Polynômes

exercices

Coefficients, degré, équations

101 **Polynôme à coefficients réels de degré impair**

Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède (au moins) une racine réelle.

102 **Inversibles de $\mathbb{K}[X]$**

Déterminer les éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui possèdent un inverse pour la multiplication.

103 **Équations**

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

(i) $P(2X) = P(X) - 1$
(ii) $P(X^2) = (X^2+1)P$.
(iii) $P \circ P = P$.
(iv) $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X],\ Q^2 = XP^2$.

104 **Formule de Vandermonde**

Soit $n, p, q \in \mathbb{N}$. L'objectif est de montrer l'égalité :

$$\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{n}$$

où la somme porte sur les $i, j \in [\![0, n]\!]$ de somme n.

1. Que dit cette formule pour $p = 4$, $q = 5$ et $n = 6$?
2. En considérant les trois polynômes $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ définis par :
$$A = (X+1)^p \qquad B = (X+1)^q \qquad C = (X+1)^{p+q}$$
montrer l'égalité de Vandermonde.
3. À l'aide de la formule de Vandermonde, montrer que
$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 = \binom{2m}{m}$$

105 **Une identité**

Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant $(X^2-1)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

106 **Polynômes de Tchebychev de 2$^{\text{ème}}$ espèce**

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = -2X \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n a une parité et la déterminer.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(0)$.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(0)$.

107 **Infaisable ?**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P et Q deux polynômes distincts de degré n à coefficients *réels*.
En exploitant une factorisation et en exhibant les coefficients dominants, montrer que :

$$\deg\left(P^3 - Q^3\right) \geqslant 2n.$$

Divisibilité et division euclidienne

108 **La routine**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

(i) $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$

(ii) $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$

(iii) $A = (X \sin t + \cos t)^n$ et $B = X^2 + 1$, où t est un réel.

109 **Reste**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^2+1. On exprimera la réponse en fonction du cosinus et du sinus.

110 **Un classique**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ deux scalaires *distincts*.

1. Exprimer le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Exprimer le reste de la division de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

111 **Des entiers aux polynômes**

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b.
Montrer que le reste de la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$ est X^r.

112 **Divisibilité**

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer l'équivalence $b \mid a \iff X^b - 1 \mid X^a - 1$.

113 **Autour de j**

Soit $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r}$.

114 **$(3,2)$: le couple des Pistons !**

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que le polynôme $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

115 **Il y a 3 solutions**

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{C}$, le polynôme $B = X^2 - bX + 1$ divise $A = X^4 - X + a$?

116 **Joli !**

1. Soit $P, A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $A - B$ divise $P \circ A - P \circ B$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
   On utilisera astucieusement la question précédente.
3. En déduire les solutions de l'équation $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Racines et critère de nullité

117 Le Quizz de Madame Tête

1. Donner un exemple de fonction **non** polynomiale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi(n) = 0$$
2. Donner un exemple de fonction **non** polynomiale $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \psi(n) = n$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) = n^3 - n^2 + 1$$
Que vaut $P(\pi)$?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(n) = n^3 - n^2 + 1$$
Que peut-on dire sur $f(\pi)$? Construire une telle fonction f **non** polynomiale.
5. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P\big((-1)^{\lfloor t \rfloor}\big) \ = \ Q\big((-1)^{\lfloor t \rfloor}\big)$$
A-t-on $P = Q$?
6. Même question avec :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P\big(\cos(t) + 4\big) \ = \ Q\big(\cos(t) + 4\big)$$
7. Même question avec :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P\big((-1)^{\lfloor t \rfloor} + t\big) \ = \ Q\big((-1)^{\lfloor t \rfloor} + t\big)$$

118 Le logarithme n'est pas un polynôme

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\quad \exists\, A > 0, \ \forall x \geqslant A, \ P(x) = \ln(x)$.

119 Fonctions non polynomiales

Voici trois questions. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

(i) $P(k) = \dfrac{1}{k}$ (ii) $P(k) = \sqrt{k^2+1}$ (iii) $P(k) = 3^k$

120 Interpolation de Lagrange (à la main)

Soit $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts.

1. Construire un polynôme $\widetilde{L_0}$ de degré n ayant $x_1, \ldots, x_n$ comme racines.
2. Construire un polynôme L_0 de degré n ayant $x_1, \ldots, x_n$ comme racines et tel que $L_0(x_0) = 1$.
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Construire un polynôme L_k de degré n tel que $L_k(x_k) = 1$ et ayant les éléments de la famille $(x_j)_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}}$ comme racines.
4. Soit $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un *unique* polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ P(x_i) = y_i.$$
On dit que le polynôme P a été obtenu par *interpolation de Lagrange*.
5. **Application.** Soit $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], Q(k) = \frac{1}{k}$. Montrer que $Q(-1) = n$.

121 **Racines d'un polynôme vérifiant une équation fonctionnelle**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)\,P(X-1)$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont aussi racines de P.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P. Montrer que a est une racine de l'unité.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P.
4. Soit $\beta \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\beta \in \{j, j^2\}$.

122 **Coefficients complexes ou réels ?**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel.
Montrer que P est à coefficients réels.

Considérer le polynôme Q dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P.

