

Applications linéaires

Algèbre linéaire, épisode 2

I Définitions, exemples	2
II Opérations sur les applications linéaires	3
Cas des endomorphismes	
Cas des isomorphismes	
Cas des automorphismes	
III Noyau et image d'une application linéaire.	6
IV Des caractérisations	7
V Étude du sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ formé des polynômes en f .	8
VI Applications linéaires et décompositions en somme directe . .	9
VII Endomorphismes remarquables	10
Projection	
Projecteur	
Symétrie	
Involution (ou symétrie)	
VIII Formes linéaires et hyperplans	16
IX Un premier lien entre application linéaire et matrice	17



I. Définitions, exemples

1 **Définition.** Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.
Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *linéaire* lorsque

$$\forall v, w \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$$

2 **Proposition (propriétés immédiates).**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors, on a :

- $f(0_E) = 0_F$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall v_1, \dots, v_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$
- La restriction de f à un sous-espace vectoriel de E est une application linéaire.

3 **Vocabulaire et autres notations très importantes.**

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire* sur E .
L'ensemble des formes linéaires sur E est noté $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
- Lorsque $F = E$, on dit que f est un *endomorphisme* de E .
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Lorsque $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire *bijective*, on dit que f est un *isomorphisme*.
- Lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme *bijectif*, on dit que f est un *automorphisme*.
L'ensemble des automorphismes est noté $\text{GL}(E)$.

4 **Exemples.**

5 **Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'application $f_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est linéaire.

$$X \mapsto AX$$

C'est l'application linéaire canoniquement associée à A .

6 **Proposition.**

- L'application $0_{\mathcal{L}(E,F)} : E \rightarrow F$ est linéaire : c'est l'application linéaire nulle.
$$v \mapsto 0_F$$
- L'application $0_{\mathcal{L}(E)} : E \rightarrow E$ est linéaire : c'est l'endomorphisme nul.
$$v \mapsto 0_E$$
- L'application $\text{id}_E : E \rightarrow E$ est linéaire : c'est l'endomorphisme identité.
$$v \mapsto v$$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $\lambda \text{id}_E : E \rightarrow E$ est linéaire : c'est l'homothétie de rapport λ .
$$v \mapsto \lambda v$$

II. Opérations sur les applications linéaires

Rappel. Soit F est un \mathbb{K} -espace vectoriel (donc muni de loi $+$ et \cdot), et Ω un ensemble quelconque. Alors l'ensemble F^Ω est un espace vectoriel pour les lois $+$ et \cdot suivantes :

$$\begin{aligned} f + g : \Omega &\longrightarrow F & \text{et} & & \alpha \cdot f : \Omega &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) & & & x &\longmapsto \alpha \cdot f(x) \end{aligned}$$

7 **Proposition (opérations $+$ et \cdot).** L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E .

- **Détails.** Cette proposition dit que l'application nulle est une application linéaire et que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Plus précisément

— Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$.

En français : *la somme de deux applications linéaires est linéaire.*

— Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}(E, F)$.

En français : *en multipliant par un scalaire une application linéaire, on obtient une application linéaire.*

8 **Proposition (opération de composition).**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

- **En français.** *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

9 **Proposition (propriétés de la loi \circ).**

— Associativité :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \quad \forall h \in \mathcal{L}(G, H), \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

— Distributivité à droite de \circ sur $+$:

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G), \quad (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

— Distributivité à gauche de \circ sur $+$:

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \quad g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

— Lois \cdot et \circ :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f = g \circ (\lambda \cdot f)$$

— Composition par l'identité :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad f \circ \text{id}_E = f \quad \text{et} \quad \text{id}_F \circ f = f$$

Cas des endomorphismes

10

Proposition (opérations sur $\mathcal{L}(E)$).

- $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel pour les lois $+$ (loi interne) et \cdot (loi externe).
- $\mathcal{L}(E)$ est muni d'une **autre** loi interne : l'opération de composition \circ . Cette loi possède id_E comme élément neutre, c'est-à-dire

.....

