Applications linéaires

Algèbre linéaire, épisode 2

exercices

101 Linéaire ou pas ?

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2+x, 2x, y) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-3z, 2x+y) \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2, x^2-y^2) \end{array}$
6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, x, x+y) \end{array}$
7. $\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^\Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$
8. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & |f(0)| \end{array}$
9. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 (f(t))^2 \mathrm{d}t \end{array}$
10. $\varphi : \begin{array}{ccc} \{\text{suites convergentes}\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim u_n \end{array}$

102 Fonction linéaire de la classe de 3ème

Déterminer l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

103 Endomorphisme de $\mathbb{K}^2$

Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ est de la forme $(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

104 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.
Montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que $f : z \mapsto az + b\overline{z}$.
À quelle condition est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?

105 Une reformulation des définitions de cours

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que l'application $\Phi_\mathcal{V} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \end{array}$ est linéaire.
2. À quelle condition sur la famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$, l'application $\Phi_\mathcal{V} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$ est-elle injective (resp. surjective, resp. bijective) ?

106 Application canoniquement associée à deux sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et F, $G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels.

1. Montrer que l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (v_F, v_G) & \longmapsto & v_F + v_G \end{array}$ est linéaire.
2. À quelle condition sur F et G l'application $\Phi \in \mathcal{L}(F \times G,\ E)$ est-elle injective (resp. surjective, resp. bijective) ?

107 Matrices et trace

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour une matrice $U \in E$, on introduit l'application :

$$T_U : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(UM) \end{array}$$

1. Soit $U \in E$. Montrer que T_U est une forme linéaire, c'est-à-dire que $T_U \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \\ U & \longmapsto & T_U \end{array}$$
est linéaire, puis qu'elle est injective.

108 Opérateur aux différences finies

Soit

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}.$$

Montrer que Δ est une application linéaire.
Décrire le noyau de Δ.
On considère $\widetilde{\Delta}$ la restriction de Δ à $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 0\right\}$.
Montrer que $\widetilde{\Delta}$ est un isomorphisme.

109 Suite récurrente linéaire d'ordre 3

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles.
On pose

$$F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\right\}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

On considère les suites v, w, t définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_n = 2^n, \quad t_n = 3^n$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Montrer que les suites v, w et t sont dans F.
2. Montrer que φ est linéaire, injective et surjective.
3. Déterminer l'image par φ des suites v, w et t.
   Montrer que la famille $\big(\varphi(v), \varphi(w), \varphi(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire une base de F.

Image et noyau

110 Base à l'œil nu

Pour chacune des applications linéaires, donner à la volée une base du noyau et de l'image.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, -2x-4y) \end{array}$
2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, 2x-z, x-y+z) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y, x+2z) \end{array}$
4. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, x+2y) \end{array}$

111 Inclusion etc... avec des applications linéaires

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrer $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f) \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_F\}$.
3. Montrer $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
4. Montrer $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

112 Sous-espaces stables (lemme très utile pour la Spé)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que f et g commutent, c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que le noyau et l'image de f sont stables par g.
On dit qu'un sous-espace vectoriel E' de E est stable par g lorsque $g(E') \subset E'$.

113 Inclusion des images

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer l'équivalence

$$f(E_1) \subset f(E_2) \iff E_1 + \operatorname{Ker} f \subset E_2 + \operatorname{Ker} f$$

114 Image réciproque, image directe

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Exprimer $f^{(-1)}(f(F))$ en fonction de F et $\operatorname{Ker} f$.
2. Exprimer $f(f^{(-1)}(F))$ en fonction de F et $\operatorname{Im} f$.
3. À quelle condition a-t-on $f^{(-1)}\big(f(F)\big) = f\big(f^{(-1)}(F)\big)$?

115 Premier lemme de factorisation

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E (on suppose qu'il en existe ou bien on *admet* qu'il en existe). On définit :

$$\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Montrer que $\widetilde{f}$ est bien définie, et que c'est un isomorphisme.

116 Deux supplémentaires sont isomorphes

Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G_1 et G_2 deux supplémentaires de F. Montrer que G_1 et G_2 sont isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme entre G_1 et G_2. (On pourra utiliser l'exercice précédent).

117 Un petit lemme des noyaux

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f^2 - 4f + 3\,\mathrm{id}_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.

118 Trois endomorphismes

Soient f, g et h des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f, g et h ont même noyau et même image.
2. Montrer que $f^5 = f$.
3. En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

119 Inverse unilatéral et projecteur

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de $\mathcal{L}(E)$ d'image $\operatorname{Im} v$ et de noyau $\operatorname{Ker} u$. Qu'en déduit-on ?

120 Inverses unilatéraux (bis)

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que l'on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$.
2. Calculer $(g \circ f)^2$. Qu'en déduit-on sur l'endomorphisme $p = g \circ f$?
3. Déduire de ce qui précède que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.
4. Montrer l'équivalence
$$f \text{ injective} \iff g \text{ surjective} \iff f, g \in \mathrm{GL}(E),$$
et que, si ces trois assertions sont vraies, alors f et g sont inverses l'un de l'autre.

121 Deux endomorphismes et deux projecteurs !

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans E.
2. En déduire que l'on a $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

122 Polynôme annulateur et supplémentaires

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (ici il est important que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 + f = 0$.
On pose $F = \operatorname{Ker} f$ et $G = \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.

1. Montrer que $E = F \oplus G$.
2. Que devient l'égalité précédente si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$?

On suppose désormais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3. Montrer qu'il existe $x_0 \in G$ **non nul**.
4. Soit $x_0 \in G$ non nul. Quelle relation vérifie x_0 ?
   Montrer que $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est une famille libre.

Homothéties, projecteurs et symétries

123 **Homothétie**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie.

124 **Projection de $\mathbb{R}^3$**

Soient $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0 \text{ et } 3x + 2y + 2z = 0\Big\}$ et $G = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\Big\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression de la projection sur G parallèlement à F.

125 **Symétrie de $\mathbb{R}^3$**

Soient $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\Big\}$ et $G = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\Big\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

126 **Automorphisme de $\mathbb{R}^3$**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y,\ 4x - y,\ -2x + 2y + 3z) \end{array}$.

1. Calculer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par f^2.
2. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer son inverse (automorphisme réciproque).
3. Que peut-on dire de $\dfrac{1}{3}f$?

127 **Paire-impaire**

Montrer que les ensembles $\mathcal{P}$ des fonctions paires et $\mathcal{I}$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et expliciter la projection sur $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) parallèlement à $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{P}$).

128 **Du cours**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
On note p_1 (resp. s_1) le projecteur sur (resp. la symétrie par rapport à) F_1 parallèlement à F_2 et p_2 (resp. s_2) le projecteur sur (resp. la symétrie par rapport à) F_2 parallèlement à F_1.
Montrer que l'on a :

(i) $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_E$,

(ii) $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$,

(iii) $s_1 + s_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$,

(iv) $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 = -\mathrm{id}_E$.

129 **Deux projecteurs de même noyau**

1. Soit p et q deux endomorphismes d'un même espace vectoriel E tels que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Montrer que p et q sont deux projecteurs de même noyau.
2. Réciproquement, soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs de même noyau.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q$ sont isomorphes.
   (b) Montrer que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Autres

130 Crochet de Lie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$.

131 Endomorphisme nilpotent

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que f est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que si f est nilpotent alors $\mathrm{id}_E - f$ est un automorphisme et exprimer son application réciproque.

132 Endomorphisme nilpotent et famille cyclique

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et tel que $f^2 \neq 0$.

1. Donner un exemple d'un tel f avec $E = \left\{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists\, a, b, c \in \mathbb{R},\ \varphi : x \mapsto ax^2 + bx + c\right\}$.

On revient au cas général.

2. Montrer qu'il existe $v \in E$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} f^2$.
3. Pour ce v, montrer que la famille $\big(v, f(v), f^2(v)\big)$ est libre.

133 Le lemme des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe deux scalaires α et β distincts tels que $(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \beta\,\mathrm{id}_E) = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que $(f - \beta\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \alpha\,\mathrm{id}_E) = 0$. En déduire que $\operatorname{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
4. On note p la projection sur $\operatorname{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$ et q la projection sur $\operatorname{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$.
   Montrer que $f = \alpha p + \beta q$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \alpha^n p + \beta^n q$.
5. On suppose $\alpha\beta \neq 0$. Montrer que f est bijectif. Déterminer f^{-1} en fonction de α, β, p, q. Puis calculer f^m pour $m \in \mathbb{Z}$.

