

Primitives

Calculs d'intégrales

I Primitives	2
Généralités et premiers exemples	
Pour les fonctions à valeurs complexes	
Formulaire	
Toutes les primitives	
Quelques opérations et autres exemples	
Fonctions trigonométriques	
Le cas de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$	
Le cas de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$	
II Existence de primitives.	10
Le théorème fondamental de l'Analyse	
Lien entre intégrale et primitive pour une fonction continue	
Lien entre fonction et dérivée à l'aide d'une intégrale	
Une variante du théorème fondamental de l'Analyse	
III Recherche de primitives et calcul d'intégrales	12
Intégration par parties	
Changement de variable	



Ici, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (c'est-à-dire d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant au moins deux points distincts).
Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Primitives

Généralités et premiers exemples

1

Définition.

Une *primitive* de $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable, de dérivée égale à f .

- **(Non)-existence.** Une fonction f peut ne pas avoir de primitive (cf. plus loin).
- **Régularité.** Une primitive d'une fonction continue est de classe $\mathcal{C}^1$.
C'est en quelque sorte la situation opposée à « La dérivée d'une fonction $\mathcal{C}^1$ est continue ».
- **Un exemple.** Une primitive de $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est $F : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{est } F : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \dots\dots\dots \end{array}$$
- **Un peu de composition.**
Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$. Supposons que φ admette une primitive Φ .
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Une primitive de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \varphi(ax + b) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dots\dots\dots \end{array}$$
- **Un piège?** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Une primitive de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $\dots\dots\dots$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$$

Pour les fonctions à valeurs complexes

2

Proposition. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ que l'on écrit $\varphi = f + ig$ avec f, g à valeurs réelles.

Si $\begin{cases} f \text{ admet une primitive } F \\ g \text{ admet une primitive } G \end{cases}$ alors la fonction $\varphi = f + ig$ admet une primitive, à savoir $F + iG$.

- **Reformulation.** Pour trouver une primitive d'une fonction à valeurs complexes, il suffit de trouver une primitive de sa partie réelle et une primitive de sa partie imaginaire.
- **Remarque.** Quand on peut se passer des parties réelle et imaginaire, on ne se prive pas!
Exemple typique, la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ où $\omega \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\omega x} \end{array}$$

On peut ici directement affirmer qu'une primitive est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dots\dots\dots \end{array}$$

Formulaire

Les résultats de ce tableau sont à connaître mais, en cas de doute, il est facile de les vérifier car ils découlent de ceux connus sur la dérivation.

f	Une primitive de f	Intervalle
$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x $	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\ln \cos x $	$] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$	$] -1, 1[$
$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Arccos} x$	$] -1, 1[$
$x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$	$\mathbb{R}$

• La fonction puissance.

On peut retenir qu'une primitive de $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est (disjonction de cas) :

$$x \mapsto x^\alpha$$

$$\begin{cases} x \mapsto \ln x & \text{si } \alpha = -1 \\ x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Toutes les primitives

- **À l'oral.** Une primitive de $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est $F: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \dots\dots\dots$$

Une *autre* primitive de $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est $F: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \dots\dots\dots$$

3
preuve

Proposition.

Soit f définie sur un *intervalle*.

Si f possède UNE primitive F , alors TOUTES les primitives de f sont de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$.

- **Attention 1.** Le résultat est faux si l'on ne se place pas sur un *intervalle*.
- **Attention 2.** Il n'existe jamais une seule primitive. On ne dit donc pas *la* primitive mais *une* primitive. Il peut ne pas en exister; mais s'il en existe, il y en a une infinité.

• Déterminer TOUTES les primitives.

Pour déterminer les primitives d'une fonction sur un *intervalle*, il suffit d'en déterminer une. Toutes les autres s'en déduisent à une constante additive près.

- **Exemple.** Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3x$$

La fonction $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

• Question posée à un élève de PCSI 3.

Déterminer toutes les primitives de $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

— Réponse fausse.

~~La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.~~

~~Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions de la forme $F: x \mapsto \ln|x| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.~~

— Réponse correcte donnée par tous les élèves de PCSI 3.

Analyse. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.

On écrit $\mathbb{R}^*$ comme la réunion d'intervalles $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Il existe donc des constantes c_1 et c_2 telles que :

$$F: x \mapsto \begin{cases} \ln x + c_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Synthèse. Une telle fonction est dérivable et de dérivée f .