Ces trois lois $+$, \cdot et \circ vérifient :

$$(f + g) \circ h = \dots \qquad h \circ (f + g) = \dots \qquad f \circ (\lambda \cdot g) = \dots$$

• **Remarque.** La loi \circ est non commutative : en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Il n'y a pas de propriété d'intégrité : en présence de $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on ne peut rien dire.

En maths, on dit que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une \mathbb{K} -algèbre. Elle est non commutative, et non intègre.

• **Puissance d'un endomorphisme.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ est un endomorphisme de E , noté f^k . On prononce « f puissance k », ou « f composé k fois »

On a $f^0 = \text{id}_E$.

11

Proposition (identités remarquables).

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad (f + g)^m = \dots$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m - g^m = \dots$$

Cas des isomorphismes

- **Rappel (début de l'année).**

Proposition (bijectivité de la réciproque). Soit E et F deux ensembles quelconques. Soit $f \in F^E$.

Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et l'application réciproque de f^{-1} est f , c'est-à-dire $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition (Chaussettes et chaussures). Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

12

Définition.

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

On trouve la notation $\text{Iso}(E, F)$ pour l'ensemble des isomorphismes de E dans F .

13

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme.

Alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ (aussi appelée son inverse) est une application **linéaire**.

- **En maths.** Si $f \in \text{Iso}(E, F)$, alors $f^{-1} \in \text{Iso}(F, E)$ et $(f^{-1})^{-1} = f$.

- **Chaussettes et chaussures.** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Si f et g sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Cas des automorphismes

14

Définition.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

15

Proposition (propriétés de l'inverse). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

— **inverse**

Si $f \in \text{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \text{GL}(E)$ et $(f^{-1})^{-1} = f$.

L'inverse d'un automorphisme est un automorphisme.

— **composition** — chaussettes et chaussures —

Si f et $g \in \text{GL}(E)$, alors $g \circ f \in \text{GL}(E)$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

La composée de deux automorphismes est un automorphisme et l'inverse de la composée est la composée des inverses.

— **puissance**

Si $f \in \text{GL}(E)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \text{GL}(E)$ et $(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k$, que l'on note f^{-k} .

Une puissance d'un automorphisme est un automorphisme et l'inverse de la puissance est la puissance de l'inverse.

III. Noyau et image d'une application linéaire

16 Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F .
- Si F' est un sous-espace vectoriel de F , alors l'image réciproque $f^{(-1)}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

17 Définition/Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

L'image de f est le sous-espace vectoriel de F suivant :

$$\text{Im } f = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

18 Question. Montrer que $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
 $M \mapsto \text{tr}(M)$

Déterminer une base de son noyau.

19 Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker } f = \{0_E\}$$

Une application linéaire est injective ssi son noyau est réduit au vecteur nul.

20 Question. Montrer que l'application $D: \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est linéaire. Est-elle injective?
 $\varphi \mapsto \varphi'$

21 Question. Soit $b, c \in \mathbb{K}$. Soit $F_{b,c} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\}$.

Montrer que l'application $f: F_{b,c} \rightarrow \mathbb{K}^2$ est un isomorphisme.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$

22 Lemme très utile. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

— On a toujours :

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$$

— On a toujours :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$$

23 Question. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^2 = f \circ f$ (c'est un endomorphisme de E).

1. Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f \iff f^2 = 0$.
2. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.
3. Montrer que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
4. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$.

IV. Des caractérisations

Avertissement. Dans ce chapitre, il y a beaucoup de résultats qui nécessitent que l'espace de départ possède une famille génératrice **finie**. Bien sûr, tous les espaces vectoriels n'ont pas forcément une famille génératrice finie. Exemples ?