134 Formes linéaires et hyperplans

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ deux formes linéaires non nulles.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

135 Sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$

Soit E et F des espaces vectoriels tels que $E = G \oplus H$.
Soit $A = \left\{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \operatorname{Ker} u\right\}$.
Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(H, F)$.

136 Sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On définit $\mathcal{C}_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. On suppose (ou on admet...) que $\operatorname{Im} f$ possède un supplémentaire G.
   Montrer que $\mathcal{C}_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(G, \operatorname{Ker} f)$.

137 Crochet de Lie de deux symétries

Soit u et v deux symétries d'un espace vectoriel réel E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u \circ v - v \circ u) = \operatorname{Ker}(u + v) \oplus \operatorname{Ker}(u - v)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(u \circ v - v \circ u) = \operatorname{Im}(u + v) \cap \operatorname{Im}(u - v)$.

138 À propos du crochet de Lie — DM

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on pose $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.
On dit qu'un endomorphisme f de E est *nilpotent* s'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0$.

1. (a) Montrer que
$$\forall (f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3, \quad [[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$$
   (b) Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $[f, g] = [g, f]$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite démontrer dans cette question l'équivalence des propositions :
   (i) Il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = [p, f]$.
   (ii) $f^2 = 0$.
   (2a) On suppose (i).
   Montrer successivement que $p \circ f \circ p = 0$, puis $f \circ p = 0$ et conclure.
   (2b) On suppose (ii).
   En considérant un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ et une projection bien choisie, conclure.
3. Soit g fixé dans $\mathcal{L}(E)$.
   (3a) Démontrer que l'application $\varphi_g : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & [f, g] \end{array}$ est linéaire.
   (3b) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall f \in \mathcal{L}(E), \quad (\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ f \circ g^{n-k}$$
   (3c) En déduire que si g est nilpotent alors φ_g est nilpotent.
4. **Question pas faisable pour l'instant.**
   On suppose E de dimension finie $\geqslant 1$.
   Résoudre l'équation $[f, g] = \mathrm{id}_E$, d'inconnues f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$.

D'autres exos

139 Une équivalence

Soit p un projecteur et f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence
$$p \circ f = f \circ p \iff \operatorname{Ker} p \text{ et } \operatorname{Im} p \text{ sont stables par } f$$

140 Projecteur et valeur propre

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.
Montrer que $p - \lambda\, \mathrm{id}_E \in \mathrm{GL}(E)$.

141 Interversion des quantificateurs

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires.
On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g(x) = \lambda f(x)$.
Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g = \mu f$.

Applications linéaires

Algèbre linéaire, épisode 2

corrigés

103

Il s'agit d'une « $\exists$-assertion », puisqu'il s'agit de déterminer a, b, c, d tels que ...
Idée. Une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base.

Posons $(a, c) = f\big((1,0)\big)$ et $(b, d) = f\big((0,1)\big)$.
Montrons que $\quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{K}^2,\ f(x,y) = (ax + by,\, cx + dy)$.
Fixons $(x, y) \in \mathbb{K}^2$.
On a

$$(x,y) \;=\; x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)$$

On applique f qui est linéaire.

$$f(x,y) \;=\; x \cdot f\big((1,0)\big) + y \cdot f\big((0,1)\big)$$

D'où

$$f(x,y) \;=\; x \cdot (a,c) + y \cdot (b,d) \;=\; (ax + by,\, cx + dy)$$

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire

1. Mq $\exists a, b \in \mathbb{C}$, $f : z \longmapsto az + b\bar{z}$

Brouillon / Analyse cachée.

On se donne $a, b \in \mathbb{C}$ tq $f : z \longmapsto az + b\bar{z}$.

Alors pour $z = 1$ et $z = i$, on a :

$$\begin{cases} f(1) = a \times 1 + b \times \bar{1} \\ f(i) = a \times i + b \times \bar{i} \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} f(1) = a + b. \\ f(i) = ia - ib \end{cases}$

En multipliant la 1ère ligne par i et en ajoutant - soustrayant, on a :

$$\begin{cases} i f(1) + f(i) = 2i\, a \\ i f(1) - f(i) = 2i\, b \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} a = \dfrac{i f(1) + f(i)}{2i} \\ b = \dfrac{i f(1) - f(i)}{2i} \end{cases}$ càd $\begin{cases} a = \dfrac{f(1) - i f(i)}{2} \\ b = \dfrac{f(1) + i f(i)}{2} \end{cases}$

Copie Posons $\begin{cases} a = \dfrac{f(1) - if(i)}{2} \\ b = \dfrac{f(1) + if(i)}{2} \end{cases}$

Mq f vaut l'application $\varphi : z \longmapsto az + b\bar{z}$

Rmq Il s'agit de mq $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \varphi(z)$
On va profiter du fait que f et φ sont linéaires et on va se contenter de mq $\begin{cases} f(1) = \varphi(1) \\ f(i) = \varphi(i) \end{cases}$
Cela suffit en vertu d'un résultat de cours
Lequel ?

Mq $\begin{cases} \text{(i) } f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire} \\ \text{(ii) } \varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire} \\ \text{(iii) } f \text{ et } \varphi \text{ coïncide sur } (1, i) \text{ qui est une base du } \mathbb{R}\text{-ev } \mathbb{C}. \end{cases}$

D'après un résultat de cours, on aura $f = \varphi$.

(i) OK d'après l'énoncé

(ii) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ deux vecteurs
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux scalaires

On a :

$$\varphi(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = a(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + b(\overline{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2})$$

$$= a\lambda_1 z_1 + a\lambda_2 z_2 + b(\lambda_1 \overline{z_1} + \lambda_2 \overline{z_2})$$

car $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$= \lambda_1 (a z_1 + b\overline{z_1}) + \lambda_2 (a z_2 + b\overline{z_2})$$

$$= \lambda_1 \varphi(z_1) + \lambda_2 \varphi(z_2)$$

(iii) On a $\varphi(1) = a \times 1 + b \times \overline{1}$

$= a + b$

$= f(1)$ calcul avec la déf de a et b

et $\varphi(i) = a \times i + b \times \overline{i}$

$= ia - ib$

$= f(i)$ calcul avec la déf de a et b.

② À quelle condition (néc. et suff.) f est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?

On raisonne par Analyse/Synthèse

ou par Condition néc/condition suffisante
$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

$(\Rightarrow)$ Supposons f $\mathbb{C}$-linéaire

Alors $f(i) = i f(1)$

Ainsi $ai + b\overline{i} = i(a \times 1 + b \times \overline{1})$

D'où $ai - bi = i(a + b)$

D'où $\quad -bi = ib$

D'où $\quad b = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $b = 0$

Alors $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$\qquad z \longmapsto az$.

Mq f est $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ deux vecteurs
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ deux scalaires.

On a

$$f(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = a(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$
$$= \lambda_1 a z_1 + \lambda_2 a z_2$$
$$= \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2)$$

<u>BILAN</u> f est $\mathbb{C}$-linéaire $\Longleftrightarrow b = 0$

1. Soit $M, N \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
   On a
   $$T_U(\lambda M+\mu N) \;=\; \operatorname{tr}\Big(U(\lambda M+\mu N)\Big) \;=\; \operatorname{tr}(\lambda UM+\mu UN) \;=\; \lambda\operatorname{tr}(UM)+\mu\operatorname{tr}(UN) \;=\; \lambda T_U(M)+\mu T_U(N)$$
   Donc T_U est une forme linéaire.
2. Montrons que l'application suivante est linéaire et injective.
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) \\ U & \longmapsto & T_U \end{array}$$
   ⋆ Montrons que φ est linéaire.
   Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $U, V \in E$.
   Montrons que $\varphi(\lambda U + \mu V) = \lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V)$.
   Pour montrer cette égalité de formes linéaires, il suffit de montrer l'égalité
   $$\forall\, M \in E, \quad \Big(\varphi(\lambda U + \mu V)\Big)(M) \;=\; \Big(\lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V)\Big)(M)$$
   Fixons $M \in E$. On a
   $$\begin{aligned} \Big(\varphi(\lambda U + \mu V)\Big)(M) &= T_{\lambda U + \mu V}(M) \\ &= \operatorname{tr}\big((\lambda U + \mu V)M\big) \\ &= \lambda\operatorname{tr}(UM) + \mu\operatorname{tr}(VM) \\ &= \lambda\varphi(U)(M) + \mu\varphi(V)(M) \\ &= \Big(\lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V)\Big)(M) \end{aligned}$$
   ⋆ Montrons que φ est injective en montrant que son noyau est réduit à la matrice nulle.
   Soit $U \in \operatorname{Ker}\varphi$.
   Ainsi $\varphi(U) = T_U$ est la forme linéaire nulle. Donc
   $$\forall\, M \in E,\ T_U(M) = 0 \qquad \text{c'est-à-dire } \operatorname{tr}(UM) = 0$$
   On particularise aux matrices élémentaires $E_{i,j}$. Ainsi, pour tous i, j, on a $\operatorname{tr}(UE_{i,j}) = 0$.
   Calculons cette trace. En écrivant $U = \displaystyle\sum_{k,\ell} u_{k,\ell}E_{k,\ell}$, le produit $UE_{i,j}$ vaut $\displaystyle\sum_{k} u_{k,i}E_{k,j}$.
   Donc $\operatorname{tr}(UE_{i,j})$ vaut $u_{j,i}$.
   On a donc
   $$\forall\, i, j, \quad u_{j,i} = 0$$
   Donc la matrice U est nulle
   On a donc montré que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.