Bilan. Les primitives de f sont de la forme $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} \ln x + c_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Quelques opérations et autres exemples

4

Proposition (combinaison linéaire).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $g : I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Si $\begin{cases} f \text{ admet une primitive } F \\ g \text{ admet une primitive } G \end{cases}$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet une primitive, à savoir $\lambda F + \mu G$.

5

Proposition (composition).

Si $\begin{cases} u : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est dérivable à valeurs dans } J \\ \varphi : J \rightarrow \mathbb{K} \text{ est dérivable} \end{cases}$ alors $u' \times (\varphi' \circ u)$ admet une primitive sur I , à savoir $\varphi \circ u$.

6

Proposition (puissance entière). Soit $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable.

• Cas $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

Une primitive de $u' u^n$ est $\begin{cases} \frac{1}{n+1} u^{n+1} & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n+1} u^{n+1} & \text{si } n \leq -2 \text{ et si } u \text{ ne s'annule pas (c'est-à-dire à valeurs dans } \mathbb{K}^*) \end{cases}$

• Cas $n = -1$

On suppose que u est à valeurs réelles et ne s'annule pas (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^*$).

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$.

7

Proposition (puissance réelle). Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, à valeurs strictement positives.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une primitive de $u' u^\alpha$ est $\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln u & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$

8

À l'oral, ou presque!

— Une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est

— Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est

— Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^6}$ est

— Une primitive de $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ est

9

Proposition. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ non nul.

Une primitive de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2} \quad x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

10

Question. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(2x+3)^2+5}$.

11

Méli-Mélo.

- Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{3x^2+1}$ est
- Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(3x^2+1)^2}$ est
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{3x^2+1}$ est
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ est
- Une primitive de $x \mapsto \sqrt[5]{3x+1}$ est

12

sol → 17

Question.

- Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel.
Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de $f_a: t \mapsto \frac{1}{t-a}$.
- Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (un complexe non réel).
Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de $f_\omega: t \mapsto \frac{1}{t-\omega}$.

Fonctions trigonométriques

• Puissance de cosinus (ou sinus).

Lorsque l'on cherche une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^k x$ et plus généralement de tout polynôme en $\cos x$ et $\sin x$, on peut :

- ou bien linéariser la fonction en utilisant les formules trigonométriques
- ou bien essayer de se ramener à la dérivée d'une composée

13
sol → 17

Question.

- Linéariser $\cos^2 x$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$.
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$.
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin(3x) \cos(2x)$.

14

Un exemple instructif (exponentielle-cosinus)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ différent de $(0, 0)$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$.

— Première réponse.

On remarque que f est la partie réelle de la fonction $x \mapsto e^{(a+ib)x}$.

On en déduit qu'une primitive F de f est donnée par :

$$F : x \mapsto \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{(a-ib)e^{(a+ib)x}}{a^2+b^2} \right)$$

c'est-à-dire

$$F : x \mapsto e^{ax} \left(\frac{a}{a^2+b^2} \cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2} \sin(bx) \right).$$

— Autre réponse, en croisant les doigts.

On fait le pari qu'il existe une primitive de f « du même type » que f .

Début du brouillon. Soit F une primitive de f de la forme :

$$F : x \mapsto e^{ax} \left(\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx) \right) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Cette fonction F est dérivable et on a :

$$F' : x \mapsto ae^{ax} \left(\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx) \right) + e^{ax} \left(-b\lambda \sin(bx) + b\mu \cos(bx) \right)$$

Il suffit de voir qu'il existe (λ, μ) vérifiant :

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu = 1 \\ a\mu - b\lambda = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système d'inconnues λ et μ est $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$.

Ainsi, il existe une unique solution donnée par $(\lambda, \mu) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2} \right)$.

Fin du brouillon.

Copie. Posons F la fonction définie par

$$F : x \mapsto e^{ax} \left(\frac{a}{a^2+b^2} \cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2} \sin(bx) \right)$$

Cette fonction F est dérivable et après un petit calcul (lequel?), on trouve $F' = f$.

Donc F est une primitive de f .

Le cas de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

À méditer. Déterminons une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et a non nul.

Pour cela, on distingue trois cas en fonction du nombre de racines *réelles* du polynôme $aX^2 + bX + c$, c'est-à-dire en fonction du signe de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 l'unique racine, f est de la forme $f : x \mapsto \frac{\frac{1}{a}}{(x - r_0)^2}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{r_0\}$ est donc $x \mapsto \frac{-\frac{1}{a}}{x - r_0}$.

