Limites & Continuité

exercices

Limites

101 La routine !

Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes.

(i) $\dfrac{x\sin(x^2)}{1+x^2}$ en $+\infty$

(ii) $\cos(x^2)$ en $+\infty$

(iii) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ en $+\infty$

(iv) $(\ln x+\cos x)^2$ en $+\infty$

(v) $x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en $+\infty$

(vi) $x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0

(vii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

(viii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0

(ix) $\dfrac{x^2+\sin x}{1+x^2}$ en $+\infty$

(x) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$

(xi) $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

(xii) $\dfrac{\cos(\mathrm{e}^x)+2\sin(2\mathrm{e}^{-x})+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ en $-\infty$

(xiii) $\frac{\sqrt{|x^3-3x+2|}}{2x^2-x-1}$ en 1

(xiv) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$

(xv) $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ en $+\infty$

(xvi) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ en 1

(xvii) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1

(xviii) $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$

(xix) $\ln x\ln(\ln x)$ en 1

(xx) $\dfrac{1-x}{\operatorname{Arccos} x}$ en 1

102 Un peu de partie entière

Considérons la fonction $f : x\mapsto \frac{1}{x}-\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Dessiner le graphe de f sur $]0,+\infty[$.
Montrer que f admet une limite en $+\infty$, mais que f n'admet pas de limite en 0.

103 Encore de la partie entière

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes.

(i) $x\mapsto \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

(ii) $x\mapsto x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

(iii) $x\mapsto x^2\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

104 Fonction périodique qui CV en $+\infty$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique (avec $T>0$ bien sûr) ayant une limite finie ℓ en $+\infty$.
Que dire de f ?

105 Immédiat, si on s'y prend bien !

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante.
Montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

106 Limite à droite des fonctions croissantes

Soit $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ tel que $a<b$ et $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.
Montrer que la fonction $\Gamma : \begin{array}{rcl}]a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)\end{array}$ est bien définie et croissante.

Un peu de continuité

107 Fonctions usuelles

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

(i) $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

(ii) $f : x \mapsto \sin(\pi x)\lfloor x \rfloor$

108 Une implication

Montrer avec la définition espilonesque que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer (sans epsilon si possible) que

$$f \text{ continue en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad |f| \text{ continue en } x_0$$

Quid de la réciproque ?

109 Fonction lipschitzienne

Soit $k \in]0, +\infty[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, c'est-à-dire une fonction vérifiant :

$$\forall\, x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Montrer que f est continue sur I : fournir une preuve directe, et une preuve epsilonesque.

110 Sup & Inf

Soit f, g deux fonctions continues sur I.
On définit $\sup(f, g) : x \mapsto \sup\{f(x), g(x)\}$. « Idem » pour $\inf(f, g)$.
Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues sur I.

111 Indicatrice de $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

En utilisant la caractérisation séquentielle, montrer que f est discontinue en tout point.

112 Prolongements par continuité

Déterminer le domaine de définition, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x - 1}$

(iii) $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

(iv) $x \mapsto \dfrac{(x^2 - 1)^2}{|x - 1|}$

(v) $x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$

(vi) $x \mapsto \cos(x)\cos(1/x)$

113 Condition suffisante de continuité

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
Montrer que si f est croissante et $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante, alors f est continue.

Utiliser le théorème de la limite monotone à f, puis à g.

Équations fonctionnelles

114 De $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$: inégalités

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.
   On suppose que $\quad \forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$.
   (b) Montrer que l'on n'a pas nécessairement une inégalité stricte dans la question précédente.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall\, r < s \in \mathbb{Q},\ f(r) < f(s)$.
   Montrer que f est strictement croissante.

115 L'exo le plus classique !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ f(n) = n f(1)$.
3. Montrer que $\forall\, r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r f(1)$: pour cela, établir $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(nx) = n f(x)$.
4. On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.
5. Reprendre cet exercice en supposant seulement f continue en un certain point $x_0 \in \mathbb{R}$.

116 Équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est une fonction constante.
Comment généraliser ce résultat si $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(ax+b) = f(x)$ pour $|a| \neq 1$?

117 Équation fonctionnelle (bis)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$.

1. Donner un exemple d'une fonction f non constante vérifiant les hypothèses.
2. On suppose de plus que f est continue. Montrer que f est constante.

pour $x_0 > 0$ fixé, montrer que $f(x_0) = f\left(x_0^{\frac{1}{2^n}}\right)$, puis exploiter la continuité en deux points bien choisis, puis conclure par parité.

118 Équation fonctionnelle (ter)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+1}{2}\right) \ = \ f(x)$$

Montrer que f est constante.

119 Une variation du 116

On cherche toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(2x) - f(x) = x$.

1. Soit f une telle fonction.
   Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}$$
2. Conclure.

Théorème des valeurs intermédiaires

120 Existence

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(a) - 2f(c) + f(b) = 0$.
2. Soit $p, q \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $p\,f(a) + q\,f(b) = (p+q)\,f(c)$.

121 Fastoche

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.
2. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

122 Équation

Montrer que l'équation $\cos x = \frac{1}{x}$ possède une infinité de solutions dans $]0, +\infty[$.

123 Fonctions dont les carrés sont égaux

Soit I un intervalle et $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \neq 0$ et $f(x)^2 = g(x)^2$.

1. Montrer que l'on a $f = g$ ou $f = -g$.
2. Montrer que ce résultat est faux dans chacun des cas suivants (faire uniquement des dessins)
   (a) f n'est pas continue ;
   (b) f s'annule sur I ;
   (c) I n'est pas un intervalle.

124 Une fonction non continue satisfaisant la propriété des valeurs intermédiaires

Soit $$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous réels $a < b$ et pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$.

125 ICI $\Longrightarrow$ stricte monotonie

Soit f une fonction **I**njective et **C**ontinue sur un **I**ntervalle I.
On souhaite prouver que f est strictement monotone.

1. Est-ce que l'hypothèse « intervalle » est importante ? Et l'hypothèse « continue » ?
2. Désormais, on suppose que

$$\exists\,(a_1, b_1) \in I^2, \ \begin{cases} a_1 < b_1 \\ f(a_1) \geqslant f(b_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \exists\,(a_2, b_2) \in I^2, \ \begin{cases} a_2 < b_2 \\ f(a_2) \leqslant f(b_2) \end{cases}$$

   et on pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\big((1-t)a_1 + ta_2\big) - f\big((1-t)b_1 + tb_2\big) \end{array}$$

   Montrer que φ est bien définie.
   Montrer que φ s'annule. Puis conclure.

126 Une fonction qui finira par qu'une seule valeur ! (exercice de Khôlle, juste pour le plaisir d'être collé !)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que

$$\forall\, x < x' \in [a,b], \quad \exists\, c \in [x, x'], \quad f(c) \in \Big\{ f(a), f(b) \Big\}$$

Montrer que f est constante.

127 **Point fixe (1)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f possède un unique point fixe.

128 **Point fixe (2)**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell < 1$.
Montrer que f admet un point fixe.

129 **Point fixe (3)**
Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive, ayant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f admet un point fixe.

130 **Fonction ayant des limites égales**
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} \ell$.
Montrer que f ne peut pas être injective.

131 **Théorème de la corde universelle de Paul Lévy (1886 – 1971)** lien Wikipédia
Le théorème de la corde universelle dit pour quelles valeurs de $\ell \in]0, 1[$ il existe une corde horizontale de longueur ℓ pour la courbe d'une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ telle que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
   Commencer par traiter les cas $n = 2$ et $n = 3$.
   On vient de démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une corde horizontale de longueur $\frac{1}{n}$.
2. On veut montrer que $\mathcal{C}_f$ n'admet pas nécessairement une corde horizontale de longueur ℓ si ℓ n'est pas l'inverse d'un entier. Soit $T \in]0, 1[$ qui n'est pas l'inverse d'un entier. Montrer qu'il existe une fonction g périodique continue de période T telles que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Montrer qu'en posant $f : x \mapsto g(x) - x$, alors f vérifie les conditions du théorème mais n'a pas de corde horizontale.

132 **Tout intervalle dont les bornes sont dans l'image est l'image d'un intervalle !**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\alpha < \beta$ dans l'image de f.
Montrer qu'il existe $a < b$ tel que $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

Théorème des bornes atteintes

133 **Composition avec une fonction bornée**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

134 **Théorème des bornes « non atteintes » !**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer que f est bornée.

135 **Avec une limite en l'infini**
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée (utilisez les mots « voisinage » et « segment »).
2. Atteint-elle ses bornes ? Donner des exemples.
3. Peut-on dire la même chose si on remplace $[0, +\infty[$ par $]0, +\infty[$?

136 **Minimum**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Montrer que f admet un minimum.

137 Interversion des quantificateurs !

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\quad \forall x \in [a,b], \quad f(x) < g(x)$
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) < g(x) - \alpha$$

138 Fonctions coïncidant en un point : composée

Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux applications continues telles que $g \circ f = f \circ g$.
En particulier, l'image de ces deux applications est incluse dans $[0,1]$.
L'objectif de l'exercice est de montrer :

$$\heartsuit \qquad \exists\, c \in [0,1], \quad f(c) = g(c)$$

On commence par une question dans laquelle on note $f^{[n]}$ la fonction $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Idem pour g.

1. Dans cette question, on suppose la propriété $\triangle$ suivante

$$\triangle \qquad \exists\, b > 0, \quad \forall x \in [0,1], \quad f(x) \geqslant g(x) + b$$

   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad f^{[n]}(x) \geqslant g^{[n]}(x) + nb$$

   Puis mettre en évidence une absurdité.

2. Dans cette question, on souhaite montrer la propriété $\heartsuit$.
   En raisonnant par l'absurde, se ramener à la question 1, puis conclure.

139 Une deuxième preuve du résultat précédent

Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$.
On veut démontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = g(c)$.
Considérons l'ensemble des points fixes de f que l'on note F

$$F = \Big\{ x \in [0,1] \mid f(x) = x \Big\}$$

1. Montrer que f admet un point fixe.
2. Montrer que F admet une borne inférieure m et une borne supérieure M.
3. Montrer que m et M sont dans F.
4. Montrer que F est stable par g.
5. Que peut-on dire de $g(m) - m$ et $g(M) - M$?
6. Conclure.

