} \lambda_k g_k$.

Montrons que $\lambda_i = 0$. Raisonnons par l'absurde un court instant !
Si λ_i était non nul, alors la fonction g_i, non dérivable en a_i, serait égale à la fonction $\displaystyle -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k \neq i} \lambda_k g_k$, qui elle, est dérivable en a_i. D'où la contradiction.
Ainsi, $\lambda_i = 0$.

Somme. Montrons que $E = F' + G$.

L'inclusion $\supset$ est automatique.

Montrons l'autre inclusion. Soit $x \in E$.

Comme $E = F + G$, on peut trouver $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Comme $F = F \cap G + F'$, on peut trouver $(y_{FG}, y_{F'}) \in F \cap G \times F'$ tel que $x_F = y_{FG} + y_{F'}$.

En combinant les deux égalités, on a $x = (y_{FG} + y_{F'}) + x_G$, d'où $x = y'_F + (y_{FG} + x_G)$.

Comme $y_{F'} \in F'$ et $y_{FG} + x_G \in G$, on a $x \in F' + G$.

Somme directe. Montrons que $F' \cap G = \{0_E\}$.

Comme F' est un sous-espace vectoriel de F, on a $F' \subset F$, donc $F' = F' \cap F$.

Ainsi, $F' \cap G = (F' \cap F) \cap G = F' \cap (F \cap G)$. Comme F' et $F \cap G$ sont en somme directe, cette dernière intersection vaut $\{0_E\}$, d'où $F' \cap G = \{0_E\}$.

139

Le fait que la somme soit directe est facile. WHY ?
Justifions la somme.
Écrivons $w = w_H + \lambda_w v_0$. On a nécessairement $\lambda_w \neq 0$. WHY ?
Soit $x \in E$ que l'on essaie de décomposer sur $H \oplus \text{Vect}(w)$.
Par hypothèse, on sait que x se décompose sur $H \oplus \text{Vect}(v_0)$, disons $x = x_H + \lambda_x v_0$.
En remplaçant v_0 par $\dfrac{1}{\lambda_w}(w - w_H)$, on obtient (après agencement) $x = \left(x_H - \dfrac{\lambda_x}{\lambda_w} w_H\right) + \dfrac{\lambda_x}{\lambda_w} w$ qui est bien une écriture du type « un vecteur de H $+$ un vecteur de $\text{Vect}(w)$ »

Soit $V_1, \dots, V_n$ des sev stricts de E avec $n \geqslant 2$.
On sq $E = V_1 \cup \dots \cup V_n$.

① Mq $A = \{ i \in [\![1, n-1]\!] \mid V_i \not\subset V_{i+1} \cup \dots \cup V_n \}$ possède un minimum.

Comme A est une partie finie, il suffit de mq A est non vide
Raisonnons par l'absurde.
Sq $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $V_i \subset V_{i+1} \cup \dots \cup V_n$.

On a alors
$$\begin{cases} V_1 \subset V_2 \cup \dots \cup V_n \\ V_2 \subset V_3 \cup \dots \cup V_n \\ \vdots \\ V_{n-2} \subset V_{n-1} \cup V_n \\ V_{n-1} \subset V_n \end{cases}$$

En remontant ces inclusions, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad V_k \subset V_n$$

Ainsi $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} V_k \subset V_n$

D'où $E = V_n$, ce qui contredit le fait que V_n soit un sev strict de E.

Notons $i_0 = \min A$.

On a alors $\begin{cases} V_1 \subset V_2 \cup \dots \cup V_n \\ \vdots \\ V_{i_0-1} \subset V_{i_0} \cup \dots \cup V_n \end{cases}$

En remontant ces inclusions, on a

$$\forall k \in [\![1, i_0 - 1]\!], \quad V_k \subset V_{i_0} \cup \dots \cup V_n$$

D'où $\bigcup_{k=1}^{i_0-1} V_k \subset V_{i_0} \cup \dots \cup V_n$

Puis $\bigcup_{k=1}^{n} V_k \subset V_{i_0} \cup \dots \cup V_n$

D'où $E = V_{i_0} \cup \dots \cup V_n$

2a Si on avait $V_2 \cup \dots \cup V_n \subset V_1$,
on aurait $E = V_1$.
Ce qui contredit le fait que V_1 est un sev strict

2b Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Mq $i_\lambda \in [\![2, n]\!]$, $y + \lambda x_1 \in V_{i_\lambda}$

- On a $\begin{cases} y + \lambda x_1 \in E \\ \text{et} \\ E = V_1 \cup \dots \cup V_n \end{cases}$

Donc on peut trouver $i_\lambda \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$y + \lambda x_1 \in V_{i_\lambda}$$

- Mq $i_\lambda \in [\![2, n]\!]$.

Si on avait $y + \lambda x_1 \in V_1$, on aurait

$$y = \underbrace{(y + \lambda x_1)}_{\in V_1} + (\underbrace{-\lambda x_1}_{\in V_1}) \in V_1$$

ce qui contredit le fait que $y \notin V_1$

2c Mq φ est injective.