— Si $\Delta > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les racines réelles distinctes, f est de la forme $f : x \mapsto \frac{\frac{1}{a}}{(x - r_1)(x - r_2)}$.

D'après le chapitre « Fonctions rationnelles », on sait qu'il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \quad f(x) = \frac{\lambda_1}{x - r_1} + \frac{\lambda_2}{x - r_2}.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}$ est donc $x \mapsto \lambda_1 \ln|x - r_1| + \lambda_2 \ln|x - r_2|$.

— Si $\Delta < 0$, alors en utilisant la forme canonique, f est de la forme $f : x \mapsto \frac{\frac{1}{a}}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$ avec $\beta \neq 0$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \frac{1}{\beta} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)$.

15
sol → 17

Question. Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition puis une primitive :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2}$$

Le cas de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$

À méditer.

En effectuant la division euclidienne de $mX + p$ par $2aX + b$, on a

$$mX + p = (2aX + b)q + r \quad \text{avec } q, r \in \mathbb{R}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{Rac}, \quad \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c} = q \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + r \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$ est donc du type

$$x \mapsto q \times \ln|ax^2 + bx + c| + r \times \dots$$

16

Question. Déterminer une primitive de $f_5 : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$.

II. Existence de primitives

Le théorème fondamental de l'Analyse

Le théorème suivant permet :

- d'assurer l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle ;
- de calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ;
- de ramener la recherche de primitives à un calcul d'intégrale.

Il est admis pour l'instant, mais sera démontré dans le chapitre « Intégration », où sera définie rigoureusement l'intégrale d'une fonction continue.

Pour une définition de l'intégrale, nous utiliserons pour l'instant les connaissances vues en Terminale.

On généralise au cas des fonctions à valeurs complexes de la façon suivante :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et $a, b \in I$. L'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f(t)) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} f(t)) dt.$$

17

Théorème fondamental de l'Analyse.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Soit $a \in I$.

- La fonction $\Phi : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable sur I , et sa dérivée vaut f .
$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

Donc Φ est UNE primitive de f .

- De plus, on a $\Phi(a) = 0$.

Donc Φ est LA primitive de f qui s'annule en a .

- **Mieux.** La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (WHY?).

- **Le retour de ln.**

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$. Prenons $a = 1$ qui est bien dans I .

Le théorème donne l'existence d'une unique primitive de f qui s'annule en a .

Par définition (Terminale et début de l'année), c'est la fonction logarithme népérien!

- **Une notation.** Vous trouverez certains ouvrages qui notent $\int_a^x f(t) dt$ une primitive générique de f .

Voici une tentative d'explication.

Lorsque f est continue sur un intervalle I , et $a_1, a_2 \in I$, le théorème fondamental de l'Analyse nous dit que $x \mapsto \int_{a_1}^x f(t) dt$ et $x \mapsto \int_{a_2}^x f(t) dt$ sont deux primitives et diffèrent donc d'une constante.

Lien entre intégrale et primitive pour une fonction continue

On retrouve la proposition suivante qui a été vue en terminale (pour les fonctions à valeurs réelles) et qui permet de calculer l'intégrale d'une fonction f entre a et b , pour peu que l'on connaisse une primitive de f sur un intervalle contenant a et b .

18
preuve

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

On a

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est UNE primitive de } f$$

- **Notation.** La quantité $F(b) - F(a)$ est notée $[F]_a^b$ ou $[F(t)]_a^b$ ou $\left[F(\star)\right]_{\star=a}^{\star=b}$.

On peut retenir visuellement :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b$$

19
sol → 19

Question. Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}$.

Lien entre fonction et dérivée à l'aide d'une intégrale

20

Corollaire. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\forall a, b \in I, \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Une variante du théorème fondamental de l'Analyse

21
sol → 19

Question.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} f(t) dt$ est dérivable et déterminer sa dérivée en fonction de f .

III. Recherche de primitives et calcul d'intégrales

Maintenant que le lien entre recherche de primitives et calcul d'intégrales a été rappelé, nous allons donner deux méthodes permettant de simplifier le calcul d'intégrales et donc la recherche de primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

Elles s'appuient sur les résultats énoncés dans le chapitre « Dérivation ».