140 Une troisième preuve

Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$.
On veut démontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = g(c)$.
On peut démontrer (comment ?) que f admet un point fixe $s \in [0,1]$.
On définit par récurrence une suite (u_n) par $u_0 = s$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est un point fixe de f.
2. On suppose que la suite (u_n) est monotone. Démontrer le résultat.
3. On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.
   (a) Démontrer qu'il existe $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $(f-g)(\alpha) \cdot (f-g)(\beta) \leqslant 0$.
   (b) Conclure.

141 Maximum

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $M(x) = \max\limits_{t \in [0,x]} f(t)$.
Démontrer que M est bien définie et continue.

Autres

142 Fonction continue surjective

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.
Montrer que f prend toute valeur une infinité de fois.

Raisonner par l'absurde et utiliser le TVI et théorème des bornes atteintes.

143 Fonction 1-périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(nx) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

1. Montrer que $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = 0$.
2. Montrer
$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$
Pour se donner des idées, on commencera par traiter le cas du couple $(1, 2)$.
3. En déduire que f est nulle.

144 Un exercice de khôlle

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continues telles que $f \circ f = \mathrm{id}_{[0,+\infty[}$.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 125.

145 Un autre exo de Khôlle

Soit f continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$.
Montrer $\forall a_0 \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R},\ f(a_0 + c) = f(c)$.

146 Un exo de l'X !

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall a < b \in \mathbb{R}, \quad f\big([a, b]\big) \text{ est un segment de longueur } b - a$$

Prouver d'abord qu'une telle fonction est continue, puis injective, puis utiliser l'exercice 125, puis conclure !

147 Défi

Trouver f bijective de $[0, 1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

148 Plus petite période et continuité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique, continue et non constante.
On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que :

- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)$
- ⋆ pour tout $\tau \in]0, T[$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x + \tau) \neq f(x)$.

On pose
$$\mathcal{P} \;=\; \Big\{\tau > 0 \;\big|\; \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + \tau) = f(x)\Big\}.$$

1. Justifier que $\mathcal{P}$ admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $T > 0$.
3. Démontrer que $T \in \mathcal{P}$.
4. Démontrer que $\mathcal{P} = T\mathbb{N}^*$.
5. Trouver une fonction non constante admettant tout rationnel pour période.

149 Suite de l'exo : somme de fonctions périodiques continues

Soit f_1 une fonction T_1-périodique où $T_1 > 0$. Idem pour f_2.

1. Montrer que si $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, alors $f_1 + f_2$ est périodique.

On suppose ici que f_1 et f_2 sont périodiques, continues et non constantes.
D'après l'exercice précédent, elles ont une plus petite période, notée T_1 et T_2.
On souhaite montrer l'implication :

$$f_1 + f_2 \text{ périodique} \implies \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}.$$

On suppose donc qu'il existe $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ (f_1 + f_2)(x + T) = (f_1 + f_2)(x)$.
On pose $\delta : x \mapsto f_1(x + T) - f_1(x) = -f_2(x + T) + f_2(x)$.
On veut montrer que $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$.

On admet un résultat difficile sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$ qui dit que, dans ce cas, $T_1\mathbb{Z} + T_2\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que δ est τ-périodique pour tout $\tau \in T_1\mathbb{N}^* + T_2\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que δ est ε-périodique pour tout $\varepsilon > 0$ (c'est ici, que l'on utilise vraiment $\dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$ et que l'on fait appel au résultat difficile sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$).
4. En déduire que δ est constante (on pourra s'aider de l'exercice précédent).
5. Montrer que cette constante vaut 0.
6. En déduire que $T \in T_1\mathbb{N}^* \cap T_2\mathbb{N}^*$.
7. Conclure.

150 **Promenade à vélo !**

Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes pendant lequel le cycliste a parcouru 5 km.

151 **Difficile ?**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

On pourra s'aider des variations de $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ pour comprendre ce qu'il se passe !

152 Une suite implicite

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction strictement croissante sur $[a, b[$ et vérifiant $f(a) \leqslant 0, \lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.
1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in [a, b[$.
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n).
3. Étudier la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite éventuelle.

153

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice du repère.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(f(x)) = x$.
2. Démontrer que si $\mathbf{C}$ n'est pas la première bissectrice du repère, alors f n'est pas croissante.
3. En déduire, si on suppose de plus que f est continue, qu'elle est strictement décroissante.
4. Donner un exemple de fonction non décroissante dont la courbe représentative $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice (sans être celle-ci).

154 Points de continuité

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{p+q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ \text{ avec } p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En quels points f est-elle continue ?

Khôlles

155

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ayant une limite en $-\infty$ et en $+\infty$, à savoir $+\infty$.
Montrer que f n'est pas injective.

156

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $|f| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.
Montrer que l'on n'a pas nécessairement $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ ou $f \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$.
Montrer que cela devient vrai si on suppose f continue.

157

Soit $a > 0$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant a|x - y|$.
Montrer que f est bijective.

158

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f$ admet un point fixe.
Montrer que f admet un point fixe.

159

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il est impossible que tout réel admette exactement deux antécédents par f.

160 Une belle limite

Pour tout réel x, pour tous entiers p et q, établir la formule

$$\lim_{p\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} [\cos(p!\pi x)]^{2q} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On pose $f_{p,q}(x) = [\cos(p!\pi x)]^{2q} = \left[\cos^2(p!\pi x)\right]^q$. Distinguons les cas.

— Premier cas. Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Alors on écrit $x = \frac{r}{s}$, avec $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $f_{p,q}(x) = \left[\cos^2\left(p!\pi \frac{r}{s}\right)\right]^q$.
Pour tout $p \geqslant s$, $\frac{p!}{s} \in \mathbb{N}$ donc $p!\pi\frac{r}{s} \in \pi\mathbb{Z}$ donc $\cos^2\left(p!\pi\frac{r}{s}\right) = 1$ puis $f_{p,q}(x) = 1$.
Ainsi,

$$\forall p \geqslant s, \quad \forall q \in \mathbb{N}, f_{p,q}(x) = 1$$

$$\forall p \geqslant s, \lim_{q\to+\infty} f_{p,q}(x) = 1 \text{ donc } \lim_{p\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} f_{p,q}(x) = 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$$

— Deuxième cas. Supposons que $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
On a toujours $0 \leqslant \cos^2(p!\pi x) \leqslant 1$.
- Si $\cos^2(p!\pi x) = 1$, alors $\sin(p!\pi x) = 0$ donc $p!x \in \mathbb{Z}$, i.e. $x \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde dans ce cas.
- Donc $0 \leqslant \cos^2(p!\pi x) < 1$ puis $\lim_{q\to+\infty}\left[\cos^2(p!\pi x)\right]^q = 0$ puis $\lim_{p\to+\infty}\lim_{q\to+\infty} f_{p,q}(x) = 0$.

Conclusion. Dans tous les cas, pour tout $x \in \mathbb{R}, \lim_{p\to+\infty}\lim_{q\to+\infty}[\cos(p!\pi x)]^{2q} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Limites & Continuité

corrigés

104

Montrons que f est constante égale à ℓ en montrant que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.
On a

$$\begin{cases} x + nT \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \\ f(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(x+nT) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Par T-périodicité de f, cette dernière limite se réécrit :

$$f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Ainsi, la *suite* constante égale à $f(x)$ converge vers ℓ.
Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = \ell$.

Deuxième rédaction : on élève un peu de le débat.
On a

$$\bigstar \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

Montrons que f est constante.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On fait intervenir la suite récurrente $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + T \end{cases}$
D'après $\bigstar$, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante égale à $f(x)$:

$$\clubsuit \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = f(x)$$

On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = x + nT$ avec $T > 0$).
Puis

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \\ f(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Par passage à la limite dans $\clubsuit$, on a $\ell = f(x)$.

105

Revenons à la définition et montrons que

$$\forall\, A \in \mathbb{R}, \quad \exists\, B \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \geqslant B, \quad f(x) \geqslant A$$

Soit $A \in \mathbb{R}$.
Posons $B = f^{-1}(A)$, licite car f est bijective.
Soit $x \geqslant B$.
Par croissance de f, on a $f(x) \geqslant f(B) = A$.

Autre solution pour souvenir, mais trop compliquée !

— Commençons par montrer que la fonction f n'est pas majorée, c'est-à-dire que

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > A.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme f est surjective, le réel $A + 1$ admet un antécédent, donc on peut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = A + 1$.
On a donc trouvé un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > A$.

— Comme la fonction f est croissante et non majorée, le théorème de la limite monotone donne directement (pour l'extrémité droite $+\infty$ de l'intervalle $\mathbb{R}$), que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

106

Rappel. Pour une fonction croissante $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, alors en tout point intérieur $c \in]a,b[$, la fonction admet une limite finie à gauche et à droite en c et on a

$$\lim_{\substack{t\to c\\ t<c}} f(t) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{\substack{t\to c\\ t>c}} f(t)$$

Revenons à l'exercice.

• Soit $x \in]a,b[$. Montrons que $\Gamma(x)$ est bien défini, c'est-à-dire montrons que $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)$ existe.

Cela résulte du théorème de la limite monotone.
Donc la fonction Γ est bien définie.
De plus, on a :

$$\bigstar \qquad \forall\, x \in]a,b[,\ f(x) \leqslant \Gamma(x)$$

• Montrons que Γ est croissante.
Fixons $x_1 < x_2$ deux éléments de $]a,b[$.
Montrons que $\Gamma(x_1) \leqslant \Gamma(x_2)$.
Comme on a $f(x_2) \leqslant \Gamma(x_2)$ d'après $\bigstar$, il suffit de montrer que $\Gamma(x_1) \leqslant f(x_2)$ pour obtenir par transitivité l'inégalité convoitée.
Prouvons donc que $\Gamma(x_1) \leqslant f(x_2)$. Par croissance de f, on a

$$\forall\, t \in]x_1, x_2], \quad f(t) \leqslant f(x_2)$$

Or $f(t) \xrightarrow[\substack{t\to x_1\\ t>x_1}]{} \Gamma(x_1)$.
Le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges entraîne que $\Gamma(x_1) \leqslant f(x_2)$.

