



Primitives

exercices

101**De tête**

Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $]1, +\infty[$.

102**Avec des fonctions rationnelles**

Pour tout entier n , on note $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ et F_n la primitive de f_n s'annulant en 0.

- Déterminer F_0, F_1 et F_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre F_n et F_{n+1} .
- En déduire F_3 .

103**Calculs d'intégrales (1)**

Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \quad J = \int_1^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx \quad K = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx \quad L = \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^6} dx$$

104**Un calcul d'intégrale (2)**

- Soit $x > 0$. Calculer l'intégrale $\int_{1/x}^x \frac{1}{t(1+t^4)} dt$.
- Retrouver ce résultat en dérivant $f : x \mapsto \int_{1/x}^x \frac{1}{t(1+t^4)} dt$.

105**Un calcul d'intégrale (3)**

Calculer $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$. À l'aide du changement de variable $x = t^2$, en déduire que

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 2$$

106**Deux calculs**

En intégrant par parties, calculer

$$A = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 x(\text{Arctan } x)^2 dx$$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 x(\text{Arctan } x)^2 dx = \frac{1}{6} - \frac{\pi^2}{24}$$

IPP**107****Une petite IPP**

seul

Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto xe^{-x}$

- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $\int_a^b f(t) dt$.
- Donner une primitive de f .
- Donner la primitive de f qui s'annule en 0.

108**Dérivons !**

- Vérifier que $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur \mathbb{R} .
- Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

109 Une intégrale classique

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Trouver une relation entre $I(p, q)$ et $I(p-1, q+1)$.
2. En déduire $I(p, q)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

110 Wallis, 1^{ère} version

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{2n} en fonction de n .
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de u_{2n+1} en fonction de n .

111 Wallis, 2^{ème} version

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Lorsque $n \geq 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} .
En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1} .

112 Primitives à l'aide d'une IPP

En intégrant par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) \quad g : x \mapsto (\ln x)^2 \quad h : x \mapsto \sin(\ln x)$$

113 Une primitive de Arcsin

Déterminer une primitive sur $] -1, 1[$ de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$. Et sur $[-1, 1]$?

114 L'exponentielle comme limite d'une somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$$

Fixons $a \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(a)$ et $I_n(a)$.
2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$$

3. On montrera dans le chapitre « Intégration » qu'il existe $K_a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I_n(a)| \leq K_a \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$ existe et la déterminer.

Quelle belle égalité a-t-on démontrée dans cet exercice ?

Changement de variable et fonctions trigonométriques

115 Avec du cosinus et du sinus

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$.

- Calculer $I + J$.
- À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $I = J$ et en déduire leur valeur commune.
- Donner, sans faire de calcul de primitive, la valeur de $K = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$.

116 Exponentielle et sinus

Soit $I = \int_0^{\pi} e^t \sin t \, dt$ et $K = \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t \, dt$

- À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$.
- À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $K = e^{-\pi} I$.

117 Astucieux!

Calculer $I = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1+x^4}{1+x^2} \right) \sqrt[3]{\sin x^3} \sin(\sqrt{1-x^2}) \, dx$.

118 Parité...

Calculer $I = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^4} \, dx$.

119 Changement de variable (1)

En posant le changement de variable $x = \cos t$, calculer $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$.

120 Changement de variable (2) difficile

- En utilisant le changement de variable $\theta \mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, déterminer une primitive sur $]-\pi, \pi[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{2 + \cos x}$.
- Donner une primitive sur \mathbb{R} de f . On s'aidera de la primitive trouvée à la question précédente. On déterminera son ensemble de définition, puis, on donnera une expression d'une primitive sur \mathbb{R} utilisant la fonction partie entière.