Intégration par parties

22
preuve

Proposition. Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

- **Moralement.** La formule d'intégration par parties permet, dans une intégrale, d'éliminer une fonction dont on ne connaît pas de primitive, mais dont la dérivée est plus simple à primitiver. Cette phrase n'est pas très exacte et très rigoureuse, mais elle donne une idée sur le principe.
- **Recherche de primitives.** L'IPP permet de déterminer des primitives des fonctions $\ln$, Arcsin , Arctan ... , en écrivant ces fonctions f sous la forme $1 \times f$ (ensuite, on primitive 1 et on dérive f).
- **Une primitive de $\ln$.** Trouvons une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme la fonction $\ln$ est continue, on peut exprimer une primitive avec une intégrale, en vertu du théorème fondamental de l'Analyse.

Une primitive est par exemple $x \mapsto \int_1^x \ln t dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Les fonctions $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \ln t \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln t dt &= \int_1^x u'(t) v(t) dt \\ &= \left[u(t) v(t) \right]_1^x - \int_1^x u(t) v'(t) dt \\ &= \left[t \ln t \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln x - x + 1 \end{aligned}$$

Bilan : une primitive de la fonction logarithme népérien est $x \mapsto x \ln x - x + 1$.

23

Proposition.

Une primitive de la fonction logarithme népérien est $x \mapsto x \ln x - x$.

24

sol → 19

Question. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction Arctan .

Polynôme-exponentielle

L'utilisation d'intégrations par parties successives permet de calculer une primitive d'une fonction s'écrivant comme le produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle : on dérive le polynôme et l'on primitive la fonction exponentielle jusqu'à ne plus obtenir qu'une fonction exponentielle.

25

sol → 20

Exemple. Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$.

Changement de variable

- **Motivation de ce paragraphe.** Pouvez-vous déterminer une primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$?

26
preuve

Proposition. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors :

$$\forall \alpha, \beta \in J, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s) ds$$

- **Remarque.** La fonction φ de l'énoncé n'a pas besoin d'être bijective (même si elle le sera souvent dans nos exemples). On lui demande juste d'être de classe $\mathcal{C}^1$.

Utilisation de G à D.

Ex 1. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt &= \int_0^{\pi/2} \varphi(t)^2 \varphi'(t) dt \quad \text{où } \varphi : t \mapsto \sin t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (ou sur } [0, \frac{\pi}{2}]) \\ &= \int_0^1 s^2 ds \\ &= \left[\frac{1}{3} s^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ex 2. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 t \sqrt{4-t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \sqrt{4-\varphi(t)} \varphi'(t) dt \quad \text{où } \varphi : t \mapsto t^2 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (ou sur } [-1, 2]) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4-s} ds \\ &= \left[-\frac{1}{3} (4-s)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

- **Remarque sur G $\rightarrow$ D.** On constate que l'on aurait pu se passer de changement de variable et écrire directement :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt = \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^2 t \sqrt{4-t^2} dt = \left[\frac{1}{-2} \frac{1}{\frac{3}{2}} (4-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2 = \sqrt{3}$$

• **Utilisation de D à G.**

Déterminons une primitive sur $[-1, 1]$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ à l'aide du changement de variable utilisant la fonction sinus.

On sait qu'une primitive est donnée par $x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-s^2} \, ds$.

Pour cela, on utilise le changement de variable $s = \sin \theta$.

Précisément, on pose $\varphi: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\theta \longmapsto \sin \theta$$

Le théorème de changement de variable fournit :

$$\int_0^x \sqrt{1-s^2} \, ds = \int_0^{\text{Arcsin } x} \cos \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} \, d\theta$$

Poursuivons les calculs

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{1-s^2} \, ds &= \int_0^{\text{Arcsin } x} \cos \theta |\cos \theta| \, d\theta \\ &= \int_0^{\text{Arcsin } x} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\text{Arcsin } x} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\text{Arcsin } x} \\ &= \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + \frac{1}{4} \sin(2 \text{Arcsin } x) \\ &= \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + \frac{1}{2} \sin(\text{Arcsin } x) \cos(\text{Arcsin } x) \\ &= \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Bilan. Une primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$.

Remarque pour la culture.

Bien qu'étant la somme de deux fonctions non dérivables en 1 et -1, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $[-1, 1]$.

En effet, cette fonction est égale à $x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-s^2} \, ds$ qui est dérivable sur $[-1, 1]$ en vertu du théorème fondamental de l'Analyse.