109

Soit $a \in I$. Montrons que f est continue en a.
• Preuve directe avec les résultats du cours.
On a

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$$

Comme $k|x - a| \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on a d'après le théorème des Gendarmes $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

• Preuve en utilisant uniquement la définition.
Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I,\ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Posons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ (licite car $k \neq 0$). On a bien $\delta > 0$.
D'après l'énoncé, on a

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$$

A fortiori, on a

$$\forall x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$$

Et pour de tels x, on a $|x - a| \leqslant \delta$, d'où

$$\forall x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant k\,\delta = \varepsilon$$

111

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point $a \in \mathbb{R}$ en lequel f est continue.

— Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de rationnels telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

  Par continuité de f en a (c'est l'hypothèse du raisonnement par l'absurde), on a alors $f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

  En passant à la limite dans l'égalité $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = 1$, on obtient $f(a) = 1$.

— Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ d'irrationnels telle que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

  Avec un raisonnement analogue que dans le point précédent, on obtient $f(a) = 0$.

On a donc $f(a) = 1$ et $f(a) = 0$, d'où la contradiction.

113

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
On va montrer que f est continue en x_0.

— Comme f est croissante, le théorème de la limite monotone assure l'existence de limites par valeurs inférieures et supérieures

$$\ell^- = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \;\leqslant\; f(x_0) \;\leqslant\; \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell^+$$

— Montrons $\ell^- \geqslant \ell^+$: d'après ce qu'il précède, il s'ensuivra que $\ell^- = f(x_0) = \ell^+$.
Ces deux égalités prouveront la continuité de f en x_0.

Comme $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante, les limites suivantes existent et sont finies

$$g(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} \gamma^- \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} \gamma_+.$$

et on a $\gamma^- \geqslant g(x_0) \geqslant \gamma^+$.
Par définition, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, donc par opérations, on trouve

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} x_0\,\gamma^- \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} x_0\,\gamma^+$$

Par unicité de la limite pour la fonction f, on en déduit $\ell^- = x_0\gamma^-$ et $\ell^+ = x_0\gamma^+$.
Comme $\gamma^- \geqslant \gamma^+$, en multipliant par $x_0 \geqslant 0$, on obtient $\ell^- \geqslant \ell^+$.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
   On a

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

   De même $g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$.
   Comme $u_n \in \mathbb{Q}$, l'énoncé fournit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(u_n) < g(u_n)$$

   Par passage à la limite dans les inégalités larges (ici qui sont strictes !), c'est licite car les limites sont finies, on obtient $f(x) \leqslant g(x)$.

   (b) Prenons $f = 0$ et $g : x \mapsto |x - \sqrt{2}|$. La fonction g est la fonction « distance à $\sqrt{2}$ ».
   Comme on a $\forall\, x \neq \sqrt{2},\ f(x) < g(x)$, on a bien $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   Pourtant, en prenant $x = \sqrt{2}$, on a égalité.

2. Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) < f(y)$.
   On peut trouver deux rationnels $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $x < r < s < y$.
   Par ailleurs, on peut trouver deux suites de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers x et y et telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leqslant x \quad \text{et} \quad y \leqslant y_n$$

   On a donc par transitivité

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leqslant r < s \leqslant y_n$$

   D'après l'énoncé, appliqué trois fois, on a

$$♣ \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) < f(r) < f(s) < f(y_n)$$

   On a

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

   Par passage à la limite dans les inégalités de ♣, on obtient :

$$f(x) \leqslant f(r) < f(s) \leqslant f(y)$$

   D'où $f(x) < f(y)$.

115

Notons ♠ l'hypothèse $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. En appliquant ♠ à $x = 0$ et $y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, puis $f(0) = 0$.
   Montrons que f est impaire.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant ♠ à $y = -x$, on obtient
   $$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$
   Comme $f(0) = 0$, on a $0 = f(x) + f(-x)$.
   Bilan : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.
2. On montre d'abord $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$ par récurrence.
   Les fonctions f et $x \mapsto f(1)x$ sont impaires, et coïncident sur $\mathbb{N}$, donc elles coïncident sur $\mathbb{Z}$.
3. Soit $r \in \mathbb{Q}$ que l'on écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
   Montrons que $f(r) = rf(1)$, c'est-à-dire $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$, ou encore $qf(\frac{p}{q}) = pf(1)$.
   En exploitant l'indication avec $n = q$ et $x = \dfrac{p}{q}$, on a $qf(\frac{p}{q}) = f(p)$.
   En exploitant la question 2 avec $n = p$, on obtient $pf(1) = f(p)$.
4. On pose $a = f(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On peut trouver une suite de rationnels $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
   D'après la question précédente et le fait que $r_n \in \mathbb{Q}$, on a
   $$\bigstar \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = ar_n$$
   On a
   $$\begin{cases} r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$
   Par passage à la limite dans l'égalité $\bigstar$, on a
   $$f(x) = ax$$
5. On suppose f seulement continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé une fois pour toutes.
   Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$, en montrant que f est continue en tout point $x_1 \in \mathbb{R}$.
   Soit $x_1 \in \mathbb{R}$.
   Montrons que $f(x_1 + h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_1)$.
   Avec ♠, on a l'égalité
   $$\forall\, h \in \mathbb{R},\ f\big((x_1 + h) + (x_0 - h)\big) \ = \ f(x_1 + h) + f(x_0 - h)$$
   On a donc en isolant le terme qui nous intéresse :
   $$\forall\, h \in \mathbb{R},\ f(x_1 + h) \ = \ f(x_1 + x_0) \ - \ f(x_0 - h)$$
   Comme f est continue en x_0, on a $f(x_0 - h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$, on a donc par passage à la limite :
   $$f(x_1 + h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_1 + x_0) - f(x_0)$$
   Or d'après ♠, on a $f(x_1 + x_0) - f(x_0) = f(x_1)$.
   D'où $f(x_1 + h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_1)$.
   Donc f est continue en x_1.

Idée. On fait intervenir la suite récurrente $\begin{cases} u_0 = \dots \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$
La suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante égale à $f(u_0)$.
On ne peut pas vraiment exploiter cette idée, car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (suite géométrique de raison 2).

On pense alors à créer une suite convergente, par exemple en considérant $\begin{cases} v_0 = \dots \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$
La suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante égale à $f(v_0)$.
Ici, on a $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (WHY ?) ; par continuité de f en 0, on a $f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$.

Solution. Montrons que f est constante en montrant que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
Fixons $x \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} v_0 = x \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$
En utilisant l'hypothèse avec v_{n+1}, on obtient que que la suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Comme $v_0 = x$, on a :

$$\bigstar \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(v_n) = f(x)$$

On a

$$\begin{cases} v_n = \frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \\ f \text{ continue en } 0 \end{cases} \quad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

Par passage à la limite dans l'égalité $\bigstar$ (licite car les limites existent et sont finies), on obtient :

$$f(0) = f(x)$$

Bilan. La fonction f est constante.

Solution légèrement différente (moins bien).
On commence par reformuler l'hypothèse sous la forme $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = f(\frac{t}{2})$.
Puis on montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = f\Big(\frac{t}{2^n}\Big) \qquad \text{ou bien} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(t) = f\Big(\frac{t}{2^n}\Big)$$

Montrons que f est constante en montrant que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
Fixons $x \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.
En utilisant l'hypothèse, on montre par récurrence

$$\bigstar \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$$

On a

$$\begin{cases} \frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \\ f \text{ continue en } 0 \end{cases} \quad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

Par passage à la limite dans l'égalité $\bigstar$ (licite car les limites existent et sont finies), on obtient :

$$f(x) = f(0)$$

117

Idée.
L'idée est d'exploiter la continuité de f, donc de se ramener en un point (un réel) de $\mathbb{R}$ (qui n'est donc pas $+\infty$) ; à ce sujet, on ne sait pas si f admet une limite en $+\infty$.

Du coup, il sera pratique de montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t > 0,\ f(t) = f(t^{\frac{1}{2^n}}) \qquad \text{ou bien} \qquad \forall\, t > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(t) = f(t^{\frac{1}{2^n}})$$

Remarque. L'écriture $t^{\frac{1}{2^n}}$ nécessite $t > 0$ puisqu'elle cache un $\ln t$.
Si l'on prend un $t \geqslant 0$, on peut toujours se défendre en disant que l'on considère le prolongement par continuité en 0 de la fonction « puissance $\alpha = \frac{1}{2^n} > 0$ ».

On peut aussi travailler avec la quantité $\sqrt[\frac{1}{2^n}]{t}$ qui est bien définie en 0.

Autre idée, l'hypothèse dit que f est paire car

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f\big((-x)^2\big) = f(x^2) = f(x)$$

Il suffit donc de montrer que f est constante sur $[0, +\infty[$ (attention ici, 0 est inclus).
Ou bien, il suffit de montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^*$ et d'exploiter la continuité en 0.

À la fin de l'exercice, on comprendra que les fonctions (quelconques, non nécessairement continues) sont du type

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} c_1 & \text{si } x \in\,]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[\\ c_2 & \text{si } x \in\,]-1, 0[\, \cup\,]0, 1[\\ c_3 & \text{si } x = 0 \\ c_4 & \text{si } x \in \{-1,\, 1\} \end{cases} \end{array}$$

Il est alors facile de trouver une fonction non constante vérifiant les hypothèses (prendre par exemple, $c_1 = c_2 = c_4 = 2024$ et $c_3 = 3$) :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2024 & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Début de la preuve.
Montrons que f est constante sur $]0, +\infty[$.
Fixons $x \in\,]0, +\infty[$ une fois pour toutes.
En utilisant l'hypothèse, on montre par récurrence

$$\bigstar \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$$

On a

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \\ \\ f \text{ continue en } 1 \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f\big(x^{\frac{1}{2^n}}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(1)$$

Par passage à la limite dans l'égalité $\bigstar$ (licite car les limites existent et sont finies), on obtient :

$$f(x) = f(1)$$

On a donc montré

$$\clubsuit \qquad \forall\, x \in\,]0, +\infty[,\ f(x) = f(1)$$

Comme f est paire (WHY ?), on en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(1)$$

La fonction est continue en 0, donc sa limite en 0^+ existe et est finie et vaut $f(0)$.
En passant à la limite quand $x \to 0^+$ dans $\clubsuit$, on obtient

$$f(0) = f(1)$$

Bilan. On a donc $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1)$. Donc f est constante.