1. — La suite nulle est clairement dans F.
   — Montrons que F est stable par combinaison linéaire. Soit $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $u, u' \in F$.
   Montrons que $\alpha u + \alpha' u' \in F$.
   Il s'agit donc de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\alpha u+\alpha' u')(n+3) \;=\; 4(\alpha u+\alpha' u')(n+2)-(\alpha u+\alpha' u')(n+1)-6(\alpha u+\alpha' u')(n)$$

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcll} (\alpha u + \alpha' u')(n+3) & = & \alpha u_{n+3} \; + \alpha' u'_{n+3} & \text{par déf des lois } + \text{ et } \cdot \\ & = & \alpha\Big(4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\Big) \; + \; \alpha'\Big(4u'_{n+2} - u'_{n+1} - 6u'_n\Big) & \text{car } u \text{ et } u' \text{ sont dans } F \\ & = & 4(\alpha u_{n+2} + \alpha' u'_{n+2}) - (\alpha u_{n+1} + \alpha' u'_{n+1}) - 6(\alpha u_n + \alpha' u'_n) & \text{calculs} \\ & = & 4(\alpha u + \alpha' u')(n+2) - (\alpha u + \alpha' u')(n+1) - 6(\alpha u + \alpha' u')(n) & \text{par déf des lois } + \text{ et } \cdot \end{array}$$

• Montrons que v est dans F, c'est-à-dire montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} \;=\; 4v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^{n+3} \;=\; 4(-1)^{n+2} - (-1)^{n+1} - 6(-1)^n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n \times (-1)^3 \;=\; (-1)^n \times \Big(4(-1)^2 - (-1)^1 - 6(-1)^0\Big)$$

ce qui, après simplification par $(-1)^n$, est évident.

• Montrons que w est dans F, c'est-à-dire montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+3} \;=\; 4w_{n+2} - w_{n+1} - 6w_n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^{n+3} \;=\; 4 \times 2^{n+2} - 2^{n+1} - 6 \times 2^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \times 2^3 \;=\; 2^n \times \Big(4 \times 2^2 - 2^1 - 6 \times 2^0\Big)$$

ce qui, après simplification par 2^n, est évident.

• Je laisse le soin au lecteur de montrer que la suite t est dans F.

2. • Je vous laisse montrer que φ est linéaire.

• Injectivité.
Montrons que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$.
Soit $u \in \operatorname{Ker} \varphi$ donc $\begin{cases} u \in F \\ \varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$

On a alors $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+3} \;=\; 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \\ (u_0, u_1, u_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$

On montre alors par récurrence triple immédiate que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = 0$$

Donc $u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

• Surjectivité.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Montrons qu'il existe une suite $u \in F$ telle que $\varphi(u) = (x, y, z)$.

Posons u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = x \\ u_1 = y \\ u_2 = z \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+3} \;=\; 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Il est clair que u appartient à F.
Calculons $\varphi(u)$. On a

$$\begin{array}{rcll} \varphi(u) & = & (u_0, u_1, u_2) & \text{par définition de } \varphi \\ & = & (x, y, z) & \text{par définition de } u \end{array}$$

3. On a
$$\varphi(v) = (1,-1,1) \qquad \varphi(w) = (1,2,4) \qquad \varphi(t) = (1,3,9)$$
Montrons que la famille $\big(\varphi(v), \varphi(w), \varphi(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Cela revient à montrer que pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$(x,y,z) = a(1,-1,1) \ + \ b(1,2,4) \ + \ c(1,3,9)$$
c'est-à-dire, après identification des coordonnées, tel que :
$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = -a + 2b + 3c \\ z = a + 4b + 9c \end{cases}$$
Autrement dit, il s'agit de montrer que le système suivant d'inconnue (a,b,c), de second membre fixé (x,y,z), admet une unique solution :
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$
Il s'agit donc de montrer que la matrice du système est inversible. On applique l'algorithme du pivot de Gauss, ce qui ne change pas son caractère inversible.
En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient la matrice :
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$
Puis en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on obtient la matrice :
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
Cette dernière matrice est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, donc elle est inversible.
Par conséquent, la matrice initiale est également inversible.
Donc le système admet une unique solution.

BILAN : La famille $\big(\varphi(v), \varphi(w), \varphi(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On a montré que φ est un isomorphisme, donc φ^{-1} est également un isomorphisme, donc transforme une base de $\mathbb{R}^3$ en une base de F.
On a montré que $\big(\varphi(v), \varphi(w), \varphi(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Son image par φ^{-1} est la famille (v,w,t), qui est donc une base de F.

1. Montrons $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} f$.
   On a alors $f(x) = 0_F$.
   Appliquons g, on a donc $g(f(x)) = g(0_F)$.
   Comme g est linéaire, on a $g(f(x)) = 0_G$.
   D'où $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f) \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.

   $\boxed{\implies}$ Supposons $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
   Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$.
   Alors $\begin{cases} y \text{ s'écrit } f(x) \text{ avec } x \in E \\ g(y) = 0_G \end{cases}$
   Avec ces deux informations, on tire $g(f(x)) = 0_G$.
   D'où $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
   Par hypothèse $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$, d'où $x \in \operatorname{Ker} f$.
   D'où $f(x) = 0_F$.
   D'où $y = 0_F$.

   Bilan : $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_F\}$.

   $\boxed{\impliedby}$ Supposons $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.
   Montrons $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker}(g \circ f)$, l'autre inclusion étant toujours vraie.
   Soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
   Alors $(g \circ f)(x) = 0_G$, d'où $f(x) \in \operatorname{Ker} g$.
   Comme par ailleurs, $f(x) \in \operatorname{Im} f$, on en déduit $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$.
   Par hypothèse, on a $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_F\}$, donc $f(x) = 0_F$.
   Ainsi, $x \in \operatorname{Ker} f$.

   Bilan : $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$.

3. Montrons $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
   Prenons $z \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.
   Il s'écrit donc $(g \circ f)(x)$ avec $x \in E$.
   Donc $z = g\Big(f(x)\Big)$.
   Donc $z \in \operatorname{Im} g$.
4. Montrons $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

   $\boxed{\implies}$ Supposons $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$
   Montrons $F \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$, l'autre inclusion étant immédiate.
   Soit $y \in F$.

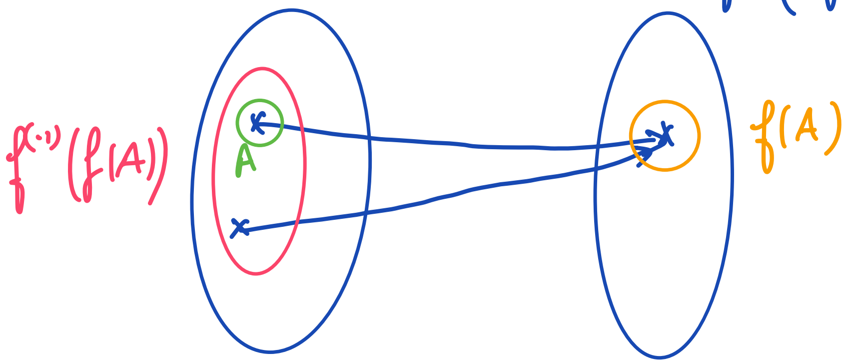
   — Considérons $g(y)$ qui est dans $\operatorname{Im} g$.
   Par hypothèse, on a donc $g(y) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, donc on peut trouver $x \in E$ tel que $g(y) = (g \circ f)(x)$.