121 Changement de variable (3)

Calculer $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$. On utilisera une symétrie pour réduire le domaine d'intégration. Puis, on posera $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

122 Changement de variable (4)

Soit $a > 0$. En utilisant le changement de variable $y = \sqrt{e^t - 1}$ que l'on justifiera, calculer :

$$L = \int_1^a \frac{e^t}{(3 + e^t)\sqrt{e^t - 1}} \, dt$$

123 L'exo de khôlle!

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que

$$\int_a^b x f(x) \, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \, dx$$

Faire ses gammes

124 Primitives

Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, les primitives des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto xe^{-2x^2}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f_6 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$$

$$f_7 : x \mapsto \cos x \sin^5 x$$

$$f_8 : x \mapsto \sin^5 x$$

$$f_9 : x \mapsto \tan^2(x)$$

$$f_{10} : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^4}$$

$$f_{11} : x \mapsto \frac{1}{\tan x}$$

$$f_{12} : x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$$

$$f_{13} : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$$

$$f_{14} : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan x}}$$

$$f_{15} : x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

$$f_{16} : x \mapsto \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$$f_{17} : x \mapsto e^{e^x+x}$$

$$f_{18} : x \mapsto \frac{1}{x + x(\ln x)^2}$$

$$f_{19} : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

$$f_{20} : x \mapsto e^{-x} \sin(2x)$$

$$f_{21} : x \mapsto \operatorname{sh} x \sin x.$$

125 IPP

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 t^2 e^t dt$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{(x+1)^2} dx$$

$$I_2 = \int_1^e t^2 \ln t dt$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$$

$$I_8 = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(x)^2 dx$$

$$I_3 = \int_0^\pi t \sin(3t) dt$$

$$I_6 = \int_0^1 t^3 e^{t^2} dt$$

$$I_9 = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Arctan}(x) dx$$

126 Changement de variables

À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$$

$$I_6 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 xe^{\sqrt{x}} dx$$

$$I_7 = \int_{1/3}^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$$

$$I_{12} = \int_{1/4}^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} dx$$

$$I_3 = \int_2^3 \frac{t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$I_8 = \int_1^2 (\ln x)^2 dx$$

$$I_{13} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1} dx$$

$$I_{14} = \int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2} dt.$$

$$I_5 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$I_{10} = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

127 Dérivation d'intégrales à bornes variables

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 et exprimer leurs dérivées.

$$\Psi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$$

$$\Psi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_0^x x f(t) dt$$

$$\Psi_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_0^x f(t+x) dt$$

$$\Psi_4 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_\pi^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} dt$$

Primitives

corrigés

Notons f la fonction de l'énoncé, à savoir $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$.

Posons $u : t \mapsto \ln t$.

La fonction f s'écrit donc $t \mapsto \frac{u'(t)}{u(t)}$.

Ainsi, une primitive de f est $t \mapsto \ln |u(t)|$.

Sur $]1, +\infty[$, une primitive de f est donc $t \mapsto \ln(\ln t)$.

1. On a

$$f_0 : t \mapsto 1 \qquad f_1 : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \qquad f_2 : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

Une primitive de f_0 est $t \mapsto t$. Donc la primitive de f_0 qui s'annule en 0 est $F_0 : t \mapsto t$.

Une primitive de f_1 est $t \mapsto \operatorname{Arctan} t$.

Donc la primitive de f_1 qui s'annule en 0 est $F_1 : t \mapsto \operatorname{Arctan} t$.

La fonction f_2 est continue sur \mathbb{R} .

La primitive de f_2 qui s'annule en 0 est $F_2 : x \mapsto \int_0^x f_2(t) dt$ d'après le théorème fondamental de l'Analyse.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et calculons cette intégrale. En remarquant que

$$f_2(t) = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}$$

on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^x \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \times \frac{t}{2} dt \\ &= \operatorname{Arctan}(x) + \left[\frac{1}{1+t^2} \times \frac{t}{2} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x) + \frac{x}{2(1+x^2)}. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_0^x \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \times \frac{t}{2n} dt \\ &= F_n(x) + \left[\frac{1}{(1+t^2)^n} \times \frac{t}{2n} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \times \frac{1}{2n} dt \\ &= \frac{2n-1}{2n} F_n(x) + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'expression de F_2 et la question précédente, on trouve :

$$F_3(x) = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \operatorname{Arctan}(x).$$

- On a :

$$I = \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 \right) dt = \left[2\sqrt{t} - t \right]_1^4 = -1$$