119

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre l'égalité en fixant n (donc pas besoin de récurrence) et en écrivant

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f\Big(2 \times \frac{x}{2^k}\Big) - f(\frac{x}{2^k}) \;=\; \frac{x}{2^k}$$

On somme pour $k \in [\![1, n]\!]$. Par télescopage, on obtient :

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après la question précédente, on a

$$♣ \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \;=\; x \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=1}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ f \text{ est continue en } 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

En passant à la limite dans l'égalité ♣ (licite, car chaque limite existe et est finie), on a :

$$f(x) - f(0) \;=\; x$$

Ainsi, f est de la forme $x \mapsto x + b$ (avec $b = f(0)$).

Réciproquement, une fonction de la forme $x \mapsto x + b$ est continue et satisfait la relation de l'énoncé.

122

Soit $f : x \mapsto \cos x - \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$.
La fonction f est continue.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$f(2k\pi) = 1 - \frac{1}{2k\pi} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(2k\pi + \pi) = -1 - \frac{1}{2k\pi + \pi} \leqslant 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $x_k \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ tel que $f(x_k) = 0$.
On vient de construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \Big(f(x_k) = 0 \qquad \text{et} \qquad x_k \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]\Big)$$

Reste à montrer que la suite prend une infinité de valeurs.
Comme les intervalles $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ sont disjoints deux à deux, on a

$$\forall\, k \neq \ell \in \mathbb{N},\ x_k \neq x_\ell$$

Ainsi, f s'annule une infinité de fois.
Donc l'équation admet une infinité de solutions.

Autre solution.
Posons Z l'ensemble des zéros de f

$$Z \ = \ \Big\{x \in\,]0, +\infty[\ \mid f(x) = 0\Big\}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant Z fini.
Comme Z est non vide (ce n'est pas complètement évident, par exemple, regarder $f(2\pi)$ et $f(3\pi)$ et utiliser le TVI), la partie Z admet un maximum, disons x_M.
Ainsi, $\forall\, t > x_M, \quad f(t) \neq 0$.
On va obtenir une contradiction en trouvant un $c > x_M = \max Z$ qui est dans Z.
On a (faire les calculs) $f(x_M + \pi) \leqslant 0 \leqslant f(x_M + 2\pi)$.
D'après le TVI, il existe $c \in [x_M + \pi,\ x_M + 2\pi]$ tel que $f(c) = 0$.

123

1. La fonction f est continue sur l'intervalle I, et ne s'annule pas sur cet intervalle. Grâce à la deuxième condition, il en va de même de g (pour tout $x \in I$, on a $g(x)^2 = f(x)^2 \neq 0$, donc $g(x) \neq 0$).

   Par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que f et g sont de signe constant. Quitte à remplacer f par $-f$ et/ou g par $-g$ (ce qui ne change ni les hypothèses de l'exercice, ni la conclusion à laquelle on souhaite aboutir), on peut supposer $f, g > 0$.

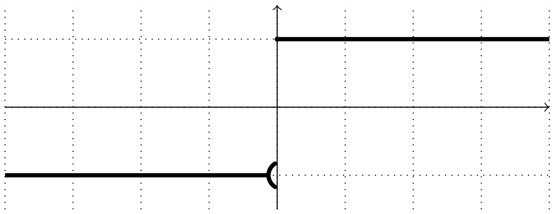
   Montrons qu'alors $f = g$.

   Soit $x \in I$. On a $f(x)^2 = g(x)^2$. En passant à la racine carrée, il vient $|f(x)| = |g(x)|$.

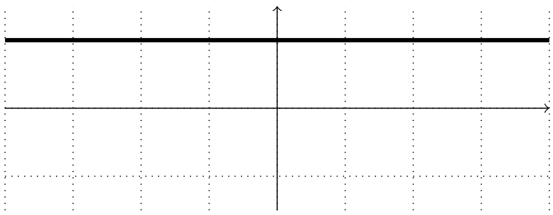
   Vu que f et g sont à valeurs > 0, il s'ensuit $f(x) = g(x)$, ce qui conclut.

2. Donnons rapidement des contre-exemples, en laissant au lecteur le soin de vérifier les détails.

   (a) Exemple avec f discontinue.

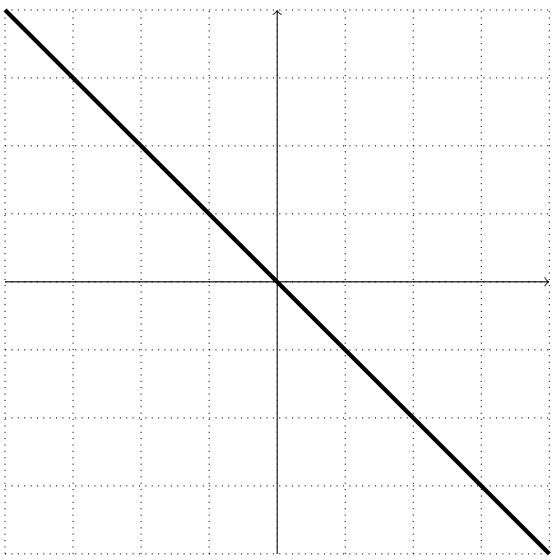


f

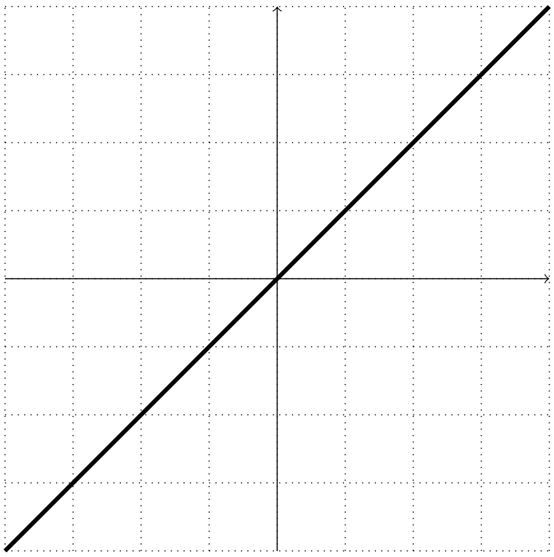


g

   (b) Exemple avec un point d'annulation

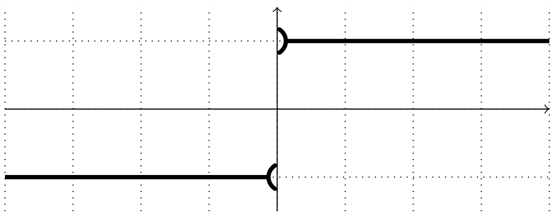


f

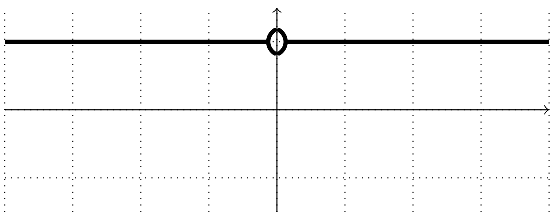


g

(c) Exemple dont le domaine n'est pas un intervalle.



f



g

124

Commentaires. La fonction f est non continue en 0 (WHY, ce n'est pas évident) et pourtant la fonction f vérifie le TVI.

Preuve.

— Cas $a > 0$. Alors la fonction est continue sur $[a, b]$, donc le TVI s'applique.

— Cas $a = 0$. On va se ramener à un intervalle du type $[a', b]$ avec $a' > 0$ et $f(a') = f(a)$. Il faut bien sûr imposer $a' < b$.

Comme $0 < b$, on peut trouver un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \dfrac{1}{n_0\pi} < b$.

Posons $a' = \dfrac{1}{n_0\pi}$. On a $f(a') = 0$.

Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors y est compris entre $f(a')$ et $f(b)$.
Comme f est continue sur $[a', b]$, le TVI fournit un $c \in [a', b]$ tel que $f(c) = y$.
A fortiori, ce c appartient à $[a, b]$, donc répond à la question.

126

- On commence par montrer que f ne prend que deux valeurs.

Soit $x \in [a, b]$. Montrons que $f(x) \in \Big\{f(a), f(b)\Big\}$.

On considère la suite d'abscisses $\left(x + \dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On applique l'hypothèse.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver c_n tel que $x \leqslant c_n \leqslant x + \dfrac{1}{n}$ avec $f(c_n) \in \Big\{f(a), f(b)\Big\}$.

On a $c_n \to x$ d'après le th des Gendarmes.

Et par continuité de f en x, on a $f(c_n) \to f(x)$.

Ainsi, la suite $(f(c_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$.

Comme cette suite ne prend que deux valeurs, elle est constante.

Donc $f(x)$ vaut l'une de ces deux valeurs.

- Une fonction continue qui ne prend que deux valeurs est constante (WHY ?).

127

On considère $g : x \mapsto f(x) - x$.

— Cette fonction est strictement décroissante (somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante).

— D'après le théorème de la limite monotone appliqué à la fonction f décroissante, on en déduit que (WHY) que

$$g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

— Cette fonction g est continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe un unique c tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

— si $f(0) = 0$, alors 0 est un point fixe de f.

— Si $f(0) \neq 0$, posons $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.
La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$
On a
$$g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell < 1$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $g(a) = 1$.
On a alors $f(a) = a$.
Donc f admet un point fixe.

129

On considère $g: \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-x \end{array}$

Cette fonction g est continue (WHY ?).

• En 0, on a $g(0)=f(0)$, donc $g(0)\geqslant 0$ (car f est positive).

• En $+\infty$, on a, par opération sur les limites $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ (car f admet une limite finie).

1$^{\text{ère}}$ rédaction.

Comme $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, on peut appliquer la définition epsilonesque et on obtient qu'il existe $x_1 \in [0,+\infty[$ tel que $\forall\, x \geqslant x_1,\ g(x) \leqslant -2023$.

En particulier, $g(x_1) \leqslant -2023$.

Les deux valeurs atteintes $g(0)$ et $g(x_1)$ vérifient $g(0)\geqslant 0$ et $g(x_1)\leqslant -2023$.

Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre ces deux valeurs atteintes.

Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que 0 est une valeur atteinte, autrement dit, il existe $x_0 \in [0,x_1]$ tel que $g(x_0)=0$.

2$^{\text{ème}}$ rédaction. Comme g est continue, l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par g, à savoir $g\big([0,+\infty[\big)$, est un intervalle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.