   — On a l'égalité
   $$y \quad = \quad f(x) \quad + \quad (y - f(x))$$
   Et on constate que $f(x) \in \operatorname{Im} f$ (automatique) et que $y - f(x) \in \operatorname{Ker} g$ (WHY ?).

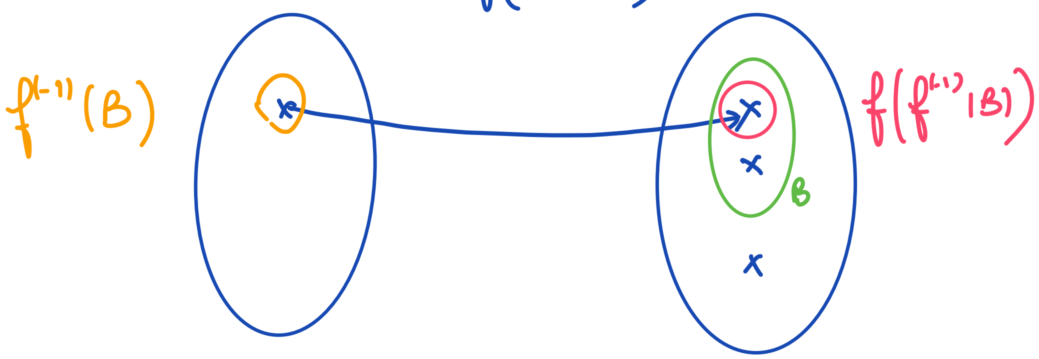
   $\boxed{\impliedby}$ Supposons $F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.
   Montrons $\operatorname{Im}(g \circ f) \supset \operatorname{Im} g$, l'autre inclusion étant toujours vraie.
   Soit $z \in \operatorname{Im} g$.
   Alors z s'écrit $g(y)$ avec $y \in F$.
   Comme $y \in F$, l'hypothèse fournit l'existence de $x \in E$ et $t \in \operatorname{Ker} g$ tel que $y = f(x) + t$.
   Appliquons g qui est linéaire :
   $$z = g(f(x)) + g(t)$$
   Comme $t \in \operatorname{Ker} g$, on obtient $z = (g \circ f)(x)$, donc $z \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Rappel Soit $f : E \longrightarrow F$ une ap. quelconque entre deux ensembles quelconques.

- Soit $A \subset E$. Alors $A \subset f^{(-1)}(f(A))$



- Soit $B \subset F$. Alors $f(f^{(-1)}(B)) \subset B$



Revenons à l'exo :

Plaçons-nous dans un contexte d'algèbre linéaire

Ainsi E et F sont des espaces vectoriels

f est linéaire

Et on peut sommer des sev.

① Exprimons $f^{(-1)}(f(F))$ en fct de F et $\operatorname{Ker} f$.

- On a $\begin{cases} F \subset f^{(-1)}(f(F)) & \text{(toujours, cf le rappel)} \\ \operatorname{Ker} f \subset f^{(-1)}(f(F)) & \text{(WHY? Ce n'est pas complètement évident)} \end{cases}$

Ainsi $F + \operatorname{Ker} f \subset f^{(-1)}(f(F))$

- Examinons l'autre inclusion : est-elle vraie?

Soit $x \in f^{(-1)}(f(F))$.

Alors par définition de l'image réciproque on a $f(x) \in f(F)$

Ainsi $f(x)$ s'écrit $f(x_F)$ avec $x_F \in F$.

D'où $f(x) = f(x_F)$ puis $f(x - x_F) = 0_E$

Puis $x - x_F \in \operatorname{Ker} f$

Donc $x \in F + \operatorname{Ker} f$

BILAN $f^{(-1)}(f(F)) = F + \operatorname{Ker} f$.

② Exprimons $f(f^{(-1)}(F))$ en fct de F et $\mathrm{Im} f$.

- On a $\begin{cases} f(f^{(-1)}(F)) \subset F & \text{(toujours, cf le rappel)} \\ f(f^{(-1)}(F)) \subset \mathrm{Im} f & \text{(automatique!)} \end{cases}$

Ainsi
$$f(f^{(-1)}(F)) \subset F \cap \mathrm{Im} f$$

- Examinons l'autre inclusion.

Soit $y \in F \cap \mathrm{Im} f$.

Alors $y \in F$ et y s'écrit $f(x)$ avec $x \in E$.

Ainsi $y = f(x)$

Reste à croiser les doigts pour que $x \in f^{(-1)}(F)$.
Montrons-le !
On a $f(x) \in F$ (car $y \in F$)

Donc $x \in f^{(-1)}(F)$ par déf de l'image réciproque.

Résumons $y = f(x)$ avec $x \in f^{(-1)}(F)$

Donc $y \in f(f^{(-1)}(F))$

BILAN $f(f^{(-1)}(F)) = F \cap \mathrm{Im} f$.

3 Condition pour que $f^{(-1)}(f(F)) = f(f^{(-1)}(F))$?

$\boxed{\Rightarrow}$ Condition nécessaire

Supposons que $f^{(-1)}(f(F)) = f(f^{(-1)}(F))$

Alors $F + \operatorname{Ker} f = F \cap \operatorname{Im} f$

D'où $\operatorname{Ker} f \subset F \subset \operatorname{Im} f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Condition suffisante.

Supposons que $\operatorname{Ker} f \subset F \subset \operatorname{Im} f$

Alors $\begin{cases} F + \operatorname{Ker} f = F \\ \text{et} \\ F \cap \operatorname{Im} f = F \end{cases}$

D'où $F + \operatorname{Ker} f = F \cap \operatorname{Im} f$

D'où $f^{(-1)}(f(F)) = f(f^{(-1)}(F))$

BILAN

$$f^{(-1)}(f(F)) = f(f^{(-1)}(F)) \Longleftrightarrow F + \operatorname{Ker} f = F \cap \operatorname{Im} f$$

115

Explication du titre, cliquez ici.

— **Aspect bien défini.**
Soit $x \in G$.
A fortiori $x \in E$, donc on peut considérer $f(x)$.
D'autre part, $f(x) \in \operatorname{Im} f$, donc $\widetilde{f}(x)$ appartient bien à $\operatorname{Im} f$.

— **Linéarité.**
L'application $\widetilde{f}$ se présente comme la restriction au départ et à l'arrivée de f.
Comme f est linéaire, l'application $\widetilde{f}$ l'est également, par héritage !

— **Injectivité.** Montrons que $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = \{0_E\}$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} \widetilde{f}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x \in G \\ \widetilde{f}(x) = 0_F \end{cases}$.
Par définition de $\widetilde{f}$, on a donc $\begin{cases} x \in G \\ f(x) = 0_F \end{cases}$.
Ainsi, $x \in G \cap \operatorname{Ker} f$.
Comme G et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E, ils sont a fortiori en somme directe, donc $x = 0_E$.

— **Surjectivité.** Soit $y \in \operatorname{Im} f$, espace d'arrivée de $\widetilde{f}$.
Montrons $\exists\, x_G \in G,\ y = \widetilde{f}(x_G)$.
Par définition de $\operatorname{Im} f$, on peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $E = G + \operatorname{Ker} f$, ce vecteur x peut s'écrire $x = x_G + x_K$ avec $(x_G, x_K) \in G \times \operatorname{Ker} f$.
Appliquons f, qui est linéaire :
$$y = f(x_G) + f(x_K)$$
Comme $x_K \in \operatorname{Ker} f$, on en déduit que $y = f(x_G)$.
Donc $y = \widetilde{f}(x_G)$.

1. **Rappel.** *De manière très générale, on a les inclusions suivantes (où φ est un endomorphisme quelconque, et où $\star$ est un joker) :*

$$\operatorname{Ker}\varphi \;\subset\; \operatorname{Ker}(\star\circ\varphi) \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Im}(\varphi\circ\star) \;\subset\; \operatorname{Im}\varphi$$

En exploitant les trois égalités et le rappel à trois reprises

(i) $f\circ g = h$

(ii) $g\circ h = f$

(iii) $h\circ f = g$.

on obtient les inclusions ci-dessous (on signale au-dessus du symbole d'inclusion le numéro de l'égalité utilisée)

$$\operatorname{Ker} f \overset{\text{(iii)}}{\subset} \operatorname{Ker} g \overset{\text{(ii)}}{\subset} \operatorname{Ker} h \overset{\text{(i)}}{\subset} \operatorname{Ker} f$$

Comme les extrémités sont égales, on a donc égalité partout montrant ainsi que f, g, h ont même noyau.