24 Proposition (famille génératrice de l'image).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice finie de E . Alors l'image de f est donnée par :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Morale de l'histoire : si l'on dispose d'une famille génératrice de l'espace de départ, on connaît une famille génératrice de l'image de f .

- **Exemple.** Soit $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$. Mq $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ et déterminer une base de $\text{Im } f$ et de $\text{Ker } f$.
 $(x, y) \mapsto (y, 0)$

25 Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

— Soit \mathcal{L} une famille libre de E .

Si f est injective, alors $f(\mathcal{L})$ est une famille libre de F .

— Soit \mathcal{G} une famille génératrice de E .

Alors

$$f \text{ est surjective} \iff f(\mathcal{G}) \text{ génératrice de } F$$

• À retenir.

L'image par f d'une famille libre (de E) est libre pourvu que f soit injective.

L'image par f d'une famille génératrice de E est génératrice de F pourvu que f soit surjective.

26 Proposition (caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité avec une base de E)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est muni d'une base finie $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.

— f est injective \iff la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .

— f est surjective \iff la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .

— f est bijective \iff la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

27 Proposition. On suppose que E est muni d'une base finie (e_1, \dots, e_n) .

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires. On a :

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = g(e_i) \right) \implies f = g$$

« Si deux applications linéaires coïncident sur une base, alors elles sont égales. »

28 Proposition. On suppose que E est muni d'une base finie (e_1, \dots, e_n) .

Pour toute famille (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de F , il existe une unique application linéaire $h \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, h(e_i) = v_i$.

« Une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base. »

- **Stratégie.** Pour construire une application linéaire $h : E \rightarrow F$, il suffit de se donner les $h(e_i)$.
- **Exemple.** L'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique endomorphisme f tel que ...
- **Exemple.** La forme linéaire trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique forme linéaire f telle que ...

V. Étude du sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ formé des polynômes en f

29 **Définition (Polynôme d'endomorphisme).** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

- Une expression du type $af^2 + bf + c\text{id}_E$, où $a, b, c \in \mathbb{K}$, est « un polynôme en f » de degré ≤ 2 .
- Un « polynôme en f » est une expression du type

$$a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \dots + a_2 f^2 + a_1 f + a_0 \text{id}_E \quad \text{où } m \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, \dots, a_m \in \mathbb{K}.$$

• **Notation.** En introduisant le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, l'expression ci-dessus est notée $P(f)$.

• **Résumons.**

Avec un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on peut créer un nouvel endomorphisme, à savoir l'endomorphisme $P(f)$.

• **Cas particuliers extrêmement importants.**

Pour $P = X^0$, on a $P(f) = \dots$ Pour $P = X^1$, on a $P(f) = \dots$ Pour $P = X^2$, on a $P(f) = \dots$

Pour $P = X^2 + \alpha X + \beta$, on a $P(f) = \dots$ Pour $P = (X - a)(X - b)$, on a $P(f) = \dots$

• **Petits calculs.**

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a $f^p \circ f^q = f^{p+q} = f^{q+p} = f^q \circ f^p$.

Soit $g = 3f + 2\text{id}_E$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

30 **Définition (Polynôme annulateur pour un endomorphisme).**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.
On dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = \text{id}_E$. Alors f admet un polynôme annulateur, par exemple
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Alors f admet un polynôme annulateur, par exemple
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(f - \lambda_1 \text{id}_E) \circ (f - \lambda_2 \text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors f admet un polynôme annulateur

31 **Très important.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— On a $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$

— Si $\lambda \neq 0$, alors $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Im } f$.

— On a :

$$(f - \lambda \text{id}_E) \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$$

32 **Question.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

sol → 20

Montrer que

$$E = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{id}_E)$$

VI. Applications linéaires et décompositions en somme directe

33

Proposition.