Par définition, cet intervalle contient $g(0)$; comme $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, sa borne inférieure est $-\infty$. Ainsi, cet intervalle contient $]-\infty, g(0)]$:

$$]-\infty, g(0)] \ \subset\ g\big([0,+\infty[\big) \qquad \text{(attention ce n'est pas forcément une égalité, WHY ?).}$$

Comme $g(0)\geqslant 0$, on a $0 \in\,]-\infty, g(0)]$, donc 0 appartient à $g\big([0,+\infty[\big)$.

Dit autrement, il existe $x_0 \in [0,+\infty[$ tel que $g(x_0)=0$, donc tel que $f(x_0)=x_0$.

130

Supposons par l'absurde f injective. On va donner deux façons d'obtenir une contradiction.

Première méthode. *A fortiori*, f ne peut pas être constante. On peut donc trouver $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq \ell$.

Prenons un nombre réel m compris strictement entre $f(x_0)$ et ℓ (si $\ell \in \mathbb{R}$, on peut choisir simplement $m = \frac{f(x_0)+\ell}{2}$, et si $\ell = \pm\infty$, on peut prendre $m = f(x_0) \pm 1$).

— Comme on a (suivant les cas)

$$f(x_0) < m < \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x_0) > m > \ell,$$

et que la fonction f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a, x_0]$, le théorème des valeurs intermédiaires généralisé entraîne l'existence de $c_- \in]a, x_0]$ tel que $f(c_-) = m$. Comme $f(x_0) \neq m$, on a même $c_- \in]a, x_0[$.

— De la même façon, on obtient l'existence de $c_+ \in]x_0, b[$ tel que $f(c_+) = m$.

Ainsi, $c_- < c_+$ et $f(c_-) = f(c_+)$, donc f n'est pas injective.

Deuxième méthode. L'exercice 125 affirme que toute fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ injective et continue est nécessairement strictement monotone.

Si l'on prend deux éléments $c < d$ appartenant à $]a, b[$, on a alors

— si f est strictement croissante, $\lim\limits_a f \leqslant f(c) < f(d) \leqslant \lim\limits_b f$;

— si f est strictement décroissante, $\lim\limits_a f \geqslant f(c) > f(d) \geqslant \lim\limits_b f$.

les inégalités larges provenant à chaque fois du théorème de la limite monotone.

Cela contredit directement l'hypothèse $\lim\limits_a f = \lim\limits_b f$, et conclut.

1. On considère $g : \begin{array}{rcl} [0, \frac{1}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+\frac{1}{2}) - f(x) \end{array}$

   Cette fonction g est continue (WHY ?).

   On a
$$\begin{cases} g(0) & = & f(\frac{1}{2}) - f(0) \\ g(\frac{1}{2}) & = & f(1) - f(\frac{1}{2}) \end{cases}$$
   Par somme et avec l'hypothèse $f(0) = f(1)$, on obtient $g(0) + g(\frac{1}{2}) = 0$.

   Donc ces deux réels de somme nulle sont de signe différent.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

2. On considère $g : \begin{array}{rcl} [0, \frac{2}{3}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+\frac{1}{3}) - f(x) \end{array}$

   Cette fonction g est continue (WHY ?).

   On a
$$\begin{cases} g(0) & = & f(\frac{1}{3}) - f(0) \\ g(\frac{1}{3}) & = & f(\frac{2}{3}) - f(\frac{1}{3}) \\ g(\frac{2}{3}) & = & f(1) - f(\frac{2}{3}) \end{cases}$$
   Par somme et avec l'hypothèse $f(0) = f(1)$, on obtient $g(0) + g(\frac{1}{3}) + g(\frac{2}{3}) = 0$.

   Donc, parmi ces trois réels de somme nulle, il en existe au moins deux de signe distinct, autrement dit il existe $x < x' \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ tel que $g(x)g(x') \leqslant 0$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [x, x']$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{3})$.

3. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ admet au moins une solution (on a traité les cas $n = 2$ et $n = 3$; quid du cas $n = 1$?).

   Je vous laisse faire la preuve. Il n'y a pas besoin de faire de récurrence. Il suffit de fixer n et de regarder comment généraliser les cas précédents. Il y aura sûrement du télescopage...

4. Considérons $\widetilde{g} : x \mapsto \sin^2\left(\dfrac{\pi}{T}x\right)$.

   Cette fonction $\widetilde{g}$ est continue, T-périodique et on a $\widetilde{g}(0) = 0$ et $\widetilde{g}(1) \neq 0$.

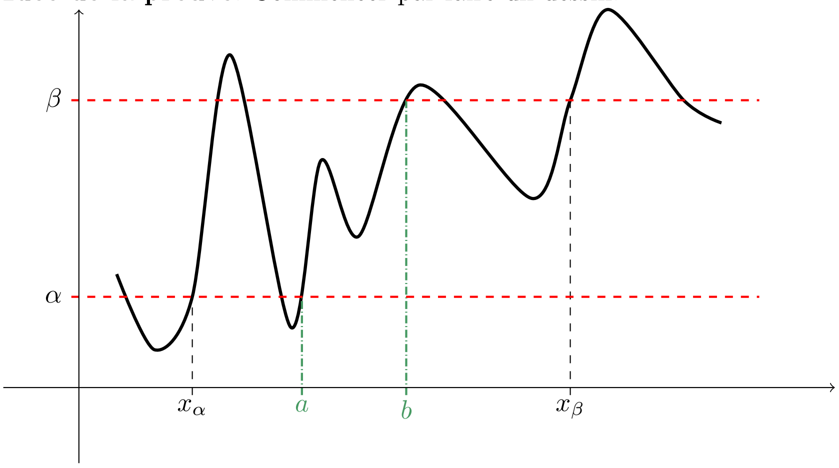
   Posons donc $g : x \mapsto \dfrac{1}{\widetilde{g}(1)}\widetilde{g}(x)$.

   Cette fonction g est continue, T-périodique et $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

   Posons $f : x \mapsto g(x) - x$. On a alors $f(0) = f(1)$.

   Et $\forall\, x \in [0, 1-T],\ f(x+T) - f(x) = -T$ qui est non nul. Donc $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de corde de longueur T.

Idée de la preuve. Commencer par faire un dessin.



Début de la preuve. Comme α et β sont dans l'image de f, il existe x_α et $x_\beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_\alpha) = \alpha$ et $f(x_\beta) = \beta$.
On va supposer $x_\alpha < x_\beta$. Il faudra aussi traiter le cas $x_\alpha > x_\beta$.

• Considérons
$$A = \Big\{x \in \,]-\infty, x_\beta],\ f(x) \leqslant \alpha\Big\}$$
Montrons que $\sup A$ existe (et même que $\max A$ existe !).

— A est non vide car $x_\alpha \in A$ (on a $x_\alpha \leqslant x_\beta$ (on a même une inégalité stricte) et $f(x_\alpha) \leqslant \alpha$ (même égalité)).

— A est majorée par x_β (car $A \subset \,]-\infty, x_\beta]$)

Ainsi A admet une borne supérieure. Posons $a = \sup A$. On a en particulier $a \leqslant x_\beta$ (car a est le plus petit des majorants et x_β est un majorant de A).

• Montrons que $a = \sup A$ appartient à A.
Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to a$.
Comme (u_n) est une suite d'éléments de A, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \leqslant \alpha$$
On a
$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f \text{ continue en } a \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$
Par passage à la limite dans l'inégalité large, on a
$$f(a) \leqslant \alpha$$

• Considérons maintenant
$$B = \Big\{x \in [a, +\infty[,\ f(x) \geqslant \beta\Big\}$$

— B est non vide : en effet, $x_\beta \in A$ (on a vu que $a \leqslant x_\beta$ et on sait que $f(x_\beta) \geqslant \beta$ (on a même une égalité))

— B est minorée par a (car $A \subset [a, +\infty[$)

Donc la borne inférieure de B existe. Posons $b = \inf B$ existe.
On montre de la même façon que $f(b) \geqslant \beta$.

• On a donc en particulier $f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant f(b)$.
Le TVI permet de montrer que $[\alpha, \beta] \subset f([a, b])$. En effet, soit $y \in [\alpha, \beta]$, a fortiori, y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le TVI implique qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

• Montrons que $f([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$.
Par définition de la borne supérieure a, on a $\forall x \in \,]a, x_\beta] \subset \,]a, b], f(x) > \alpha$ (inégalité $\star_\alpha$).
Par définition de la borne inférieure b, on a $\forall x \in [a, b[, f(x) < \beta$ (inégalité $\star_\beta$).
$\triangleright$ Les inégalités $\star_\alpha$ et $\star_\beta$ montrent $f(]a, b[) \subset]\alpha, \beta[$.

Par passage à la limite en a^+ dans $\star_\alpha$ et continuité de f, on a $f(a) \geqslant \alpha$.

Par passage à la limite en b^- dans $\star_\beta$ et continuité de f, on a $f(b) \leqslant \beta$.
$\triangleright$ Avec ce qui précède, on a donc $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

Les deux $\triangleright$ montrent $f([a,b]) \subset [\alpha, \beta]$.

L'autre cas. Pour le cas $x_\alpha > x_\beta$, on peut recommencer toute la preuve en considérant la partie A que l'on adapte :

$$A = \Big\{ x \in \left]-\infty, x_\alpha\right],\ f(x) \geqslant \beta \Big\}$$

On montre que A admet une borne supérieure notée a, et on adapte ensuite la définition de B

$$B \ = \ \Big\{ x \in \left[a, +\infty\right[,\ f(x) \leqslant \alpha \Big\}$$

Ou bien. Pour le cas $x_\alpha > x_\beta$, on peut se ramener au cas précédent en considérant $g : x \mapsto f(-x)$. Cette fonction g est continue ; de plus, les réels α et β sont dans l'image de g. Donc g vérifie les mêmes conditions que dans l'énoncé.
En posant $x'_\alpha = -x_\alpha$ et $x'_\beta = -x'_\beta$, on a donc $x'_\alpha < x'_\beta$ et $g(x'_\alpha) = \alpha$ et $g(x'_\beta) = \beta$.
On est donc ramené au cas précédent.
On obtient donc l'existence de a' et b' tels que $a' < b'$ et $g([a', b']) = [\alpha, \beta]$.
Mais par définition de g, on a $g([a', b']) = f([-b', -a'])$ (procéder par double inclusion si ce n'est pas évident).
Il suffit pour finir de poser $a = -b'$ et $b = -a'$. Et on obtient $f([a,b]) = [\alpha, \beta]$.