On a également les inclusions

$$\operatorname{Im} f \overset{\text{(ii)}}{\subset} \operatorname{Im} g \overset{\text{(iii)}}{\subset} \operatorname{Im} h \overset{\text{(i)}}{\subset} \operatorname{Im} f$$

Comme les extrémités sont égales, on en déduit qu'il y a des égalités partout montrant que f, g, h ont même image.

2. On vérifie directement que (attention, ce n'est pas complètement évident ; il faut prendre son temps et ne pas s'énerver) :

$$\begin{cases} g\circ f = h^3 \\ h\circ g = f^3 \\ f\circ h = g^3, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f^2 = g^2 = h^2 = f\circ g\circ h = g\circ h\circ f = h\circ f\circ g \\ f^4 = g^4 = h^4 = h\circ g\circ f = g\circ f\circ h = f\circ h\circ g. \end{cases}$$

On en déduit par exemple

$$\begin{aligned} f^5 &= f\circ f^4 \\ &= f\circ(g\circ f\circ h) \\ &= (f\circ g)\circ f\circ h \\ &= h\circ f\circ h \\ &= g\circ h \\ &= f \end{aligned}$$

Autre façon de présenter la preuve.
Un élève me dit que l'on peut aussi écrire (il faut penser à écrire du « f-g-h » astucieusement) :

$$\begin{aligned} f^5 &= f\circ(g\circ h)\circ f\circ f\circ(g\circ h) \\ &= (f\circ g)\circ h\circ f\circ(f\circ g)\circ h \\ &= h\circ h\circ f\circ h\circ h \\ &= h\circ(\underbrace{h\circ f}_{=g})\circ h\circ h \\ &= h\circ(\underbrace{g\circ h}_{=f})\circ h \\ &= (h\circ f)\circ h \\ &= g\circ h \\ &= f \end{aligned}$$

3. **Deux preuves : analyse-synthèse, ou une preuve en deux temps (somme directe d'une part, et somme d'autre part)**

• Première preuve : analyse-synthèse
Soit $x\in E$.

Analyse. Supposons qu'il existe $y, z\in E$ tels que $\begin{cases} y\in\operatorname{Ker} f \\ z\in\operatorname{Im} f \\ x = y+z \end{cases}$

— On va exploiter l'égalité $f^5 = f$ que l'on écrit $(f^4 - \mathrm{id}) \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Ainsi $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}(f^4 - \mathrm{id})$.
En particulier, comme $z \in \mathrm{Im}\, f$, on a $(f^4 - \mathrm{id})(z) = 0_E$, de sorte que $f^4(z) = z$.

— D'autre part, il est automatique que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^4$ de sorte que $f^4(y) = 0$ (car $y \in \mathrm{Ker}\, f$).

Appliquons f^4 à l'égalité $x = y + z$. Les deux points précédents fournissent :

$$f(x) = \underbrace{f^4(y)}_{=0_E} + \underbrace{f^4(z)}_{=z}$$

Résumons. On a $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & y+z \\ f^4(x) & = & z \end{array} \right.$

D'où l'on tire $z = f^4(x)$, puis $y = x - f^4(x)$.

Synthèse. On pose $y = x - f^4(x) = (\mathrm{id} - f^4)(x)$ et $z = f^4(x)$.

— Montrons que $y \in \mathrm{Ker}\, f$.
On a $f(y) = \big(f \circ (\mathrm{id} - f^4)\big)(x) = (f - f^5)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$.

— Montrons que $z \in \mathrm{Im}\, f$.
On a $z = f^4(x) = f\big(f^3(x)\big)$, donc $z \in \mathrm{Im}\, f$ (pour la culture, on a toujours $\mathrm{Im}\, f^4 \subset \mathrm{Im}\, f$).

— On a évidemment $y + z = x$.

• **Deuxième preuve, en deux temps.**

— Soit $y \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$.
On peut donc trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et on a $f(y) = 0$ (donc $f^4(y) = 0$).
On a alors (en utilisant $f = f^5$) :

$$y = f(x) = f^5(x) = f^4(f(x)) = f^4(y) = 0,$$

D'où $y = 0$.
On a donc montré $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.

— Soit $x \in E$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$.
Comme $f^5 = f$, on a $x - f^4(x) \in \mathrm{Ker}\, f$. On a donc

$$x = \underbrace{f^4(x)}_{\in \mathrm{Im}\, f} + \underbrace{\big(x - f^4(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}\, f}$$

On a donc montré $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$.

Bilan : $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

1. En composant à droite par f l'égalité $g \circ f \circ g = g$, on obtient que $g \circ f$ est un projecteur. (Et en composant à gauche cette même égalité par f, on obtient que $f \circ g$ est un projecteur, mais on n'en aura pas besoin, et de toutes façons les données sont symétriques en f et g).
   • Comme $g \circ f$ est un projecteur, on a d'après le cours

$$E \;=\; \operatorname{Ker}(g \circ f) \oplus \operatorname{Im}(g \circ f)$$

   • Montrons que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

   De manière très générale, on a les inclusions suivantes (où h est un endomorphisme quelconque, et où $\star$ est un joker) :

$$\operatorname{Ker} h \;\subset\; \operatorname{Ker}(\star \circ h) \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Im}(h \circ \star) \;\subset\; \operatorname{Im} h$$

   De cela, on déduit immédiatement les inclusions suivantes :

$$\operatorname{Ker} f \;\subset\; \operatorname{Ker}(g \circ f) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(g \circ f) \;\subset\; \operatorname{Im} g$$

   Reste à montrer les inclusions réciproques. Toujours en utilisant le lemme général (je vous laisse deviner le joker à choisir pour l'une et l'autre), on obtient les inclusions (sous les accolades, on utilise les hypothèses de l'énoncé) :

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) \;\subset\; \operatorname{Ker}\Big(\underbrace{f \circ (g \circ f)}_{f}\Big) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}\Big(\underbrace{(g \circ f) \circ g}_{g}\Big) \;\subset\; \operatorname{Im}(g \circ f)$$

   • En utilisant les deux points précédents, on obtient :

$$E \;=\; \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$$

2. Montrons $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

   • On a toujours l'inclusion $\subset$.

   • Montrons l'autre inclusion, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Im} g)$.
   Faisons une preuve « ensembliste » [1].
   On écrit que $\operatorname{Im} f = f(E)$.
   D'autre part, à la question 1, on a montré en particulier que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$ (j'enlève volontairement l'aspect somme directe ici).
   En appliquant f, on obtient $f(E) \subset f(\operatorname{Ker} f) + f(\operatorname{Im} g)$.
   D'où $f(E) \subset f(\operatorname{Im} g)$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Im} g)$.

   Autre preuve, avec des éléments.
   Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors y s'écrit $f(x)$ avec $x \in E$.
   Montrons que $y \in f(\operatorname{Im} g)$.
   Comme $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$, a fortiori $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$, on peut écrire x sous la forme $x_K + x_I$ avec $x_K \in \operatorname{Ker} f$ et $x_I \in \operatorname{Im} g$.
   Par linéarité de f, on a donc $f(x) = f(x_K) + f(x_I)$.
   Puis comme $x_K \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(x) = f(x_I)$.
   Ainsi, $y = f(x_I)$ est bien dans $f(\operatorname{Im} g)$.

1. Un élève a le droit de faire cette preuve, à condition qu'il comprenne ce qu'il fait.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ liée.
Mq f est une homothétie.

Rmq L'hypothèse est équivalente à :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad (x, f(x)) \text{ liée.}$$

càd (WHY, ce n'est PAS évident et cela utilise $x \neq 0_E$)

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \ \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \lambda_x x$$

D'ailleurs un tel λ_x est unique car $x \neq 0_E$.

$\lambda_x \cdot x = \lambda'_x \cdot x$ implique $(\lambda_x - \lambda'_x) \cdot x = 0_E$

d'où $\lambda_x - \lambda'_x = 0_{\mathbb{K}}$ car $x \neq 0_E$

d'où $\lambda_x = \lambda'_x$

Il s'agit de mq :

$$\exists \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E, \ f(x) = \mu x$$

ou encore (WHY?)

$$\exists \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E \setminus \{0_E\}, \ f(x) = \mu x.$$

Analyse de l'exo. Il s'agit d'une interversion de quantificateurs $\forall$, $\exists$.