- On a :

$$J = \int_1^2 \underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{\text{du type } \frac{u'}{u}} dx = \left[\ln|1+e^x| \right]_1^2 \stackrel{\text{WHY}}{=} \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right)$$

- On a :

$$K = \int_1^e \underbrace{\frac{(\ln x)^n}{x}}_{\text{du type } u'u^n} dx = \left[\frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e = \frac{1}{n+1}$$

- On a

$$L = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int_0^1 \frac{1}{3} \underbrace{\frac{3x^2}{1+(x^3)^2}}_{\text{du type } \frac{u'}{1+u^2}} dx = \left[\frac{1}{3} \text{Arctan}(x^3) \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

1. On peut remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{t(1+t^4)} = \frac{t^3}{t^4(1+t^4)} = t^3 \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{1+t^4} \right).$$

Posons $u : t \mapsto t^4$. Il s'agit d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $u'(t) = 4t^3$ pour tout $t > 0$. La fonction $s \mapsto \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}$ étant continue sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$\begin{aligned} \int_{1/x}^x \frac{dt}{t(1+t^4)} &= \int_{1/x}^x \frac{u'(t)}{4} \left(\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{1+u(t)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln(t^4) - \ln(1+t^4) \right]_{1/x}^x \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{x^4}{1+x^4} \right) - \ln \left(\frac{\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{x^4}{1+x^4} \right) - \ln \left(\frac{1}{1+x^4} \right) \right) = \ln x. \end{aligned}$$

2. Notons G une primitive de $g : t \mapsto \frac{1}{t(1+t^4)}$ sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* .

On a pour tout $x > 0$, $f(x) = G(x) - G(1/x)$ donc f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* f'(x) = \frac{1}{x(1+x^4)} + \frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x^4})} = \frac{1}{x(1+x^4)} + \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{x}.$$

De plus, $f(1) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* f(x) = \ln(x)$.

Considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto xe^{-x}$

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $\int_a^b f(t)dt$.

On trouve, après une intégration par parties avec des fonctions de classe \mathcal{C}^1 :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[-e^{-t}(1+t) \right]_a^b = -e^{-b}(1+b) + e^{-a}(1+a)$$

2. Une primitive de f est $x \mapsto \int_{-1}^x f(t)dt = -e^{-x}(1+x)$

Remarque intéressante.

Cela vaut le coup de vérifier au brouillon que la dérivée de $x \mapsto -e^{-x}(1+x)$ est $x \mapsto xe^{-x}$.
Allons-y, dérivons (un produit) :

$$-(-e^{-x}) \times (1+x) + (-e^{-x}) \times 1 = e^{-x}(1+x) - e^{-x} = xe^{-x}$$

3. La primitive de f qui s'annule en 0 est $x \mapsto \int_0^x f(t)dt = -e^{-x}(1+x) + 1$

1. Montrons que la fonction $F : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie sur \mathbb{R} , puis dérivable sur \mathbb{R} de dérivée la fonction proposée.

— Soit $x \in \mathbb{R}$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée :

$$|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$$

et donc $0 \leq x + |x| < x + \sqrt{x^2 + 1}$. Ainsi, $F(x)$ existe.

— On sait que $\begin{cases} x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans }]0, +\infty[\\ t \mapsto \ln t \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\end{cases}$

Par composition, la fonction $F : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Ainsi, F est une primitive de la fonction proposée dans l'énoncé.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Considérons les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \sqrt{t^2 + 1}$.

Elles sont évidemment de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $u' : t \mapsto 1$ et $v' : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

Ainsi, une intégration par parties fournit :

$$\int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt = \left[t \sqrt{t^2 + 1} \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt.$$

Prenons l'intégrale de droite. Après un jeu d'écriture, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt &= \int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\ &= \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \end{aligned}$$

En utilisant les deux égalités précédentes, on a donc

$$\int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt = \left[t \sqrt{t^2 + 1} \right]_0^x - \left(\int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \right)$$

D'où

$$2 \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt = \left[t \sqrt{t^2 + 1} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

Bilan. Une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)$$

1. Les fonctions $u : x \mapsto -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}$ et $v : x \mapsto x^p$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $u' : x \mapsto (1-x)^q$ et $v' : x \mapsto px^{p-1}$.