On suppose que E est équipé d'une décomposition en somme directe $E_1 \oplus E_2$.
Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires. On a :

$$\left(f|_{E_1} = g|_{E_1} \text{ et } f|_{E_2} = g|_{E_2} \right) \implies f = g$$

« Si deux applications linéaires coïncident sur des sous-espaces supplémentaires, alors elles sont égales. »

34

Proposition.

On suppose que E est équipé d'une décomposition en somme directe $E_1 \oplus E_2$.

Pour toute application linéaire $h_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et toute application linéaire $h_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application linéaire $h \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$h|_{E_1} = h_1 \quad \text{et} \quad h|_{E_2} = h_2$$

« Une application linéaire est entièrement déterminée par sa restriction à des sous-espaces supplémentaires. »

- **Exemple.** On rappelle que l'on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle également qu'une matrice M n'est PAS ou bien dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ou bien dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

En revanche, pour construire une application linéaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il **suffit** de la construire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Par exemple, l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique endomorphisme f tel que ...

VII. Endomorphismes remarquables

Projection

On rappelle que toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Autrement dit, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Précisément, pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'égalité

$$M = \frac{1}{2}(M + M^\top) + \frac{1}{2}(M - M^\top)$$

Le projeté de M sur l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\frac{1}{2}(M + M^\top)$.

Le projeté de M sur l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\frac{1}{2}(M - M^\top)$.

Associés à cette somme directe $E = F \oplus G$, il y a deux endomorphismes remarquables :

- la projection sur $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, notée $p_{F//G}$
- la projection sur $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, notée $p_{G//F}$

$$p_{F//G}: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto \frac{1}{2}(M + M^\top) \end{array} \quad \text{et} \quad p_{G//F}: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto \frac{1}{2}(M - M^\top) \end{array}$$

35

Définition/Proposition (projection sur F parallèlement à G).

Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

La projection sur F parallèlement à G est l'application

$$p_{F//G}: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \quad \text{où } x = x_F + x_G \end{array}$$

C'est une application linéaire, et même un endomorphisme de E .

- **Reformulation.** La projection sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme p de E défini par :

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad p(x) = 0$$

Cette dernière phrase a bien un sens, car on a vu que pour définir une application linéaire sur $E = F \oplus G$, il suffit de se donner les images des vecteurs de F et des vecteurs de G .

Pour autant, il n'est pas vrai qu'un vecteur de E est « ou bien dans F , ou bien dans G ».

- **Remarque.** Bien sûr, on peut intervertir les rôles joués par F et G .

On peut définir la projection sur G parallèlement à F . C'est l'application

$$p_{G//F}: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_G \quad \text{où } x = x_F + x_G \end{array}$$

36 Question.

- On sait que toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de trace nulle et d'une matrice scalaire.

Autrement dit, en notant $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ et $D = \text{Vect}(I_n)$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus D$.

Exhiber la projection sur D parallèlement à H .

- Dans \mathbb{R}^2 , considérons les droites vectorielles $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 1))$. On a (WHY?) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$. Exhiber la projection sur F parallèlement à G .

37 Proposition (propriétés d'une projection)

Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

— La projection $p_{F//G}$ sur F parallèlement à G vérifie :

(i) $p_{F//G}$ est un endomorphisme de E

(ii) $p_{F//G} \circ p_{F//G} = p_{F//G}$

(iii) $\text{Ker } p_{F//G} = G$

(iv) $\text{Im } p_{F//G} = F$

(v) $\text{Ker}(\text{id}_E - p_{F//G}) = \text{Im } p_{F//G}$

— Résultats analogues pour la projection $p_{G//F}$.

— On a les relations entre $p_{F//G}$ et $p_{G//F}$:

$$p_{F//G} + p_{G//F} = \text{id}_E \qquad p_{F//G} \circ p_{G//F} = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)} \qquad p_{G//F} \circ p_{F//G} = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$$

Projecteur

38

Définition (projecteur)

Un projecteur p de E est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

- **Remarque.** Cette égalité s'écrit encore

$$p^2 = p \quad \text{ou encore} \quad p^2 - p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{ou encore} \quad p - p^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Autrement dit, le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p .