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda_x \cdot x$$

$$\Downarrow \text{exo}$$

$$\exists \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E \setminus \{0_E\},\ f(x) = \mu x$$

BROUILLON

Sq ...

Mq ..

Il s'agit de mq "le" λ est le même pour tous les vecteurs !

Soit $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ deux vecteurs

Mq $\lambda_x = \lambda_y$

idée Considérer $x+y$ (confer la dernière page)

On a $\begin{cases} f(x) = \lambda_x \cdot x \\ f(y) = \lambda_y \cdot y \end{cases}$

Par somme : et linéarité de f $\quad f(x+y) = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y$

Or $f(x+y) = \lambda_{x+y} \cdot (x+y)$

D'où $\lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y = \lambda_{x+y} (x+y)$

$$\lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y = \lambda_{x+y} \cdot x + \lambda_{x+y} \cdot y$$

⚠ On aurait envie de dire $\begin{cases} \lambda_x = \lambda_{x+y} \\ \lambda_y = \lambda_{x+y} \end{cases}$ d'où $\lambda_x = \lambda_y$

mais il nous faut pour cela de la liberté !
À quelle proposition de cours cela fait référence ?

<u>Cas (x,y) libre</u>.

Alors on a $\begin{cases} \lambda_x = \lambda_{x+y} \\ \lambda_y = \lambda_{x+y} \end{cases}$ d'où $\lambda_x = \lambda_y$

<u>Cas (x,y) liée</u> Comme $x \neq 0_E$, on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$.

Alors $f(y) = \alpha f(x)$ (linéarité de f)

D'où $\lambda_y \cdot y = \alpha \lambda_x \cdot x$ (déf de λ)

$= \lambda_x \cdot (\alpha \cdot x)$ (loi $\cdot$)

$= \lambda_x \cdot y$ (déf de y)

Résumons $\lambda_y \cdot y = \lambda_x \cdot y$.

Comme $y \neq 0_E$, on a (WHY?) $\lambda_y = \lambda_x$

COPIE

Sq ...

Mq ...

Soit $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ deux vecteurs

Mq $\lambda_x = \lambda_y$

Cas (x, y) libre . Considérer $x+y$ et recopier le brouillon

On montre que $\lambda_x = \lambda_y$ (en montrant que cela vaut λ_{x+y})

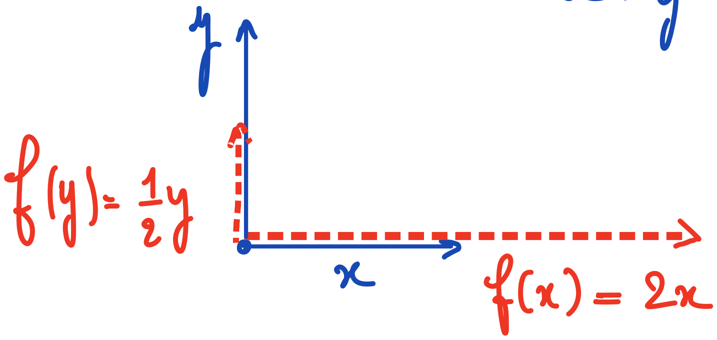
Cas (x, y) liée . Recopier le brouillon.

On montre que $\lambda_x = \lambda_y$ (en exploitant $x \neq 0_E$ et $y \neq 0_E$)

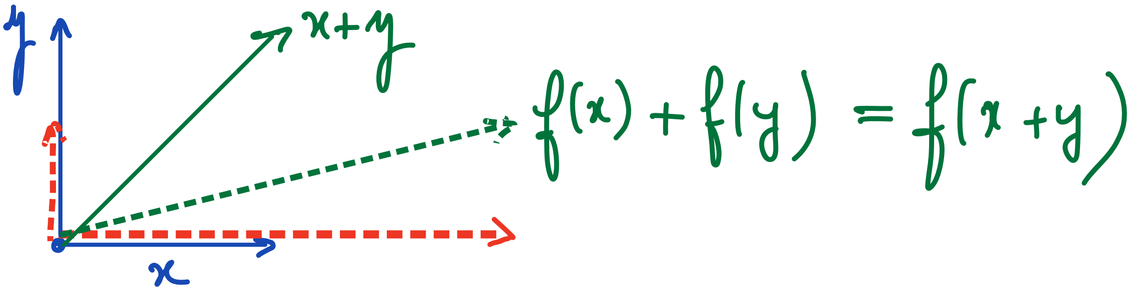
BILAN Dans les 2 cas, on a $\lambda_x = \lambda_y$.

Explication de l'idée

Ici un dessin avec deux vecteurs x et y et deux λ différents : le λ_x vaut 2
le λ_y vaut $1/2$



On dessine alors $x+y$ et $f(x) + f(y) = f(x+y)$



et on constate que $f(x+y)$ n'est <u>PAS</u> colinéaire à $x+y$.

On conjecture que cela impose $\lambda_x = \lambda_y$ ...

1. — On a, avec l'hypothèse $p \circ q = p$, l'égalité :

$$\begin{array}{rcll} p^2 & = & (p \circ q) \circ p & \text{car } p \circ q = p \\ & = & p \circ (q \circ p) & \text{associativité de la loi } \circ \\ & = & p \circ q & \text{car } q \circ p = q \\ & = & p & \text{car } p \circ q = p \end{array}$$

On montre de même que $q^2 = q$.

— L'égalité $p \circ q = p$ montre que $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$.
De même, on montre que $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$.
Bilan : on a l'égalité $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

Ainsi, p et q sont deux projecteurs de même noyau.

2. (a) Montrons que l'image de p est isomorphe à $\operatorname{Im} q$.
D'après l'exercice 115 :

l'image d'une application linéaire est isomorphe à n'importe quel supplémentaire de son noyau

Appliquons ce résultat à l'application linéaire p.
Ainsi, l'image de p est isomorphe à n'importe quel supplémentaire de son noyau $\operatorname{Ker} p$.
Il n'y a plus qu'à montrer que $\operatorname{Im} q$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} p$.
Comme q est un projecteur, le cours dit

$$E = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q$$

Or $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$, donc $\operatorname{Im} q$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} p$.

(b) Montrons $q = q \circ p$. C'est une égalité d'applications linéaires (ici même d'endomorphismes).
Soit $x \in E$.
On a $x = (x - p(x)) + p(x)$.
Posons $x_0 = x - p(x)$ pour alléger.
Comme p est un projecteur, on a $x_0 \in \operatorname{Ker} p$.
Comme $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$, on a $x_0 \in \operatorname{Ker} q$.
En appliquant q, qui est linéaire, à l'égalité $x = x_0 + p(x)$, on obtient :
$q(x) = q(x_0) + q(p(x))$, ce qui s'écrit :

$$q(x) = (q \circ p)(x).$$

Cela montre $q = q \circ p$.
On montre de même $p = p \circ q$.

Remarque importante, pour progresser. On peut faire une preuve plus abstraite, en disant que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, car p est un projecteur.

Rappel. Pour montrer une égalité d'applications linéaires définies sur E, il suffit de la vérifier sur deux sous-espaces supplémentaires de E.

Il suffit donc de vérifier l'égalité d'applications linéaires $q \circ p = q$, sur $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$ (facile, WHY ?), et sur $\operatorname{Im} p$ (facile car un élément $x \in \operatorname{Im} p$ vérifie $x = p(x)$; rappelons que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ pour un projecteur p).

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulles.

Mq $(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ g = \lambda f) \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sq ...
Mq ...
D'après l'hypothèse, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $g = \lambda f$.

- Mq $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$
  Soit $x \in \operatorname{Ker} f$.
  Alors $g(x) = (\lambda . f)(x)$
  $= \lambda f(x)$ déf de . dans $\mathcal{L}(E)$
  $= \lambda \cdot 0$ car $x \in \operatorname{Ker} f$
  $= 0$
  Donc $x \in \operatorname{Ker} g$.

- On a $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ car g est non nulle
  Donc $f = \frac{1}{\lambda} g$.
  Donc $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ (m̄ justificat° que précéd^t)

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est le sens difficile
Sq $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$
Mq ...