Par intégration par parties, on a donc :

$$I_{p,q} = \left[-\frac{1}{q+1} x^p (1-x)^{q+1} \right]_0^1 + \frac{p}{q+1} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q+1} dx.$$

La quantité $\left[-\frac{1}{q+1} x^p (1-x)^{q+1} \right]_0^1$ est nulle car $p > 0$ et $q+1 > 0$. D'où

$$I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a, en itérant un nombre fini de fois la formule :

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \frac{p}{q+1} \frac{p-1}{q+2} \cdots \frac{1}{q+p} I_{0,p+q} \\ &= \frac{p! q!}{(p+q)!} I_{0,p+q} \end{aligned}$$

- Il faut savoir rédiger une récurrence sur p en notant $\mathcal{H}_p : \langle \forall q \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p! q!}{(p+q)!} I_{0,p+q} \rangle$.
- On peut faire une autre preuve, en admettant pour l'instant que $I(p,q) \neq 0$. On verra cela plus tard dans le chapitre intégration.

D'après la question précédente, on a en posant $A = \{(k, \ell) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \mathbb{N} \mid k + \ell = p + q\}$:

$$\forall (k, \ell) \in A, \quad \frac{I_{k,\ell}}{I_{k-1,\ell+1}} = \frac{k}{\ell+1}$$

Par produit pour $(k, \ell) \in A$, on en déduit par télescopage :

$$\frac{I_{p,q}}{I_{0,p+q}} = \prod_{(k,\ell) \in A} \frac{k}{\ell+1}$$

Le produit de droite vaut $\prod_{k=1}^p \frac{k}{(p+q-k)+1}$, c'est-à-dire

$$\prod_{k=1}^p \frac{k}{(p+q-k)+1} = \frac{\prod_{k=1}^p k}{\prod_{j=q+1}^{p+q} j} = \frac{p! q!}{(p+q)!}$$

Par ailleurs, on a $I_{0,p+q} = \frac{1}{p+q+1}$ (WHY ?).

Bilan :

$$I_{p,q} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties avec $\begin{cases} u : t \mapsto \sin t \\ v : t \mapsto (\cos t)^{n+1} \end{cases}$ qui sont \mathcal{C}^1

On obtient

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \times \cos t \, dt \\ &= \left[\sin t (\cos t)^{n+1} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t \times (n+1)(-1)(\sin t)(\cos t)^n \, dt \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin t)^2}_{1-\cos^2 t} (\cos t)^n \, dt \\ &= (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \, dt \right) \\ &= (n+1)(u_n - u_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$

Autre solution.

On peut aussi écrire

$$u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t} \, dt$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$u_{n+2} = u_n - \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \sin^2 t \, dt$$

Dans l'intégrale de droite, la fonction intégrée est encore égale à $\sin t \cos^n t \times \sin t$.

$$u_{n+2} = u_n - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^n t \times \sin t \, dt$$

Effectuons une intégration par parties pour calculer l'intégrale de droite en posant $\begin{cases} u : t \mapsto \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} t \\ v : t \mapsto \sin t \end{cases}$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin t \cos^n t}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin t}_{v(t)} \, dt &= \left[\frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} t \times \sin t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} t \times \cos t \, dt \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \, dt \\ &= \frac{1}{n+1} u_{n+2} \end{aligned}$$

Résumons. On a l'égalité

$$u_{n+2} = u_n - \frac{1}{n+1} u_{n+2}$$

D'où

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_{n+2} = u_n$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u_{2k} = \frac{2k-1}{2k} u_{2k-2}$$

Or $\forall i, u_i \neq 0$ (WHY? Il faut attendre le chapitre Intégration pour la justification). D'où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{u_{2k}}{u_{2k-2}} = \frac{2k-1}{2k}$$

Par produit pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a par télescopie :

$$\frac{u_{2n}}{u_0} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

Le membre gauche vaut $\frac{u_{2n}}{\frac{\pi}{2}}$. Le membre droit vaut $\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

BILAN :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{ou encore} \quad u_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{\pi}{2}$$

3. D'après la question 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$$

D'où, en multipliant par u_{n+1} :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_nu_{n+1}$$

La suite $\left((n+1)u_nu_{n+1}\right)$ est donc constante. Son premier terme vaut $(0+1)u_0u_1 = \frac{\pi}{2}$.