134

Comme f est périodique, on peut considérer $T \in]0, +\infty[$ une période de f.
Comme f est continue, la restriction de f au SEGMENT $[0, T]$ est bornée (théorème des bornes « non atteintes » !).
Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x_0 \in [0, T],\ |f(x_0)| \leqslant M$.
Il ne reste plus qu'à montrer que ce M convient pour tous les autres réels.
Soit donc $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nT \in [0, T]$ (cet entier est même unique si on ouvre la borne droite, c'est-à-dire $x - nT \in [0, T[$, cf. le lemme ci-dessous qu'il faut savoir démontrer).
On peut appliquer la $\forall$-assertion avec $x_0 = x - nT$, et on obtient $|f(x - nT)| \leqslant M$.
Or, par T-périodicité de f, on a $f(x) = f(x - nT)$.
On en déduit $|f(x)| \leqslant M$.

Lemme.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $T \in]0, +\infty[$.

Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} x = qT + r \\ 0 \leqslant r < T. \end{cases}$

Rappel. On rappelle la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ pour une fonction définie sur I (ici $I=\mathbb{R}$) :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, a],\ f(x) \geqslant M$$

On peut se permettre de choisir a *négatif*.
En effet, si on trouve un a positif tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, a], \dots$, alors a fortiori, on aura $\forall x \in I \cap]-\infty, -3], \dots$ et on pourra donc prendre $a=-3$.

De même pour la limite en $+\infty$, on peut choisir un voisinage du type $[b, +\infty[$ avec b *positif*.
Fin du rappel.

Idée générale de la preuve.
Pour montrer l'existence d'un minimum pour une fonction continue, il faut penser au théorème des bornes atteintes. Pour l'utiliser, il faut donc faire naître un SEGMENT.

Déroulement de la preuve.
Considérer une image de f, c'est-à-dire un certain « f de quelqu'un », par exemple, $f(0)$.
Exploiter ensuite les limites en $\pm\infty$. Ces deux limites font naître $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$ tels que ...
Enfin, examiner f sur le SEGMENT $[a, b]$.
Recoller les morceaux !

Début de la preuve. Montrons que f admet un minimum.

- Comme $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, il existe $a \leqslant 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, a],\ f(x) \geqslant f(0)$.
  Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $b \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [b, +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0)$.
  Pour l'instant, on obtient que $f(0)$ est un minorant de f sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.
- Sur le SEGMENT $[a, b]$, la fonction f est continue.
  D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum, noté $m = \min\limits_{[a,b]} f$.
  Donc m est un minorant de f sur $[a, b]$ et m est atteint.
- Comme $0 \in [a, b]$, on a en particulier $m \leqslant f(0)$.
  Donc m est un minorant de f sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.

On a donc montré que m est un minorant de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Comme m est atteint, c'est un (le) minimum !
Ainsi, m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Variation de la preuve. Montrons que f admet un minimum.
Ci-dessous, on prend $x_0 = 3$ ou tout autre nombre réel de votre choix.

- Comme $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, il existe $a \leqslant 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, a],\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
  Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $b \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [b, +\infty[,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
  Donc $f(x_0)$ est un minorant de f sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ et $f(x_0)$ est atteint !
- Sur le SEGMENT $[a, b]$, la fonction f est continue.
  D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum, noté $m = \min\limits_{[a,b]} f$.
  Donc m est un minorant de f sur $[a, b]$ et m est atteint.
- Posons $\mu = \min(f(x_0), m)$.
  On sait que $f(x_0)$ est un minorant de f sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, a fortiori μ en est un.
  On sait que m est un minorant de f sur $[a, b]$, a fortiori μ en est un.
  On a donc montré que μ est un minorant de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.
  Comme μ est atteint (car $f(x_0)$ et m sont atteints !), c'est un (le) minimum !
  Ainsi, μ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.

137

On pose $\varphi : x \mapsto g(x) - f(x)$.
L'inégalité de l'hypothèse se reformule en disant que φ est à valeurs strictement positives sur $[a, b]$.
Or φ est continue en tant que différence de deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$. En vertu du théorème des bornes atteintes, cette fonction φ est bornée et atteint ses bornes.
Posons $m = \min\limits_{[a,b]} \varphi$ qui est > 0, car m est atteint par φ.
On a, par définition de m,

$$\forall\, x \in [a, b], \quad m \leqslant \varphi(x)$$

Posons $\alpha = \frac{m}{2} > 0$. On a $\alpha < m$, d'où

$$\forall\, x \in [a, b], \quad \alpha < \varphi(x)$$

On a bien montré l'existence d'un certain $\alpha > 0$ tel que $\alpha < g(x) - f(x)$.

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété « $\forall x \in [0,1],\ f^{[n]}(x) \geqslant g^{[n]}(x) + nb$ »

 Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_1$ est vraie d'après $\triangle$.

 Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ fixé. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

 Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$, c'est-à-dire montrons $\forall z \in [0,1],\ f^{[n+1]}(z) \geqslant g^{[n+1]}(z) + (n+1)b$.
 Fixons $z \in [0,1]$. On a :

$$f^{[n+1]}(z) \overset{\text{def}}{=} f^{[n]}\Big(f(z)\Big) \overset{\mathcal{H}_n}{\geqslant} g^{[n]}\Big(f(z)\Big) + nb \qquad (\mathcal{H}_n \text{ avec } x = f(z), \text{ qui est bien un élément de } [0,1])$$

 Comme f et g commutent, par récurrence immédiate, f et $g^{[n]}$ commutent, donc l'inégalité précédente se réécrit :

$$f^{[n+1]}(z) \ \geqslant\ f\Big(g^{[n]}(z)\Big) +\ nb$$

 D'après $\triangle$ avec $x = g^{[n]}(z)$, la quantité $f\Big(g^{[n]}(z)\Big)$ est supérieure à $g\Big(g^{[n]}(z)\Big) + b$, donc on obtient :

$$f^{[n+1]}(z) \ \geqslant\ \underbrace{\left(g\Big(g^{[n]}(z)\Big) + b\right) + nb}_{=g^{[n+1]}(z)+(n+1)b}$$

 D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

 • **Mettons en évidence une absurdité.** Fixons $x_0 \in [0,1]$. L'inégalité de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{[n]}(x_0) \geqslant g^{[n]}(x_0) + nb$$

 doit se comprendre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n \geqslant \beta_n + nb$$

 où on a posé $\alpha_n = f^{[n]}(x_0)$ et $\beta_n = g^{[n]}(x_0)$.
 Ces deux suites sont bornées, car $f^{[n]}$ et $g^{[n]}$ sont à valeurs dans $[0,1]$.
 Comme les images de f et g sont incluses dans $[0,1]$, en composant n fois, on obtient que les images de $f^{[n]}$ et $g^{[n]}$ sont également incluses dans $[0,1]$.
 Ainsi, on a $1 \geqslant \alpha_n$ et $\beta_n \geqslant 0$.
 On obtient $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \geqslant 0 + nb$.
 Comme $b > 0$, on a $nb \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
 En passant à la limite dans l'inégalité large précédente, on obtient « $1 \geqslant +\infty$ », ce qui est absurde.

2. • La négation de $\heartsuit$ est $\qquad \forall c \in [0,1], \quad f(c) \neq g(c)$.
 Autrement dit, on suppose que la fonction $f - g$ ne s'annule pas.

 • On a $f(0) - g(0) \neq 0$.
 Il y a donc deux cas : soit cette quantité est strictement positive, soit elle est strictement négative.
 Mais quitte à inverser les rôles jouer par f et g, on peut supposer (sans perte de généralité !) que $f(0) - g(0) > 0$.

 • Cette fonction h possède plusieurs propriétés (héritées par celles que possèdent f et g) :
 ⋆ h est continue en tant que différence de deux fonctions continues
 ⋆ $h(0) > 0$ (car $f(0) > g(0)$).
 ⋆ h ne s'annule pas, c'est-à-dire $\forall x \in [0,1],\ h(x) \neq 0$ en vertu de la négalité de $\heartsuit$.

 Par conséquent, d'après le TVI, la fonction h est strictement positive.
 Or la fonction h est définie sur le **segment** $[0,1]$ et est continue.
 D'après le théorème des bornes atteintes, h est bornée et atteint ses bornes.
 On pose $m = \min\limits_{[a,b]} h$ qui est > 0 car h est strictement positive. On a donc

$$\forall x \in [0,1], \quad h(x) \geqslant m$$

 On a donc montré qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ g(x) - f(x) \geqslant m$.

On récite maintenant la question 1 pour arriver à une absurdité.

Voilà ce qu'il s'est passé :
en supposant la négation de $\heartsuit$, on arrive à démontrer $\triangle$, qui nous fait aboutir à une absurdité.
Bilan : l'assertion $\heartsuit$ est vraie ! Youpi !

139

La preuve du résultat. Je vous laisse répondre ensuite à chaque question !
• Comme f est continue, un TVI bien ficelé appliqué à la fonction $x \mapsto f(x) - x$ fournit l'existence d'un point fixe pour f.
Ainsi, F est non vide.

• D'autre part, F est une partie bornée (car incluse dans $[0,1]$), donc F admet une borne inférieure m et une borne supérieure M.

— On montre facilement que $m \in [0,1]$ (tout d'abord, le fait que 0 est un minorant de F fournit $m \geqslant 0$; et comme m est un minorant de F, il est inférieur à tout élément de F (eux-mêmes inférieurs à 1), donc par transitivité, on a $m \leqslant 1$).

— Comme $m = \inf F$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers m.

Autrement dit, on a les deux informations suivantes $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = x_n \\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m \end{cases}$

Par continuité de f en m, on en déduit que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(m)$.

Par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient $f(m) = m$.

Résumons. On a $m \in [0,1]$ et $f(m) = m$, donc $m \in F$.
De même, on montre que $M \in F$.

• Comme f et g commutent, on montre que F est stable par g.
Comme $m \in F$, on en déduit $g(m) \in F$.
Comme m est un minorant de F, on a $m \leqslant g(m)$. De même, on a $g(M) \leqslant M$.