Comme $f \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$, on peut trouver $v_0 \in E$ tq $f(v_0) \neq 0_{\mathbb{K}}$
d'après le cours, on a $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Vect}(v_0)$.

Ou bien

le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan donc on peut trouver une droite vectorielle D tq $E = \operatorname{Ker} f \oplus D$ que l'on écrit $\operatorname{Vect}(v_0)$.

<u>Résumons</u> On a $E = \underbrace{\underset{\operatorname{Ker} g}{\overset{\|}{\operatorname{Ker} f}}}_{H} \oplus \underbrace{\operatorname{Vect}(v_0)}_{D}$

Mq $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ g = \lambda f$.

Posons $\lambda = \dfrac{g(v_0)}{f(v_0)}$ (c'est une division de <u>scalaires</u>)

C'est licite car $v_0 \notin \operatorname{Ker} f$ donc $f(v_0) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Vérifions que $g = \lambda f$.

D'après un résultat de cours, il suffit de mq

a) g et λf coïncident sur H

et

b) g et λf coïncident sur D

a) C'est facile !

Soit $x \in H$ càd $x \in \operatorname{Ker} f$ et $x \in \operatorname{Ker} g$.

Ainsi

$g(x) = 0$ (car $x \in \operatorname{Ker} g$) et $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

$= \lambda \cdot 0$ $(x \in \operatorname{Ker} f)$

$= 0$

D'où $g(x) = (\lambda f)(x)$

b) Soit $x \in D$

Mq $g(x) = (\lambda f)(x)$

Comme $x \in D = \mathrm{Vect}(v_0)$, on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tq $x = \alpha v_0$.

On a $g(x) = g(\alpha v_0)$ déf de x

$= \alpha\, g(v_0)$ linéarité de g

$= \alpha\, \lambda f(v_0)$ déf de λ

$= \lambda f(\alpha v_0)$ linéarité de f

$= \lambda f(x)$ déf de x

$= (\lambda f)(x)$ loi $\cdot$ de $\mathcal{L}(E)$

Rmq Pour mq $g = \lambda f$ sur $D = \mathrm{Vect}(v_0)$

il suffit (WHY) de mq $g(v_0) = (\lambda f)(v_0)$.

Et c'est évident par définition de λ.

Bilan : on n'est pas obligé de prendre $x \in D$

et d'invoquer un $\alpha \in \mathbb{K}$.

135

Soit

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & A & \longrightarrow & \mathcal{L}(H,F) \\ & u & \longmapsto & u_{|H}. \end{array}$$

Il s'agit clairement d'une application linéaire.

— Si $u \in \operatorname{Ker} \Phi$, alors $u_{|H} = 0$, donc $H \subset \ker u$.
  Comme en outre $u \in A$, on a $G \subset \operatorname{Ker} u$.
  On en déduit $E = G \oplus H \subset \operatorname{Ker} u$, donc $u = 0$. Ainsi, Φ est injectif.

— Soit $v \in \mathcal{L}(H,F)$.
  D'après le cours, il existe une application linéaire $u : E = G \oplus H \to F$ telle que $u_{|G} = 0$ et $u_{|H} = v$. Cette application u est dans A et est un antécédent de v par Φ.
  Ainsi, Φ est surjectif.

On a donc bien montré que Φ est un isomorphisme.

1. (a) Soit $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$.
On a

$$[[f,g],h] = [f \circ g - g \circ f,\ h] \ = \ f \circ g \circ h \ - \ g \circ f \circ h \ - \ h \circ f \circ g \ + \ h \circ g \circ f$$

En faisant tourner les lettres, on obtient (en omettant le symbole $\circ$) :

$$\begin{aligned}[][[f,g],h] + [[g,h],f] + [[h,f],g] &= (fgh - gfh - hfg + hgf) + (ghf - hgf - fgh + fhg) + (hfg - fhg - g \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) On a $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ et $[g,f] = g \circ f - f \circ g$.
On a l'équivalence :

$$[f,g] = [g,f] \iff f \circ g - g \circ f = g \circ f - f \circ g \iff 2 f \circ g = 2 g \circ f \iff f \circ g = g \circ f$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $[f,g] = [g,f]$ est que f et g commutent.

2. (2a) On suppose (i), c'est-à-dire qu'il existe un projecteur p tel que $f = p \circ f - f \circ p$.
Pour ce genre de calculs, il y a divers moyens d'y parvenir. Je vous propose ici une solution.

Montrons que $p \circ f \circ p = 0$.
Remarquons tout d'abord que l'on a $f = p \circ f - f \circ p$, donc $f \circ p = p \circ f - f$.
Ainsi

$$\begin{array}{rcll} p \circ f \circ p & = & p \circ (f \circ p) & \\ & = & p \circ (p \circ f - f) & \\ & = & p \circ p \circ f - p \circ f & \\ & = & p \circ f - p \circ f & \text{car } p \text{ projecteur} \\ & = & 0 & \end{array}$$

Montrons que $f \circ p = 0$.
Partons de $f \circ p$ et remplaçons f par $p \circ f - f \circ p$ (on utilise l'hypothèse !).
On a

$$\begin{array}{rcll} f \circ p & = & (p \circ f - f \circ p) \circ p & \\ & = & p \circ f \circ p - f \circ p^2 & \\ & = & p \circ f \circ p - f \circ p & \text{car } p^2 = p \\ & = & -f \circ p & \text{car } p \circ f \circ p = 0 \\ 2 f \circ p & = & 0 & \\ f \circ p & = & 0 & \end{array}$$

On en déduit donc l'égalité $f = p \circ f$.
Maintenant calculons f^2. On a

$$f^2 \ = \ (p \circ f)^2 \ = \ p \circ (f \circ p) \circ f \ = \ p \circ 0 \circ f \ = \ 0$$

(2b) On suppose (ii), c'est-à-dire $f^2 = 0$. Cette égalité équivaut à $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Considérons un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans E. Notons-le S. On a $\operatorname{Im} f \oplus S = E$.
Considérons la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à S. Notons-la p.
En particulier, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} p = S$.
On veut montrer que l'on a $[p, f] = f$.

Soit $x \in E$.
$\triangleright$ D'une part $(p \circ f)(x) = p\big(f(x)\big) = f(x)$ car p est la projection sur $\operatorname{Im} f$.
$\triangleright$ D'autre part, $(f \circ p)(x) = f\big(p(x)\big) = 0$ car $p(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
On a donc :

$$[p,f](x) \ = \ (p \circ f - f \circ p)(x) \ = \ f(x) - 0 \ = \ f(x)$$

D'où l'égalité d'endomorphismes $[p, f] = f$.

3. (a) Montrons que φ_g est linéaire.
Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_g(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) & = & [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] \\ & = & (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \circ g - g \circ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \\ & = & \alpha_1 (f_1 \circ g - g \circ f_1) + \alpha_2 (f_2 \circ g - g \circ f_2) \\ & = & \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g] \\ & = & \alpha_1 \varphi_g(f_1) + \alpha_2 \varphi_g(f_2) \end{array}$$

(b) Fixons $f \in \mathcal{L}(E)$ une fois pour toutes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété

$$(\varphi_g)^n(f) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ f \circ g^{n-k}$$

Raisonnons par récurrence.
▷ Le membre gauche vaut $(\varphi_g)^0(f) = f$, et le membre droit vaut f. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
On a

$$(\varphi_g)^{n+1}(f) \;=\; (\varphi_g)^n\Big(\varphi_g(f)\Big)$$

D'après $\mathcal{H}_n$, on a alors :

$$\begin{aligned}
(\varphi_g)^{n+1}(f) \;&=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ \underbrace{\varphi_g(f)}_{f\circ g - g\circ f} \circ g^{n-k} \\
&=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ f \circ g^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^{k+1} \circ f \circ g^{n-k} \\
&=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ f \circ g^{n-k+1} - \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell-1} \binom{n}{\ell-1} g^{\ell} \circ f \circ g^{n+1-\ell}
\end{aligned}$$

On sort le terme pour $k = 0$ et le terme pour $\ell = n+1$. On a alors

$$(\varphi_g)^{n+1}(f) \;=\; f\circ g^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] g^k \circ f \circ g^{n-k+1} + (-1)^{n+1} g^{n+1} \circ f$$

D'après la formule du triangle de Pascal et en incorporant les termes extrêmes, on obtient :

$$(\varphi_g)^{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} g^k \circ f \circ g^{n+1-k}$$

Ce qui prouve $\mathcal{H}_{n+1}$.