BILAN

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, on a $(2n+1)u_{2n}u_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

En remplaçant u_{2n} par l'expression précédente, on trouve

$$u_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

1. On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

2. Soit $n \geq 2$.

Les fonctions $u : x \mapsto -\cos x$ et $v : x \mapsto \sin^{n-1} x$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et :

$$u' : x \mapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto (n-1) \cos(x) \sin^{n-2}(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin x}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^{n-1}(x)}_{v(x)} dx \\ &= \left[-\cos(x) \sin^{n-1}(x) \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 2$, on a $-\cos(0) \sin^{n-1}(0) = 0$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) \sin^{n-1}(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

En multipliant par I_{n-1} , on a :

$$nI_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}.$$

On en déduit que la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

Or $1 \times I_1 \times I_0 = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{(2p)(2p-2) \cdots 2} I_0.$$

Par ailleurs,

$$(2p)(2p-2) \cdots 2 = 2^p p(p-1) \cdots 1 = 2^p p!$$

Pour le produit des impairs, il est classique de multiplier et diviser par le produit des pairs, pour obtenir :

$$(2p-1)(2p-3) \cdots 1 = \frac{(2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times (2p-3) \times \cdots \times 2 \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2} = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

$$\text{Ainsi } I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Avec la relation $(2p+1)I_{2p+1}I_{2p} = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$I_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1) I_{2p}} \frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

Les fonctions proposées sont continues sur leur ensemble de définition.

On utilise dans chacun des cas le théorème fondamental de l'Analyse.

- Une primitive de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ est donnée par $x \mapsto \int_0^x \operatorname{Arctan} t \, dt$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et calculons $\int_0^x \operatorname{Arctan} t \, dt$ en effectuant une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \operatorname{Arctan} t \end{cases}$ qui sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

On a

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{Arctan} t \, dt &= \left[t \times \operatorname{Arctan} t \right]_0^x - \int_0^x t \times \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^x \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

BILAN : Une primitive de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ est $F : x \mapsto x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Je vous invite à dériver la fonction donnée pour voir si l'on retombe bien sur l'arctangente !

- Une primitive de $g : x \mapsto (\ln x)^2$ est donnée par $x \mapsto \int_1^x (\ln t)^2 \, dt$.

Fixons $x \in]0, +\infty[$ et calculons $\int_1^x (\ln t)^2 \, dt$ en effectuant une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto (\ln t)^2 \end{cases}$ qui sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

On a

$$\begin{aligned} \int_1^x (\ln t)^2 \, dt &= \left[t \times (\ln t)^2 \right]_1^x - \int_1^x t \times 2 \frac{1}{t} \ln t \, dt \\ &= \dots - 2 \left[t \ln t - t \right]_1^x \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) - 2 \end{aligned}$$

BILAN : Une primitive de $g : x \mapsto (\ln x)^2$ est $G : x \mapsto x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) - 2$.

Je vous invite à dériver la fonction donnée pour voir si l'on retombe bien sur le logarithme au carré

- Une primitive de $h : x \mapsto \sin(\ln x)$ est donnée par $x \mapsto \int_1^x \sin(\ln t) \, dt$.