• Comme m et M sont dans F, on en déduit que $m = f(m)$ et $M = f(M)$.
On a donc $g(m) - m = g(m) - f(m) \geqslant 0$ et $g(M) - M = g(M) - f(M) \leqslant 0$.

• La fonction $g - f$ est continue et change de signe (car $(g-f)(m) \geqslant 0$ et $(g-f)(M) \leqslant 0$).
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [m, M]$ tel que $(g-f)(c) = 0$ donc tel que $f(c) = g(c)$.

142

Idée. Le point clef est que f ne peut être ni minorée ni majorée sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$, car elle serait sinon minorée ou majorée sur $[0, +\infty[$ tout entier en vertu de la compacité de $[0, A]$, ce qui contredit violemment la surjectivité.

Début de la preuve.
Montrons que f prend toute valeur une infinité de fois.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe une valeur y que f prend seulement un nombre fini de fois.
On peut alors trouver $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geqslant A,\ f(x) \neq y$.

Première façon de conclure. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que la fonction f restreinte à $[A, +\infty[$ est ou bien à valeurs dans $]-\infty, y[$ ou bien dans $]y, +\infty[$.
Donc, sur $[A, +\infty[$, f est ou bien majorée ou bien minorée par y.
Or f étant continue sur le segment $[0, A]$, donc est bornée sur $[0, A]$ (théorème des bornes atteintes).
Donc f est bornée sur $[0, +\infty[$ ce qui contredit la surjectivité.

Deuxième façon de conclure.
Sur le segment $[0, A]$, la fonction f est bornée, disons $|f| \leqslant K$. En particulier $|y| \leqslant K$.
Considérons $K + 1$. Par surjectivité de f, c'est une valeur atteinte, nécessairement sur $[A, +\infty[$.
Considérons $K - 1$. Par surjectivité de f, c'est une valeur atteinte, nécessairement sur $[A, +\infty[$.
Ainsi, y qui est une valeur intermédiaire entre $K - 1$ et $K + 1$ est une valeur atteinte sur $[A, +\infty[$ ce qui contredit la définition de A.

1. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(0) = f(n \times 0)$.
   Exploitons l'hypothèse de l'énoncé avec $x = 0$, on trouve $f(n \times 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $f(0) = 0$.
   Comme f est 1-périodique, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = f(0)$ (preuve par récurrence immédiate).
   D'où $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = 0$.
2. **Idée.** Considérons le cas particulier de $\frac{1}{2}$, et montrons que $f(\frac{1}{2}) = 0$.
   Comme f est 1-périodique, on a
   $$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \cdots = f\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$
   Comme $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par extraction $f\big((2k+1)x\big) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
   En prenant $x = \frac{1}{2}$, on en déduit $f\left(\frac{2k+1}{2}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
   On a donc (WHY ?)
   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

   Cas général. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Montrons $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.
   Par 1-périodicité de f, on a
   $$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) \ = \ f\left((qk+p)\frac{1}{q}\right)$$
   Comme $q > 0$, on a $kq + p \in \mathbb{N}$ pour k assez grand (pour $k \geqslant -\frac{p}{q}$ précisément).
   Comme $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par extraction $f\big((qk+p)x\big) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
   En prenant $x = \frac{1}{q}$, on en déduit $f\left(\frac{qk+p}{q}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
   On a donc (WHY ?)
   $$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$
3. À la question précédente, on a montré que f est nulle sur $\mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de f, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$ (il faut savoir faire la preuve de cela).

144

La fonction f est injective (bijective) et continue sur un intervalle.
« Donc » (c'est l'exercice 125), f est strictement monotone.
Comme $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, on en déduit que f est strictement croissante.
Montrons que $f = \mathrm{id}$, c'est-à-dire montrons que $\forall\, x \in [0, +\infty[,\ f(x) = x$.
Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq x_0$.

— Si $f(x_0) < x_0$ alors par stricte croissance de f, on a $\underbrace{f\big(f(x_0)\big)}_{x_0} < f(x_0)$: contradiction.

— Si $f(x_0) > x_0$: idem

Bilan : $f = \mathrm{id}$.

145

La fonction f est périodique, disons de période $T > 0$. Sur le segment $[0, T]$, la fonction f est continue. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet donc un maximum atteint en x_M et un minimum atteint en x_m.
Par périodicité, f est majorée par $f(x_M)$ sur $\mathbb{R}$ et minorée par $f(x_m)$ sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction $g : x \mapsto f(a_0 + x) - f(x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.
On a (par définition de x_m et x_M) les inégalités

$$\begin{cases} g(x_M) = f(a_0 + x_M) - f(x_M) \leqslant 0 \\ g(x_m) = f(a_0 + x_m) - f(x_m) \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre $g(x_m)$ et $g(x_M)$.
D'après le TVI, 0 est une valeur atteinte par g.

Remarque. On peut aussi considérer $g(x_M - a_0) = f(x_M) - f(x_M - a_0) \geqslant 0$ et $g(x_M) \leqslant 0$.

146

Voici des idées en vrac. Soit f une telle fonction.

— La fonction f est continue ; en fait, f est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

En effet, constater que pour $x < y$, les réels $f(x)$ et $f(y)$ sont dans $f([x, y])$, qui est un segment de longueur $y - x$.

— Montrons que f est injective. Par l'absurde.
Supposons qu'il existe $a < b$ tel que $f(a) = f(b)$.
Appliquons le théorème des bornes atteintes sur le segment $[a, b]$.
Alors il existe x_m et x_M tel que $f\big([a, b]\big) = [f(x_m), f(x_M)]$.
Ce même théorème appliqué sur $[x_m \overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{,} x_M]$ fournit $f\big([x_m \overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{,} x_M]\big) = \big[f(x_m), f(x_M)\big]$.
Par ailleurs, le TVI fournit l'inclusion $[f(x_m), f(x_M)] \subset f\big([x_m, x_M]\big)$.
On tire $f\big([a, b]\big) = f\big([x_m \overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{,} x_M]\big)$.
D'après l'hypothèse faite sur f, on tire

$$b - a = |x_m - x_M|$$

Ainsi, $x_m \in \{a, b\}$ et x_M est alors "l'autre".
Comme $f(a) = f(b)$, on tire $f(x_m) = f(x_M)$.
Donc $\min f = \max f$, donc f est constante sur $[a, b]$.
Donc $f\big([a, b]\big)$ est un singleton donc un segment de longueur 0 !
Contredisant l'hypothèse faite sur f.

— Avec un lemme, on montre que f est strictement monotone.
Distinguer deux cas.
Cas f strictement croissante.
Soit $x > 0$. Par croissance et continuité, on obtient $f([0, x]) = [f(0), f(x)]$.
Avec l'hypothèse, on a donc $f(x) - f(0) = x - 0$, donc $f(x) = x + f(0)$.
Cela fonctionne aussi pour $x < 0$ et $x = 0$.

Cas f strictement décroissante. On pose $g = -f$ qui est alors strictement croissante.
En appliquant le cas précédent, on trouve $g : x \mapsto x + g(0)$, d'où $\forall\, x,\ (-f)(x) = x + (-f)(0)$.
Donc $\forall\, x,\ f(x) = -x + f(0)$.

— Les fonctions de la forme $x \mapsto x + \alpha$ et $x \mapsto -x + \alpha$ sont solutions !

147

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

La fonction f est bien à valeurs dans $[0,1]$.

• Montrons que $f \circ f = \mathrm{id}$.
Soit $x \in [0,1]$.

— si $x \in \mathbb{Q} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, alors $f(f(x)) = f(x) = x$.

— si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $1-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et donc $f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$.

— Si $x = 0$, alors $f(f(0)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

— Si $x = \frac{1}{2}$, alors $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = \frac{1}{2}$.

D'où $f(f(x)) = x$.

• Montrons que f est discontinue en tout point.
Par l'absurde. Supposons qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que f soit continue en a.
On peut trouver une suite de rationnels $(r_n) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0, \frac{1}{2}\})^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
(si jamais un terme r_n était nul ou égal à $\frac{1}{2}$, on peut lui ajouter le rationnel $\frac{1}{n}$).
On peut trouver une suite d'irrationnels $(y_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
Par continuité de f en a, on a alors $f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$ et $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.
Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(r_n) = r_n \qquad \text{et} \qquad f(y_n) = 1 - y_n$$

D'où $f(a) = a$ et $f(a) = 1-a$, d'où $a = \frac{1}{2}$.
Mais $a = \frac{1}{2}$ ne vérifie pas $f(a) = a$, ni $f(a) = 1-a$.
D'où la contradiction.
Bilan : f est discontinue en tout point de $[0,1]$.

1. La partie $\mathcal{P}$ est non vide, car f est périodique.
   De plus, $\mathcal{P}$ est minorée par 0.
   Donc $\mathcal{P}$ admet une borne inférieure.
2. Comme 0 est un minorant de $\mathcal{P}$, on a $T = \inf \mathcal{P} \geqslant 0$.
   Montrons que $T > 0$.
   Raisonnons par l'absurde en supposant que la borne inférieure T de $\mathcal{P}$ vaut 0.
   Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(\tau_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Montrons que f est constante, ce qui constituera une absurdité.
   Fixons $x \in \mathbb{R}$ et montrons que $f(x) = f(0)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut « ramener » x dans $[0, \tau_n]$; dit autrement, on peut trouver un « représentant » de x dans $[0, \tau_n]$, que l'on note x_n vérifiant $f(x_n) = f(x)$ (on peut construire explicitement un tel x_n à savoir $x_n = x - \lfloor \frac{x}{\tau_n} \rfloor \tau_n$, et on exploite la τ_n-périodicité pour montrer que $f(x_n) = f(x)$).
   On a
   $$\begin{cases} \tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ x_n \in [0, \tau_n] \end{cases} \quad \text{d'après le th. des Gendarmes, on a} \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   On a
   $$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ f \text{ continue en } 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$
   Par passage à la limite dans $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = f(x)$, on obtient $f(0) = f(x)$.
3. Montrons que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
   Fixons $x \in \mathbb{R}$.
   On a $T = \inf \mathcal{P}$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(\tau_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T$.
   On a les deux informations suivantes $\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x+\tau_n) = f(x) \\ \tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T \end{cases}$

   Prenons la deuxième information, enrichissons-la et couplons-la avec la continuité de f.
   On a :
   $$\begin{cases} x+\tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x+T \\ f \text{ est continue en } x+T \end{cases} \quad \text{d'où } f(x+\tau_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x+T)$$
   Un passage à la limite (licite) dans l'égalité $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x+\tau_n) = f(x)$ fournit $f(x+T) = f(x)$.
   Bilan. On a prouvé que $T > 0$ (question précédente) et que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
   Donc $T \in \mathcal{P}$ (et donc $T = \min \mathcal{P}$).
4. Montrons que $\mathcal{P} = T\mathbb{N}^*$.
   L'inclusion $\boxed{\supset}$ est classique : comme T est une période, tout multiple entier de T est une période !
   Traitons l'autre inclusion $\boxed{\subset}$.
   Soit $\tau \in \mathcal{P}$.
   Écrivons la division pseudo-euclidienne de τ par T : on peut trouver $(q, T) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ tel que
   $$\begin{cases} \tau = qT + r \\ r \in [0, T[\end{cases}$$
   On a alors $r = \tau - qT$ qui vérifie $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+r) = f(x)$ (car τ et T sont des périodes de f).
   Si r n'était pas nul, on aurait $r \in \mathcal{P}$ (avec $r < T$) ce qui contredirait la définition de T comme le minimum de $\mathcal{P}$.
   Donc $r = 0$.
   Donc $\tau = qT$.
   Comme τ et T sont strictement positifs, on en déduit que $q \in \mathbb{N}^*$.
   Ainsi, $\tau \in q\mathbb{N}^*$.