Remarque pour les fans d'algèbre linéaire.
En fait, il y a une preuve bien plus jolie.
C'est de remarquer que l'endomorphisme φ_g s'écrit comme la différence de deux endomorphismes qui commutent.
On a en effet $\varphi_g = G_g - D_g$ où $G_g : f \mapsto g \circ f$ et $D_g : f \mapsto f \circ g$. Et on constate que les endomorphismes G_g et D_g commutent. En effet, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$G_g \circ D_g(f) \;=\; G_g\Big(D_g(f)\Big) \;=\; G_g(f\circ g) \;=\; g\circ(f\circ g) \;=\; (g\circ f)\circ g \;=\; D_g(g\circ f) \;=\; D_g\Big(G_g(f)\Big) \;=\; D_g \circ G_g(f)$$

On peut alors utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer le $n^{\text{ème}}$ itéré de φ_g.

$$\varphi_g^n \;=\; (G_g - D_g)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_g^{n-k} \circ (-1)^k D_g^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} G_g^{n-k} \circ D_g^k$$

On a $D_g^i : f \mapsto f \circ g^i$ et $G_g^j : f \mapsto g^j \circ f$.
Donc $(G_g^{n-k} \circ D_g^k)(f) = G_g^{n-k}\Big(D_g^k(f)\Big) =$
On obtient donc

$$\forall\, f \in \mathcal{L}(E), \quad \varphi_g^n(f) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \underbrace{G_g^{n-k}\Big(D_g^k(f)\Big)}_{g^{n-k}\,\circ f \circ g^k}$$

(c) Supposons g nilpotent. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $g^p = 0$.
D'après la question précédente, on a

$$\forall\, f \in \mathcal{L}(E), \qquad (\varphi_g)^{2p-1}(f) \;=\; \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} g^k \circ f \circ g^{2p-1-k}$$

Pour chaque indice k de cette somme, on a

— ou bien $k \geqslant p$; d'où $g^k \circ f \circ g^{2p-1-k} = 0 \circ f \circ g^{2p-1-k} = 0$.

— ou bien $k \leqslant p-1$ et alors $2p-1-k \geqslant p$; d'où $g^k \circ f \circ g^{2p-1-k} = g^k \circ f \circ 0 = 0$

Chaque terme $g^k \circ f \circ g^{2p-1-k}$ est donc nul, ce qui prouve que $(\varphi_g)^{2p-1} = 0$.
Donc φ_g est nilpotent.

4. **Question pas faisable pour l'instant.**
Comme E est de dimension finie, tout endomorphisme h de E possède une trace (c'est la trace de n'importe quelle matrice de h).
Supposons qu'il existe $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f, g] = \mathrm{id}_E$, c'est-à-dire tel que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.
En appliquant la trace, on trouve par linéarité $\mathrm{tr}(f \circ g) - \mathrm{tr}(g \circ f) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_E)$.
Or $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_E) = \dim E$.
D'où $0 = \dim E$.
Bilan : si $\dim E \geqslant 1$ (ce qui est supposé), alors l'équation proposée n'a pas de solution.

139

Le sens $\Longrightarrow$ est toujours vrai que p soit un projecteur ou non : c'est l'exo intitulé *Sous-espaces stables*.

Le sens $\Longleftarrow$ exploite le fait que p est un projecteur.
On commence par écrire $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
Pour vérifier l'égalité d'endomorphismes $p \circ f = f \circ p$, il suffit donc de la vérifier sur $\operatorname{Ker} p$ et sur $\operatorname{Im} p$ car ces deux sev sont supplémentaires (résultat profond de cours).
• Soit $x \in \operatorname{Ker} p$.
D'un côté, on a $(p \circ f)(x) = p(f(x)) = 0$ (comme $x \in \operatorname{Ker} p$ et que f est stable par $\operatorname{Ker} p$, on a $f(x) \in \operatorname{Ker} p$).
De l'autre côté, on a $(f \circ p)(x) = f(p(x)) = 0$ (car $x \in \operatorname{Ker} p$).

• Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Alors $f(x) \in \operatorname{Im} p$ car $\operatorname{Im} p$ est supposé stable par f.
D'un côté, on a $(p \circ f)(x) = p(f(x)) = f(x)$ (car pour tout $y \in \operatorname{Im} p$, le cours dit que $p(y) = y$ que l'on applique à $y = f(x)$ qui est bien dans $\operatorname{Im} p$).
De l'autre côté, on a $(f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(x)$ (car pour tout $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$).

140

Première solution avec polynôme annulateur.
Cherchons un polynôme annulateur de $f = p - \lambda\,\mathrm{id}_E$ ayant un coefficient constant non nul.
Comme on connaît un polynôme annulateur pour p de degré 2 (à savoir $X^2 - X$), on a envie de chercher un polynôme annulateur de f de degré $\leqslant 2$.
En utilisant le binôme de Newton et le fait que p et id commutent, on a

$$f^2 = (p - \lambda\,\mathrm{id}_E)^2 = p^2 - 2\lambda p + \lambda^2 \mathrm{id}_E$$

Comme $p^2 = p$ et que $p = f + \lambda\,\mathrm{id}_E$, on obtient

$$f^2 = (1 - 2\lambda)(f + \lambda\,\mathrm{id}_E) + \lambda^2 \mathrm{id}_E$$

En mettant les termes en f à gauche, et le terme en id_E à droite, on a :

$$f^2 - (1 - 2\lambda)f = (\lambda - \lambda^2)\mathrm{id}_E$$

Comme $\lambda - \lambda^2 \neq 0$ par définition de λ, on peut diviser par ce scalaire. En factorisant à gauche et à droite par f dans le membre gauche, on tire :

$$\begin{cases} f \circ \left(\dfrac{1}{\lambda - \lambda^2}(f - (1 - 2\lambda)\mathrm{id}_E)\right) = \mathrm{id}_E \\ \left(\dfrac{1}{\lambda - \lambda^2}(f - (1 - 2\lambda)\mathrm{id}_E)\right) \circ f = \mathrm{id}_E \end{cases}$$

Deuxième solution : à la main.

— On montre facilement que $\mathrm{Ker}(p - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

— Pour montrer que $\mathrm{Im}(p - \lambda\,\mathrm{id}_E) = E$, on peut exploiter le fait que $E = \mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Ker}\,p$.
Montrons que $\mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Im}(p - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\,p$.
Alors $y = (p - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x)$ avec $x = ???$.
Commençons par remarquer que $(p - \lambda\,\mathrm{id}_E)(y) = (1 - \lambda)y$ (car $p(y) = y$),
donc en posant $x = \dfrac{1}{1 - \lambda}y$ (licite car $\lambda \neq 1$), on obtient ce que l'on souhaite.

Montrons que $\mathrm{Ker}\,p \subset \mathrm{Im}(p - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\,p$.
Alors $y = (p - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x)$ avec $x = \dots$.
Commençons par remarquer que $(p - \lambda\,\mathrm{id}_E)(y) = -\lambda y$ (car $p(y) = 0$),
donc en posant $x = \dfrac{1}{-\lambda}y$ (licite car $\lambda \neq 0$), on obtient ce que l'on souhaite.

141

Commençons par supposer f *non nulle*.
Alors on peut trouver $v_0 \notin \operatorname{Ker} f$ tel que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Vect}(v_0)$.
Posons $\mu = \dfrac{g(v_0)}{f(v_0)}$ (licite car $f(v_0) \neq 0$).
Vérifions que $g = \mu f$ en vérifiant que g et μf coïncient sur $\operatorname{Ker} f$ et sur $\operatorname{Vect}(v_0)$.

— Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0$. D'après l'hypothèse de l'énoncé, on a $g(x) = 0$.
On a donc bien $g(x) = \mu f(x)$ (et peu importe le choix de μ d'ailleurs).

— Montrons que f et μg coïncident en le vecteur v_0. Comme ce sont deux applications linéaires, elles coïncideront sur tout vecteur de la forme λv_0 avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par définition de μ, on a bien $f(v_0) = \mu g(v_0)$ (c'est cette égalité qui doit guider le choix à faire pour v_0).

Si f est la forme linéaire nulle.
Alors d'après l'hypothèse de l'énoncé, la forme linéaire g est également nulle.
N'importe quel scalaire μ convient ! Par exemple, avec $\mu = 3$, on a bien $g = \mu f$.