Fixons $x \in]0, +\infty[$ et calculons $\int_1^x \sin(\ln t) \, dt$ en effectuant une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \sin(\ln t) \end{cases}$ qui sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

On a

$$\begin{aligned} \int_1^x \sin(\ln t) \, dt &= \left[t \times \sin(\ln t) \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \cos(\ln t) \, dt \\ &= \dots - \int_1^x \cos(\ln t) \, dt \end{aligned}$$

Effectuons à nouveau une intégration par parties sur l'intégrale de droite. On a

$$\begin{aligned} \int_1^x \cos(\ln t) \, dt &= \left[t \times \cos(\ln t) \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{-1}{t} \sin(\ln t) \, dt \\ &= \dots + \int_1^x \sin(\ln t) \, dt \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_1^x \sin(\ln t) \, dt = \left[t \times \sin(\ln t) \right]_1^x - \left[t \times \cos(\ln t) \right]_1^x - \int_1^x \sin(\ln t) \, dt$$

D'où

$$\int_1^x \sin(\ln t) dt = \frac{1}{2} \left[t(\sin(\ln t) - \cos(\ln t)) \right]_1^x$$

BILAN : Une primitive de $h : x \mapsto \sin(\ln x)$ est $H : x \mapsto \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$.

Je vous invite à dériver la fonction donnée pour voir si l'on retombe bien sur le sinus du log.

D'après le théorème fondamental de l'Analyse, une primitive est

$$x \mapsto \int_0^x \operatorname{Arcsin} t \, dt$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Calculons $\int_0^x \operatorname{Arcsin} t \, dt$.

Procédons par intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \operatorname{Arcsin} t$.

Ces fonction sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, 1[$.

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{Arcsin} t \, dt &= [t \operatorname{Arcsin} t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \\ &= x \operatorname{Arcsin} x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \\ &= x \operatorname{Arcsin} x + \left[\sqrt{1-t^2} \right]_0^x \\ &= x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} - 1. \end{aligned}$$

Bilan. Une primitive sur $]-1, 1[$ de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ est donc :

$$F : x \mapsto x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}.$$

Primitive sur $[-1, 1]$.

On pose $\Phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$.

Cette fonction est

- continue sur $[-1, 1]$
- dérivable sur $]-1, 1[$ et $\Phi' : x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$
- $\Phi'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$ et $\Phi'(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que Φ est dérivable en -1 et 1 et l'on a

$$\Phi' : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

D'où $\Phi' = \operatorname{Arcsin}$.

BILAN : Φ est dérivable sur $[-1, 1]$ et $\Phi' = \operatorname{Arcsin}$.

Remarque. La technique de calcul utilisée (qui nécessite une fonction de classe \mathcal{C}^1) ne nous a permis d'en faire le calcul que sur $]-1, 1[$.

Or d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction Arcsin étant continue sur $[-1, 1]$, elle admet une primitive sur $[-1, 1]$.

Si l'on note Φ la primitive de Arcsin sur $[-1, 1]$ (intervalle fermé) valant 1 en 0 .

Cette primitive coïncide sur $]-1, 1[$ (intervalle ouvert) avec la primitive trouvée précédemment (qui vaut bien 1 en 0) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \Phi(x) = F(x).$$

La fonction Φ est dérivable sur $[-1, 1]$ (en tant que primitive sur $[-1, 1]$ d'une fonction, à savoir Arcsin), donc est a fortiori continue sur $[-1, 1]$.

Par ailleurs, la fonction F , a priori définie sur $]-1, 1[$, est prolongeable par continuité sur $[-1, 1]$, et le prolongement est $\tilde{F} : x \mapsto x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$.

On en déduit que Φ et \tilde{F} coïncident sur $[-1, 1]$ (intervalle fermé).

Autrement dit :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \Phi(x) = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}.$$

1. On pose $\begin{cases} u : t \mapsto -e^{-t} \\ v : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$ qui sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Avec une intégration par parties, on a :

$$\int_0^a \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} dt = \left[(-e^{-t}) \times \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^a - \int_0^a -(e^{-t}) \times \frac{t^n}{n!} dt$$

D'où

$$I_{n+1}(a) = I_n(a) + \frac{-1}{(n+1)!} e^{-a} a^{n+1}$$

2. Nous n'allons pas faire de récurrence (on pourrait).
Fixons donc $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad I_{k+1}(a) - I_k(a) = \frac{-1}{(k+1)!} e^{-a} a^{k+1}$$