L'égalité s'écrit aussi :

$$p \circ (\text{id}_E - p) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{ou encore} \quad (\text{id}_E - p) \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Autrement dit, le polynôme $X(1 - X)$, qui vaut $(1 - X)X$, est un polynôme annulateur de p .

39

Proposition (propriétés d'un projecteur)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

- On a $\text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Im } p$.
- Le projecteur p fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p \quad \text{que l'on peut encore écrire} \quad E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker } p$$

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur la somme directe $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p$, à savoir :

$$x = p(x) + (x - p(x))$$

qu'il faut penser comme

$$x = p(x) + \text{il n'y a plus le choix}$$

- **Question.** Dans la proposition précédente, le projecteur p fait naître une décomposition $E = F \oplus G$ avec $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker } p$.

Quelle est alors la projection sur F parallèlement à G , notée $p_{F//G}$?

Et la projection sur G parallèlement à F ?

- **Attention.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$. Alors cela n'implique pas que f est un projecteur!
- **Autre attention.** Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, il n'y a aucune raison que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ soient supplémentaires dans E .

Donner un exemple pour $E = \mathbb{K}^2$.

40

Question.

- Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $(x, y) \mapsto (x - y, 0)$. Montrer que f est un projecteur de \mathbb{R}^2 . A-t-on $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$?

- L'endomorphisme $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $M \mapsto M + M^T$ est-il un projecteur? A-t-on $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$?

41

Proposition (projecteurs associés). A ne pas apprendre, mais savoir faire les preuves.

— Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Alors $\text{id}_E - p$ est un projecteur. Il est appelé le projecteur associé à p .

— Soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs **associés**, c'est-à-dire $p + q = \text{id}_E$.

- On a $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

- Le noyau de l'un est l'image de l'autre :

$$\text{Ker } p = \text{Im } q \quad \text{et} \quad \text{Ker } q = \text{Im } p$$

- On a les décompositions

(une avec que des images, l'autre avec que des noyaux, une avec que des p , l'autre avec que des q)

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Im } q \quad E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } q \quad E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p \quad E = \text{Im } q \oplus \text{Ker } q$$

42

Proposition récapitulative.

— Une projection est un projecteur.

— Un projecteur est une projection.

43

Définition.

Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.
On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

La symétrie de E d'axe F parallèlement à G est l'application

$$\begin{aligned} s_{F//G}: E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_F - x_G \quad \text{où } x = x_F + x_G \end{aligned}$$

C'est une application linéaire, et même un endomorphisme de E .

- **Reformulation.** La symétrie d'axe F parallèlement à G , notée $s_{F//G}$, est l'unique endomorphisme s de E défini par :

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad s(x) = -x$$

Cette dernière phrase a bien un sens, car on a vu que pour définir une application linéaire sur $E = F \oplus G$, il **suffit** de se donner les images des vecteurs de F et des vecteurs de G .

Pour autant, il n'est **pas** vrai qu'un vecteur de E est « ou bien dans F , ou bien dans G ».

44

Question.

- On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Exhiber la symétrie d'axe $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- Dans \mathbb{R}^2 , considérons les droites vectorielles $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 1))$. On a (WHY?) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
Exhiber la symétrie d'axe F parallèlement à G .

45

Proposition.

Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

— La symétrie $s_{F//G}$ de E d'axe F parallèlement à G vérifie

(i) $s_{F//G}$ est un endomorphisme de E

(ii) $s_{F//G} \circ s_{F//G} = \text{id}_E$ donc $s_{F//G}$ est un automorphisme de E et $s_{F//G}^{-1} = s_{F//G}$

(iii) $F = \text{Ker}(s_{F//G} - \text{id}_E)$

(iv) $G = \text{Ker}(s_{F//G} + \text{id}_E)$

— Résultats analogues pour la symétrie $s_{G//F}$.