Justifions la dernière ligne du calcul

On a toujours $\sin(\text{Arcsin } x) = x$ (sans condition particulière sur x , mise à part le fait d'être dans l'ensemble de définition de Arcsin).

On a $\cos^2(\text{Arcsin } x) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin } x) = 1 - x^2$.

Comme $\text{Arcsin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(\text{Arcsin } x) \geq 0$ donc $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1-x^2}$.

Morale de l'histoire

- **De G à D.** C'est quand on reconnaît une forme $(f \circ \varphi) \varphi'$. C'est en général « bas de gamme », car on peut se passer de la formule.
- **De D à G.** Il vaut avoir une idée géniale : celle d'introduire une bonne fonction φ .

Puis :

- on remplace s par $\varphi(t)$
- on remplace ds par $\varphi'(t)dt$
- on adapte les bornes

27
sol → 21

Question.

1. Déterminer une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$. On pourra utiliser un changement de variable judicieux faisant intervenir la fonction tangente (ou arctangente).
2. En déduire une primitive sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

Primitives

Calculs d'intégrales
preuve et éléments de correction

3

Supposons que f possède une primitive F .

Montrons $\text{Primitives}(f) = \{F + c \mid c \in \mathbb{K}\}$.

L'inclusion $\supset$ est facile.

L'autre inclusion $\subset$. Soit G une primitive de f .

Alors la fonction $G - F$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I .

Elle est donc constante.

Donc il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $G - F = c$

12

— La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Une primitive de f_a est $F_a : t \mapsto \ln|t - a|$.

— La fonction f_ω est définie sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_\omega(t) = \frac{\overline{t - \omega}}{|t - \omega|^2} = \frac{(t - a) + ib}{(t - a)^2 + b^2} = \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} + i \frac{b}{(t - a)^2 + b^2}$$

Donc une primitive de f_ω est $F_\omega : t \mapsto \frac{1}{2} \ln((t - a)^2 + b^2) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{t - a}{b}\right)$.

Remarque pour la culture. La fonction F_ω s'écrit encore

$$F_\omega : t \mapsto \ln|t - \omega| + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Re}(t - \omega)}{\operatorname{Im}(t - \omega)}\right)$$

13

— On a la formule de linéarisation $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

— Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$.

• On a la formule $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$.

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin(3x) + 3\sin(x)\right)$.

• On peut aussi remarquer que $\cos^3 x = (\cos x) \times (1 - \sin^2 x)$.

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

— Utiliser la formule de trigonométrie donnant $\sin(a)\cos(b)$ comme une somme de $\sin/\cos$.

On trouve $\sin(3x)\cos(2x) = \frac{\sin(5x) + \sin(x)}{2}$.

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \sin(3x)\cos(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{5}\cos(5x) + \cos(x)\right)$.

1. La fonction f_1 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.

On a :

$$\forall x \in D, \quad \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Une primitive de f_1 sur D est donc $x \mapsto \frac{-1}{x-3}$.

2. La fonction f_2 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ qui est la réunion $D =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$.

On a :

$$\forall x \in D, \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Une primitive de f_2 sur D est $x \mapsto \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$.

3. La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$.

4. Écrivons la division euclidienne de X^3 par $X^2 + 3X + 2$:

$$X^3 = (X^2 + 3X + 2)(X - 3) + (7X + 6)$$

On a donc

$$f_4 : x \mapsto x - 3 + \frac{7x+6}{x^2+3x+2}$$

Décomposons en éléments simples la fonction rationnelle. Vous devez trouver :

$$f_4 : x \mapsto x - 3 + \frac{-1}{x+1} + \frac{8}{x+2}$$

Une primitive de f_4 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln|x+1| + 8\ln|x+2|$$

Soit $a, b \in I$.

D'après le théorème fondamental de l'Analyse appliqué à f et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f .

Maintenant, prenons F une primitive quelconque de f et montrons l'égalité.

Sur un intervalle, deux primitives diffèrent d'une constante, donc il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

En particulier pour $x = a$ et $x = b$, on a :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left(\int_a^b f(t) dt + c \right) - \left(\int_a^a f(t) dt + c \right) \\ &= \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

19

Il s'agit de trouver une primitive de $\cos^2$. Pour cela, il faut penser à linéariser.