Par somme et télescopie, on obtient

$$I_n(a) - I_0(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{(k+1)!} e^{-a} a^{k+1}$$

D'où

$$I_n(a) - (1 - e^{-a}) = \sum_{j=1}^n \frac{-1}{j!} e^{-a} a^j$$

D'où

$$I_n(a) = 1 - e^{-a} - e^{-a} \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}$$

$$I_n(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$$

3. • On montrera dans le chapitre « Intégration » qu'il existe $K_a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I_n(a)| \leq K_a \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme $|a|^n = o(n!)$, on en déduit que $K_a \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $I_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- En multipliant par e^a l'égalité obtenue à la question 2, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = e^a - e^a I_n(a)$$

Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de $\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$ existe et vaut e^a .

- Dans cet exercice, on a démontré la belle égalité :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad e^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$$

ce qui s'écrira plus tard dans le chapitre « Séries »

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$$

1. Par linéarité :

$$I + J = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

2. En posant le changement de variable affine $x = \frac{\pi}{2} - t$ qui fait intervenir la fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \\ &= \int_{\pi/2}^0 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - t \right) (-1) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= J. \end{aligned}$$

Par conséquent, $I = J = \frac{\pi}{4}$.

3. On a $K = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2x) dx$ (WHY?).

Le changement de variable affine (ici linéaire!) $x = \frac{t}{2}$, codé par la fonction $t \mapsto \frac{t}{2}$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , donne :

$$K = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt$$

Puis

$$K = \frac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t dt \right) = \frac{1}{8} (I + J)$$

En effet, l'intégrale de droite vaut après changement de variable :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \left(s + \frac{\pi}{2} \right) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s ds = J$$

Bilan :

$$K = \frac{1}{8} (I + J) = \frac{\pi}{16}$$

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \left(\frac{1+x^4}{1+x^2} \right) \sqrt[3]{\sin x^3} \sin(\sqrt{1-x^2})$.

Cette fonction est correctement définie et continue sur $[-1, 1]$ et donc sur $[-\pi/8, \pi/8]$.

Elle est de plus impaire.

Le changement de variable $x = -t$ fournit :

$$I = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(x) dx = \int_{\pi/8}^{-\pi/8} f(-t)(-1) dt = \int_{\pi/8}^{-\pi/8} f(t) dt = - \int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(t) dt = -I.$$

Ainsi, $I = 0$.

La fonction à intégrer est paire et continue sur $[-1, 1]$, donc (WHY, ce n'est pas évident) :

$$I = \int_{-1}^1 |x| \sqrt{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$$

Or

$$\int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \right]_0^1.$$

On en déduit que $I = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

La fonction cosinus étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , le changement de variable $x = \cos t$ donne :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} (-\sin t) dt.$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad 1 + \cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2}$$

et donc

$$\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} \sin t = \left| \tan \frac{t}{2} \right| \sin t \stackrel{\text{WHY}}{=} \left(\tan \frac{t}{2} \right) 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = 2 \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos t$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t) dt = [t - \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Autre solution. Au lieu de manipuler les formules de trigo dans tous les sens, Luigi me dit que l'on peut remplacer $\sin t$ par $\sqrt{1 - \cos^2 t}$ (car $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$) après le premier changement de variable. Et du coup, on tombe tout de suite sur la dernière intégrale.

Autre solution.

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \left[\text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

1. Une primitive de f est donnée par

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{2 + \cos t} dt$$

En utilisant le fait que $\cos t = \frac{1 - \tan(\frac{t}{2})^2}{1 + \tan(\frac{t}{2})^2}$, on a

$$\frac{1}{2 + \cos t} = \frac{1 + \tan(\frac{t}{2})^2}{3 + \tan(\frac{t}{2})^2}$$

Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On a :

$$\int_0^x \frac{1}{2 + \cos t} dt = \int_0^x \frac{1 + \tan(\frac{t}{2})^2}{3 + \tan(\frac{t}{2})^2} dt$$

En considérant le changement de variable $t \mapsto \tan(\frac{t}{2})^2$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , la dernière intégrale vaut :

$$\int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{2}{3 + u^2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{\tan(\frac{x}{2})}.$$

Bilan. Une primitive de f sur $]-\pi, \pi[$ est la fonction :

$$F : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

2. La fonction f étant continue sur \mathbb{R} , elle admet des primitives.

Notons G l'unique primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.