— On a les relations entre $s_{F//G}$ et $s_{G//F}$:

$$s_{F//G} + s_{G//F} = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad s_{F//G} \circ s_{G//F} = -\text{id}_E \quad s_{G//F} \circ s_{F//G} = -\text{id}_E$$

Involution (ou symétrie)

46

Définition.

Une involution (ou symétrie) s de E est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \text{id}_E$.

- **Remarque importante.** Cette égalité s'écrit encore

$$s^2 = \text{id}_E \quad \text{ou encore} \quad s^2 - \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{ou} \quad (s - \text{id}_E) \circ (s + \text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{ou} \quad (s + \text{id}_E) \circ (s - \text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Autrement dit, le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de l'involution s .

- **À lire.** Une involution s est un automorphisme et l'automorphisme réciproque est s lui-même!

47

Proposition.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une involution.

L'involution s fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$$

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur cette somme directe, à savoir :

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$

- **Question.**

Dans la proposition précédente, l'endomorphisme s fait naître une décomposition $E = F \oplus G$ avec $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Quelle est alors la symétrie d'axe F parallèlement à G , notée $s_{F//G}$?

Et la symétrie de E d'axe G parallèlement à F ?

- **Exemple.** Dans \mathbb{R}^2 , l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une involution.
 $(x, y) \mapsto (x - 2y, -y)$

- **Exemple.** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une involution est ...

VIII. Formes linéaires et hyperplans

- **Question fondamentale.** Que peut-on dire de l'image d'une forme linéaire? Et d'une forme linéaire non nulle? Même question avec son noyau.

48

Proposition.

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E .

Pour tout vecteur $v_0 \in E$ n'appartenant pas à $\text{Ker } \varphi$, on a

$$E = \text{Ker } \varphi \oplus \text{Vect}(v_0)$$

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur cette somme directe, à savoir :

$$x = \underset{\text{il n'y a plus le choix}}{\quad} + \frac{\varphi(x)}{\varphi(v_0)} v_0$$

- **Exemple.** Avec $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \dots$

49

Définition.

Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.

- **Reformulation.** Soit H un sev de E .
 H est un hyperplan lorsqu'il existe $v_0 \neq 0_E$ tel que $H = \text{Vect}(v_0)$.

50

Proposition.

- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.
- Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

IX. Un premier lien entre application linéaire et matrice

51 **Question.** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Considérons $f_A: \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (ici p vaut 5 et n vaut 3).
 $X \mapsto AX$

(c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A).

Décrire le noyau de f_A .

Déterminer une famille génératrice de $\text{Im } f_A$.

52 **Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— On définit le noyau de A comme étant le noyau de f_A .

Autrement dit

$$\text{Ker } A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \right\}$$

— On définit l'image de A comme étant l'image de f_A .

Autrement dit (WHY?)

$$\text{Im } A = \text{Vect}(\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_p(A))$$

53 **Proposition.**

— En effectuant des opérations élémentaires sur les d'une matrice, on ne change pas son noyau.

— En effectuant des opérations élémentaires sur les d'une matrice, on ne change pas son image.

Applications linéaires

Algèbre linéaire, épisode 2

preuve et éléments de correction

22

\Rightarrow Supposons que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$.

Montrons que $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Soit $y \in \text{Im } f$. Alors on peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On a

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x)) && \text{d\u00e9f de } y \\ &= g \circ f(x) && \text{d\u00e9f de } \circ \\ &= 0_{\mathcal{L}(E,G)}(x) && \text{hypoth\u00e8se} \\ &= 0_G && \text{d\u00e9f de l'app nulle} \end{aligned}$$

On a montr\u00e9 que $g(y) = 0_G$.

Donc $y \in \text{Ker } g$.

\Leftarrow Supposons que $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Montrons que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$.

Soit $x \in E$. Montrons que $g \circ f(x) = 0_G$.