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{1}{2} \sin(4\pi) \right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

21

Comme f est continue, f admet une primitive F en vertu du théorème fondamental de l'Analyse.

On a $g : x \mapsto F(x^3) - F(x^2)$.

Montrons que g est dérivable, en montrant que $x \mapsto F(x^3)$ et $x \mapsto F(x^2)$ le sont.

On a $\begin{cases} x \mapsto x^3 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \\ t \mapsto F(t) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Par composition, la fonction $x \mapsto F(x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On montre de même que $x \mapsto F(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3x^2 f(x^3) - 2x f(x^2).$$

Remarque. On a un énoncé très général qui couvre l'exercice ci-dessus.

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

Soit α et β deux fonctions dérivables définies sur J à valeurs dans I .

Alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) \, dt$$

est dérivable sur J et on a :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \beta'(x) f(\beta(x)) - \alpha'(x) f(\alpha(x)).$$

22

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , il en est de même de la fonction uv , et la proposition 20 permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\left[u(t) v(t) \right]_a^b &= \int_a^b (uv)'(t) \, dt \\ &= \int_a^b u'(t) v(t) \, dt + \int_a^b u(t) v'(t) \, dt.\end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental de l'Analyse, une primitive est donnée par $x \mapsto \int_0^x \operatorname{Arctan} t \, dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \operatorname{Arctan} t \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{Arctan} t \, dt &= \int_0^x u'(t) v(t) \, dt \\ &= [u v]_0^x - \int_0^x u(t) v'(t) \, dt \\ &= [t \operatorname{Arctan} t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Bilan : une primitive de la fonction Arctan est $x \mapsto x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Une primitive est $x \mapsto \int_0^x t^2 e^t \, dt$.

Les fonctions $\begin{cases} u : t \mapsto e^t \\ v : t \mapsto t^2 \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^t \, dt &= \int_0^x u'(t) v(t) \, dt \\ &= [u v]_0^x - \int_0^x u(t) v'(t) \, dt \\ &= [t^2 e^t]_0^x - \int_0^x 2te^t \, dt \\ &= x^2 e^x - \int_0^x 2te^t \, dt. \end{aligned}$$

Les fonctions $\begin{cases} u : t \mapsto e^t \\ v : t \mapsto 2t \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Une nouvelle intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^t \, dt &= x^2 e^x - \int_0^x u'(t) v(t) \, dt \\ &= x^2 e^x - [u v]_0^x + \int_0^x u(t) v'(t) \, dt \\ &= x^2 e^x - [2te^t]_0^x + \int_0^x 2e^t \, dt \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + [2e^t]_0^x \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2. \end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$ est donc :

$$x \mapsto x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

Remarque. On aurait aussi pu directement chercher une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sous la forme :

$$x \mapsto (ax^2 + bx + c) e^x$$

26

Comme f est continue sur I , elle possède une primitive F , qui est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Par composition, la fonction $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et sa dérivée est $(f \circ \varphi)\varphi'$.

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt \\ &= \left[F \circ \varphi \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \left[F \right]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx \end{aligned}$$

27

1. Une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ est $x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin t} dt$.

On rappelle que

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad \sin t = \frac{2 \tan \frac{t}{2}}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}.$$

Considérons la fonction $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow]0, \pi[$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi' : t \mapsto \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{t}{2})$.
 $t \mapsto \tan \frac{t}{2}$

Soit $x \in]0, \pi[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin t} dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}{2 \tan \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \underbrace{\frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{t}{2})}_{\frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t)} dt \\ &= \int_1^{\tan \frac{x}{2}} \frac{1}{s} ds \\ &= \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de f sur $]0, \pi[$ est

$$x \mapsto \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right).$$

Autre solution. On remarque que :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec } u: \begin{array}{l}]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan \frac{x}{2} \end{array}.$$

Ainsi, une primitive de f sur $]0, \pi[$ est $x \mapsto \ln |u(x)| = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right)$.

2. Une primitive de $f: x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt$.

Soit $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Pour cela, on fait le changement de variable $u = t + \pi/2$. On a donc :

$$\int_0^x \frac{1}{\cos t} dt = \int_{\pi/2}^{x+\pi/2} \frac{1}{\sin u} du = \left[\ln \left(\tan \frac{u}{2} \right) \right]_{\pi/2}^{x+\pi/2} = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Ainsi, une primitive de g sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ est

$$x \mapsto \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$