5. Considérons la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$: elle admet tout rationnel pour période.
   En effet, fixons $r \in \mathbb{Q}$.
   Le lecteur montrera que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+r) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

150

Notons f la fonction qui représente la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps (exprimé en minutes).
La fonction f est une fonction continue, et $f(0) = 0$ et $f(60) = 30$.
Montrons qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes tel que le cycliste a parcouru 5 km.
Autrement dit, montrons qu'il existe $x \in [0, 50]$ tel que $f(x + 10) - f(x) = 5$.
Supposons qu'un tel x n'existe pas.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

— ou bien, pour tout $x \in [0, 50]$, on a $f(x + 10) - f(x) > 5$.

— ou bien, pour tout $x \in [0, 50]$, on a $f(x + 10) - f(x) < 5$.

Découpons l'intervalle $[0, 60]$ en intervalles de 10 minutes :

$$[0, 60] \;=\; \bigcup_{k=0}^{5} [10k, 10(k + 1)]$$

Par télescopage, on a :

$$f(60) - f(0) \;=\; \sum_{k=0}^{5} \Big(\big(10(k + 1)\big) - f(10k) \Big)$$

Si on est dans le premier cas, chaque terme de la somme est > 5, donc $f(60) - f(0) > 6 \times 5 = 30$.
Ce qui contredit le fait que $f(60) - f(0) = 30$.
Dans le second cas, on trouverait $f(60) - f(0) < 30$.

151

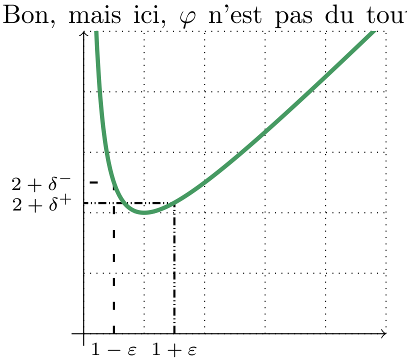
Remarque. Le point 0 ne joue aucun rôle particulier. On l'appellera a dans ce qui suit.
De plus, f est en fait une fonction quelconque définie sur un intervalle I contenant a et à valeurs dans $J =]0, +\infty[$ intervalle sur lequel $\varphi : t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est définie.
Avec ces notations l'exercice se reformule :

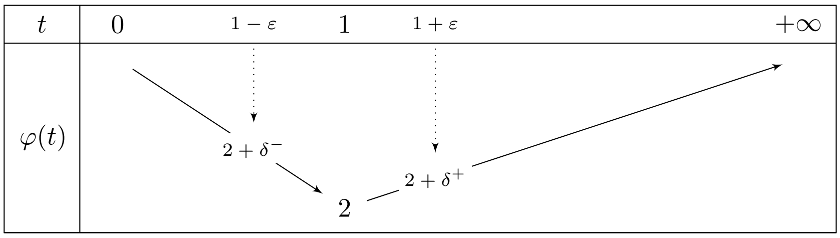
$$\varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Idée. Si φ était bijective et continue sur $J =]0, +\infty[$, on aurait alors par composition de limites l'implication suivante

$$\begin{cases} \varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2 \\ \varphi^{-1} \text{ continue en } 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \varphi^{-1}(2) = 1$$

Bon, mais ici, φ n'est pas du tout bijective, comme le montre le dessin et le tableau suivant :





Dans ce tableau, on a fixé $\varepsilon > 0$ et on a défini δ^- et δ^+ comme étant les uniques réels (positifs) vérifiant :

$$2 + \delta^- = \varphi(1-\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad 2 + \delta^+ = \varphi(1+\varepsilon)$$

Début de la preuve. Supposons que $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 2$, c'est-à-dire $\varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2 = \varphi(1)$.
Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe W_a voisinage de a tel que $\forall\, x \in I \cap W_a,\ f(x) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.
On introduit δ^- et δ^+ définis par

$$2 + \delta^- = \varphi(1-\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad 2 + \delta^+ = \varphi(1+\varepsilon)$$

On pose également $\delta = \min(\delta^-, \delta^+)$ de sorte que l'on a :

♠ $$\varphi(t) \in [2-\delta,\, 2+\delta] \implies t \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$$

Comme $\varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2$, il existe W_a voisinage de a tel que $\forall\, x \in I \cap W_a$, $\varphi\big(f(x)\big) \in [2-\delta, 2+\delta]$.
D'après la définition de δ, on obtient donc avec l'implication ♠ précédente :

$$\forall\, x \in I \cap W_a,\ \ f(x) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$$

Le contrat est rempli !

153

Des fonctions qui vérifient l'hypothèse :

$$x \mapsto \sqrt[n]{3 - x^n} \qquad \text{avec } n \text{ impair}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Du fait que **C** est symétrique par rapport à la première bissectrice, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(f(x), x) = (a, f(a))$. Mais alors, $f(f(x)) = f(a) = x$.
2. Supposons f croissante.
   Puisque la courbe représentative de f n'est pas la première bissectrice, il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $f(a) \neq a$.
   Si $f(a) > a$, alors $f \circ f(a) \geqslant f(a) > a$, ce qui contredit la question précédente.
   De même, si $f(a) < a$, alors $f \circ f(a) \leqslant f(a) < a$. L'hypothèse émise est donc absurde.
3. f est injective. En effet, si $f(a) = f(b)$, alors $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Mais une fonction injective continue est nécessairement strictement monotone. Comme d'après la question précédente f ne peut pas être croissante, elle est nécessairement strictement décroissante.
4. Bien sûr, il faut choisir une fonction qui n'est pas continue en 0.
   La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, convient.
   Cette fonction, qui est décroissante sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$, n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

154

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On peut déjà noter que $\lim_{x \to a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} f(x) = 0$.
Donc, si f a une limite quand x tend vers a, ce ne peut être que 0 et f est donc discontinue en tout rationnel.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit x un réel strictement positif tel que $f(x) \geqslant \varepsilon$.
x est nécessairement rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux vérifiant $\frac{1}{p+q} \geqslant \varepsilon$ et donc

$$2 \leqslant p + q \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) vérifiant ces inégalités et donc, il n'y a qu'un nombre fini de réels strictement positifs x tels que $f(x) \geqslant \varepsilon$.
Par suite, $\exists \alpha > 0$ tel que aucun des réels x de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ne vérifie $f(x) \geqslant \varepsilon$. Donc,

$$\forall a > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x > 0, (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon),$$

ou encore

$$\forall a > 0, \lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

155

On considère deux points $a < b$. Et on compare leurs images.
Considérons deux cas.

— Cas $f(b) \leqslant f(a)$.
On applique le TVI sur l'intervalle $I = [b, +\infty[$.
L'intervalle $f(I)$ contient l'intervalle $[f(b), +\infty[$ (car $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$), donc contient $f(a)$.
Donc il existe $c \in I$ tel que $f(c) = f(a)$. Donc f n'est pas injective (car $c \neq a$).

— Cas $f(b) \geqslant f(a)$.
On applique le TVI sur $I =]-\infty, a]$.
L'intervalle $f(I)$ contient l'intervalle $[f(a), +\infty[$ (car $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$), donc contient $f(b)$.
Donc il existe $c \in I$ tel que $f(c) = f(b)$. Donc f n'est pas injective (car $c \neq b$).

156

On peut proposer $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$ ou encore $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

On montre que f ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, donc garde un signe constant (TVI).
Ainsi, au voisinage de $+\infty$, on a $|f| = f$ ou bien $|f| = -f$.
D'où le résultat.

— On montre que f est injective. Si $f(x) = f(y)$, alors $0 \geqslant a|x-y|$, d'où $x = y$ (WHY ?).

— On montre que $|f| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a|x| \leqslant |f(x) - f(0)| \leqslant |f(x)| + |f(0)|$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a|x| - |f(0)| \leqslant |f(x)|$$

Par minoration, on a donc $|f| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

— On montre de même que $|f| \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$.

— Un petit raisonnement (c'est l'exo précédent : TVI, non annulation, signe constant) montre que l'on peut enlever les valeurs absolues et on est alors dans l'une des quatre situations suivantes :

$$\begin{cases} f \xrightarrow[-\infty]{} -\infty \\ f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f \xrightarrow[-\infty]{} +\infty \\ f \xrightarrow[+\infty]{} -\infty \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f \xrightarrow[-\infty]{} +\infty \\ f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f \xrightarrow[-\infty]{} -\infty \\ f \xrightarrow[+\infty]{} -\infty \end{cases}$$

Reste à montrer que les deux dernières situations sont impossibles (because f est injective). Le TVI dit alors que $f(\mathbb{R})$ contient $]-\infty, +\infty[$. Donc f est surjective !

Remarque. Si on connaît l'exo 125 (une fonction injective continue sur un intervalle est strictement monotone), on peut dire que f est strictement monotone donc admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ (théorème de la limite monotone) qui valent $-\infty$ et $+\infty$ (ou le contraire).