On a $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Or $f(x) \in \text{Im } f$ et par hypoth\u00e8se $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Donc $f(x) \in \text{Ker } g$.

Donc $g(f(x)) = 0_G$.

D'o\u00f9 $g \circ f(x) = 0_G$.

On a montr\u00e9 que $\forall x \in E, g \circ f(x) = 0_G$.

Donc $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$.

• Montrons l'inclusion $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$

Soit $x \in \text{Ker } f$.

Montrons que $x \in \text{Ker}(g \circ f)$.

On a

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) && \text{d\u00e9f de } \circ \\ &= g(0_F) && \text{car } x \in \text{Ker } f \\ &= 0_G && \text{car } f \text{ est lin\u00e9aire} \end{aligned}$$

Donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$.

• Montrons l'inclusion $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$

Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$.

Montrons que $y \in \text{Im } g$.

Par d\u00e9finition de y , on peut trouver $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$.

Alors $y = g(f(x))$.

En posant $t = f(x)$, on a $t \in F$ et $y = g(t)$, donc $y \in \text{Im } g$.

32

On veut montrer qu'un vecteur x de E s'écrit de mani\u00e8re unique comme la somme d'un vecteur $y \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ et d'un vecteur $z \in \text{Ker}(f - 3\text{id}_E)$.

Proc\u00e9dons par analyse-synth\u00e8se (l'analyse prouve l'unicit\u00e9 et la synth\u00e8se prouve l'existence).

On fixe $x \in E$ une fois pour toutes.

Analyse. Soit $y, z \in E$ tels que
$$\begin{cases} \text{i)} & y \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \\ \text{ii)} & z \in \text{Ker}(f - 3\text{id}_E) \\ \text{iii)} & x = y + z \end{cases}$$

Prenons l'\u00e9galit\u00e9 iii) et appliquons f .

Par lin\u00e9arit\u00e9 de f , on obtient $f(x) = f(y) + f(z)$.

Or d'apr\u00e8s i), on a $f(y) = 2y$ et d'apr\u00e8s ii), on a $f(z) = 3z$.

Ainsi, on a
$$\begin{cases} x = y + z \\ f(x) = 2y + 3z \end{cases}$$

Avec ces deux informations, on va pouvoir tirer y et z en fonction de x et f .

En effectuant $3L_1 - L_2$, on obtient $y = 3x - f(x)$.

En effectuant $L_2 - 2L_1$, on obtient $z = f(x) - 2x$.

Synthèse. On pose $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$.

On vérifie que
$$\begin{cases} \text{i)} & y \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \\ \text{ii)} & z \in \text{Ker}(f - 3\text{id}_E) \\ \text{iii)} & x = y + z \end{cases}$$

Une façon agréable de vérifier i) et ii) est de constater que l'égalité $f^2 - 5f + 6\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ s'écrit encore $(f - 2\text{id}_E) \circ (f - 3\text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou encore $(f - 3\text{id}_E) \circ (f - 2\text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi, $(f - 2\text{id}_E)(y) = (f - 2\text{id}_E)(3x - f(x)) = \left(-(f - 2\text{id}_E) \circ (f - 3\text{id}_E) \right)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$.

On vient de montrer que $y \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

La vérification du point ii) est similaire.

Le point iii) est immédiat car $y + z = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x) = x$.

32

Pour alléger, posons $F_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda\text{id}_E)$ et $F_\mu = \text{Ker}(f - \mu\text{id}_E)$.

Fixons $x \in E$.

Analyse. Soit $x_\lambda, x_\mu \in E$ tels que
$$\begin{cases} \text{i)} & x_\lambda \in F_\lambda \\ \text{ii)} & x_\mu \in F_\mu \\ \text{iii)} & x = x_\lambda + x_\mu \end{cases}$$

Appliquons f à iii), on obtient :

$$f(x) = f(x_\lambda) + f(x_\mu)$$

En utilisant i) et ii), cette dernière égalité s'écrit $f(x) = \lambda x_\lambda + \mu x_\mu$.