Posons également F la fonction

$$F : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \quad \text{qui est définie sur } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$$

Les fonctions F et G ont des dérivées qui coïncident sur les I_k , donc il existe une constante c_k telle que $G = F + c_k$ sur I_k .

Déterminons la constante c_k . Notons a_k et b_k les bornes inférieure et supérieure de I_k .

Comme $G(0) = 0$ (définition de G) et $F(0) = 0$ (calcul), on en déduit $c_0 = 0$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{a_k^+} F = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \lim_{b_k^-} F = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

L'égalité $G = F + c_k$ sur I_k fournit

$$G(a_k) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k \quad \text{et} \quad G(b_k) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k$$

Comme G est définie sur \mathbb{R} et que $b_k = a_{k+1}$, on a $G(b_k) = G(a_{k+1})$.

Ainsi,

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}$$

D'où $c_{k+1} = c_k + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Or $c_0 = 0$. On en déduit (récurrence sur \mathbb{N} , puis extension à \mathbb{Z}) que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} k$$

En résumé :

$$G : x \mapsto \begin{cases} F(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} k & \text{si } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} k & \text{si } x \text{ s'écrit } \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Cherchons une expression sans disjonction de cas et sans utiliser l'indice k de l'intervalle I_k .
Pour cela, cherchons qui est k par rapport à x .

On a les équivalences :

$$x \in I_k \iff 2\pi k < x + \pi < 2\pi(k+1) \iff k < \frac{x + \pi}{2\pi} < k + 1$$

Ainsi, lorsque $x \in I_k$, alors $k = \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor$.

Bilan :

$$G : x \mapsto F(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor$$

Remarque. Si vous demandez à votre logiciel préféré (moi, c'est GeoGebra) de tracer cette fonction, vous devez trouver une fonction continue, qui coïncide avec F sur $]-\pi, \pi[$.

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}$. On a $f(\pi - x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

Par linéarité de l'intégrale, puis changement de variable affine $t \mapsto \pi - t$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi f(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^0 f(\pi - t)(-1) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x} dx. \end{aligned}$$

Or on a :

$$\frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 + \frac{2T}{1+T^2}} = \frac{1}{(1+T)^2} (1+T^2) \quad \text{où } T = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

D'où

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) dx$$

Avec le changement de variable $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , l'intégrale précédente vaut $\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt$,

c'est-à-dire $\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, on a $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin x} dx = 1$.

Effectuons le changement de variable $y = \sqrt{e^t - 1}$ qui est \mathcal{C}^1 .

Plus précisément, la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et on a $\varphi' : t \mapsto \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}}$.

Ainsi

$$L = \int_1^a \frac{1}{3 + e^t} \frac{e^t}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^a-1}} \frac{1}{3 + (y^2 + 1)} 2dy = 2 \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^a-1}} \frac{1}{y^2 + 2^2} dy = 2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{2} \right) \right]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^a-1}}$$

La dernière égalité utilise le fait qu'une primitive de $y \mapsto \frac{1}{y^2 + 2^2}$ est $y \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{2} \right)$ (il suffit de dériver pour justifier cela).

D'où

$$L = \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{e^a - 1}}{2} \right) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{e - 1}}{2} \right).$$

En utilisant le changement de variable $\varphi : t \mapsto a + b - t$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)(-1)dt$$

On utilise ensuite le signe -1 pour permuter les bornes de l'intégrale, et on utilise aussi l'égalité de l'énoncé :

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (a+b-t) \underbrace{f(a+b-t)}_{\stackrel{\text{hyp}}{=} f(t)} dt$$

En développant le membre droit, on trouve

$$\int_a^b xf(x)dx = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt$$

On obtient donc

$$2 \int_a^b xf(x)dx = (a+b) \int_a^b f(t)dt$$

D'où le résultat.