Soit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ tq $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda')$.

Pour alléger, notons k cet entier $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda')$ qui est dans $[\![2, n]\!]$

Ainsi $\begin{cases} y + \lambda x_1 \in V_k \\ y + \lambda' x_1 \in V_k \end{cases}$

Par différence, $(\lambda - \lambda') x_1 \in V_k$

Si $\lambda - \lambda' \neq 0$, on aurait $x_1 = \frac{1}{\lambda - \lambda'} \cdot (\lambda - \lambda') x_1 \in V_k$

Donc x_1 serait dans V_k avec $k \geqslant 2$.

A fortiori, $x_1 \in V_2 \cup \dots \cup V_n$. Contradiction

Ainsi $\lambda - \lambda' = 0$

D'où $\lambda = \lambda'$

2d On a une application injective de $\mathbb{K}$ dans $[\![2, n]\!]$

Donc $\mathbb{K}$ est fini (et $\operatorname{card} \mathbb{K} \leqslant n-1$)

Cela contredit le fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis !!

142

On commence par fixer G un supplémentaire de F.
Soit x un vecteur qui n'est ni dans F, ni dans G (par exemple, si $x_1 \neq 0 \in F$ et $x_2 \neq 0 \in G$, alors $x_1 + x_2$ n'est ni dans F - sinon x_2 serait dans F, ni dans G - sinon x_1 serait dans G).
Posons $F' = F \oplus \operatorname{vect}(x)$ et considérons G' un supplémentaire de F' dans E.
Alors, $G_1 = \operatorname{vect}(x) \oplus G'$ est un supplémentaire de F dans E.
En effet

— si $z \in E$, alors il s'écrit sous la forme $z = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in F'$ et $y_2 \in G'$.
De plus, y_1 s'écrit sous la forme $\lambda x + u$, avec $u \in F$.
Finalement, $z = u + (\lambda x + y_2)$, avec $u \in F$ et $\lambda x + y_2 \in G_1$.

— si $z \in F \cap G_1$, alors $z = \lambda x + u$ avec $u \in G'$ et donc $u = z - \lambda x \in G' \cap F'$.
Puisque F' et G' sont en somme directe, on a $u = 0$. On en déduit que $z - \lambda x = 0$ soit, puisque $x \notin F, z = 0$ et $\lambda = 0$.
Finalement, on a prouvé que $F \cap G_1 = \{0\}$.

Bien sûr, $G_1 \neq G$ puisque $x \in G_1 \backslash G$.

143

Soit $f \in F \cap G$ et prenons $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x+n) = f(x)$ puisque f est 1 -périodique. Mais d'autre part, $f(x+n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque f est élément de G. Ainsi, $f(x) = 0$ et puisque c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f = 0$. D'autre part, considérons la fonction $f(x) = x$. Alors si $f \in F + G$, f s'écrit $f = g + h$ avec g périodique de période 1 et h qui tend vers 0 en $+\infty$. Mais alors,

$$f(n) = g(n) + h(n) = g(0) + h(n) \to g(0) \in \mathbb{R}$$

alors que $f(n) \to +\infty$. On obtient une contradiction et donc $F + G \neq E$. F et G ne sont pas supplémentaires.

Traitons les exemples dans le désordre, afin d'expliquer une méthode systématique.

1. On résout le système. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad - y - 3z = 0 \end{cases} && [L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1] \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y + 3z = 0 \end{cases} && [L_2 \leftarrow -L_2] \\
&\iff \begin{cases} x \quad - 2z = 0 \\ \quad y + 3z = 0 \end{cases} && [L_1 \leftarrow L_1 - L_2]
\end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2x + y - z = 0 \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

2. On procède de même : après résolution, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x \quad - 2z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x \quad - 2z = 0 \\ \quad 3y \quad = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

On peut traiter de la même façon les questions (v) et (vi), même si la résolution du système peut ici se faire quasiment de tête, les équations étant plutôt simples. En tout état de cause, on obtient

1. $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
2. $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x + y + z = 0 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans l'autre sens, le plus simple est sans doute de trouver deux équations (non triviales et non trivialement équivalentes) vérifiées par le vecteur donné, puis de refaire le même genre de calculs que plus haut pour vérifier l'égalité.
Attention ! chaque question a une infinité de réponses possibles, et il n'est pas nécessairement évident de passer de l'une à l'autre. Si vos deux équations ne sont pas proportionnelles et que le vecteur donné en est solution, votre réponse est correcte. Voici donc des réponses parmi d'autres (on a choisi celles qui donnaient des systèmes linéaires échelonnés).

1. $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0 \right\}$.
2. $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x - z = 0 \right\}$.

3. $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+z = y+2z = 0\right\}$.

4. $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+\frac{2}{3}z = y+z = 0\right\}$.