Résumons. On est en présence de deux égalités :

$$\begin{cases} x = x_\lambda + x_\mu \\ f(x) = \lambda x_\lambda + \mu x_\mu \end{cases}$$

On cherche x_λ en fonction de x (et de f bien sûr!). Chassons x_μ en réalisant l'opération $\mu L_1 - L_2$:

$$\mu x - f(x) = (\mu - \lambda)x_\lambda$$

D'où

$$x_\lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}(\mu x - f(x)) = \frac{1}{\lambda - \mu}(f(x) - \mu x) = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu\text{id}_E)(x)$$

Pour trouver x_μ en fonction de x , chassons x_λ et réalisons $\lambda L_1 - L_2$:

$$\lambda x - f(x) = (\lambda - \mu)x_\mu$$

D'où

$$x_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu}(\lambda x - f(x)) = \frac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda\text{id}_E)(x)$$

Synthèse. Posons $x_\lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}(\mu x - f(x))$ et $x_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu}(\lambda x - f(x))$.

Vérifions que $\begin{cases} \text{i)} & x_\lambda \in F_\lambda \\ \text{ii)} & x_\mu \in F_\mu \\ \text{iii)} & x = x_\lambda + x_\mu \end{cases}$

Remarque : on n'a pas encore utilisé le fait que $(X - \lambda)(X - \mu)$ est un polynôme annulateur de f . Dans la première preuve **maladroite**, on va utiliser que ce polynôme vaut $X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu$. Donc $f^2 = (\lambda + \mu)f - \lambda\mu \text{id}_E$. En particulier $f^2(x) = (\lambda + \mu)f(x) - \lambda\mu x$. Dans la deuxième preuve **plus jolie**, on va utiliser que $(f - \lambda \text{id}_E) \circ (f - \mu \text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

► i) Montrons que $x_\lambda \in F_\lambda$.

Première preuve maladroite. Montrons que $f(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$.

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) &= f\left(\frac{1}{\mu - \lambda}(\mu x - f(x))\right) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda}(\mu f(x) - f^2(x)) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda}(\mu f(x) - (\lambda + \mu)f(x) + \lambda\mu x) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda}(-\lambda f(x) + \lambda\mu x) \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda}(\mu x - f(x)) \\ &= \lambda x_\lambda \end{aligned}$$

Deuxième preuve beaucoup plus jolie. Montrons que $(f - \lambda \text{id}_E)(x_\lambda) = 0_E$.

Commençons par remarquer que x_λ s'écrit à l'aide de l'endomorphisme $f - \mu \text{id}_E$:

$$x_\lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}(\mu x - f(x)) = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \text{id}_E)(x)$$

Appliquons l'endomorphisme $f - \lambda \text{id}_E$ à x_λ ; on obtient :

$$(f - \lambda \text{id}_E)(x_\lambda) = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \lambda \text{id}_E) \circ (f - \mu \text{id}_E)(x) = \frac{1}{\lambda - \mu} 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$$

► ii) Même principe que i).

► iii) On a

$$\begin{aligned} x_\lambda + x_\mu &= \frac{1}{\mu - \lambda}(\mu x - f(x)) + \underbrace{\frac{1}{\lambda - \mu}(\lambda x - f(x))}_{= \frac{1}{\mu - \lambda}(f(x) - \lambda x)} = \frac{1}{\mu - \lambda}(\mu x - \lambda x) = x \end{aligned}$$

Pour la culture. Plus généralement, on peut montrer l'énoncé suivant, appelé **Lemme des noyaux** :

Soit $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$. Soit $P = (X - \lambda)(X - \mu) \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose que P est un polynôme annulateur de f c'est-à-dire $(f - \lambda \text{id}_E) \circ (f - \mu \text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors

$$E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E)$$