Polynôme dérivé

123 **Conditions sur des polynômes, avec dérivation**

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

(i) $P = P'$ (ii) $(P')^2 = 4P$

124 **Équations avec P et P'**

(i) Résoudre l'équation $P = P'$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
(ii) Résoudre l'équation $P - XP' = X$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
(iii) Résoudre l'équation $2P = XP'$.
(iv) Soit $m \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $mP = XP'$.

125 **Une relation fonctionnelle polynomiale, linéaire**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.

126 **Une relation fonctionnelle polynomiale, non linéaire**

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

127 **Existence-Unicité**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ que l'on explicitera avec ses coefficients tel que $P_n - P_n' = X^n$.

128 **Question ouverte**

Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Formule de Taylor

129 **Une nouvelle preuve**

On pose $E = \mathbb{K}_{n+1}[X]$. On considère $H = \mathbb{K}_n[X]$ et $D = \mathrm{Vect}\Big((X-19)^{n+1}\Big)$

À l'aide de la formule de Taylor, montrer sans effort que $E = H \oplus D$.

130 **Dérivées positives en un point**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geqslant 0$.
Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

131 Interpolation de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Considérons

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \big(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)\big) \end{array}$$

Montrer que Ψ est un isomorphisme.
Que vaut Ψ^{-1} ?

Racines multiples

132 Bas de gamme

(i) Considérons $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$.
Montrer que 1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

(ii) Reprendre l'exercice avec $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$.

(iii) Montrer que le polynôme P admet une racine double.

$$P = X^4 - (5 + \sqrt{2})X^3 + (5\sqrt{2} - 2)X^2 + (10 + 2\sqrt{2})X - 10\sqrt{2}$$

En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

133 Une divisibilité en deux preuves

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X^2 divise $(X + 1)^n - nX - 1$.
On pourra proposer deux preuves différentes (l'une qui explicite le quotient, l'autre avec un critère sur la multiplicité d'une racine).

134 Une CNS

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}^*$.
À quelles conditions le polynôme $X^3 - 3X - \left(\frac{b}{ac} + \frac{ac}{b}\right)$ est-il à racines simples ?

135 Multiplicité

Soit $n \geqslant 3$.
Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

136 Le polynôme de Taylor de la fonction exponentielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$.

1. Montrer que les racines de P_n sont simples.
2. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

137 Discriminant d'un polynôme de degré 3

Soit $P = X^3 + pX + q \in \mathbb{K}[X]$.
En considérant la division euclidienne de P par P', montrer que

$$P \text{ admet une racine double} \iff 4p^3 + 27q^2 = 0$$

Factorisation

138 Racines $6^{\text{ème}}$ de l'unité

On souhaite factoriser $X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. **Première preuve.** Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et conclure.
2. **Deuxième preuve.** Restons dans $\mathbb{R}[X]$.
   En factorisant $X^3 - 1$ et $X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, conclure.

139 Factorisation de $\Phi_3(X^2)$

Factoriser le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

On essaiera de fournir deux preuves : une en restant dans $\mathbb{R}[X]$, et une en commençant par factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

140 La routine !

Pour chacun des polynômes suivants, donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

(i) $P_1 = X^4 - 4$
(ii) $P_2 = X^4 + 1$
(iii) $P_3 = X^6 + 27$
(iv) $P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$
(v) $P_5 = X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1$
(vi) $P_6 = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième
(vii) $P_7 = X^4 + 12X - 5$ en sachant qu'il y a deux racines dont la somme vaut 2

141 Dans $\mathbb{Z}[X]$

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
   Montrer que si P admet une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ exprimée sous forme irréductible alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Factoriser $P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$.
3. Le polynôme $X^3 + 3X - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

142 De $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$

Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

143 Une divisibilité

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^8 + X^4 + 1$ (sans faire de division euclidienne !).

144 Factorisation générale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les égalités

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad X^n - z^n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega z) \qquad X^n - z^n = \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n} (X - \bar{\xi} z).$$

Puis, en exploitant la première égalité, montrer que :

$$\forall A, B \in \mathbb{C}[X], \quad A^n - B^n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (A - \omega B)$$

145 Condition pour être scindé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire à coefficients *réels*.
Montrer que

$$P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \iff \forall z \in \mathbb{C}, \ |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$$

Relations coefficients-racines

146 **Polynôme de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3, possédant deux racines réelles.
Montrer que la troisième racine est également réelle.

147 **Les sommes de Newton**

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$ (donc $a \neq 0$).
On suppose que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et on note x, y et z ses racines.
On pose

$$\sigma_1 = x + y + z \qquad \sigma_2 = xy + xz + yz \qquad \sigma_3 = xyz$$

1. Exprimer les quantités σ_1, σ_2 et σ_3 en fonction de a, b, c et d.
2. Exprimer les quantités $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$

148 **Système hautement non linéaire**

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$.

149 **Le polynôme $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Autres

150 **Lieu des racines**

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ unitaire.
Montrer que si λ est racine de P alors $\quad |\lambda| \leqslant 1 + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k|$.

Disjonction de cas sur le module de λ vis à vis de 1.

151 **Un peu astucieux**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall\, k \in [\![1, n+1]\!], \quad P(k) = \frac{1}{k}$$

1. On prend ici $n = 1$. Donner un exemple de polynôme P vérifiant les conditions de l'énoncé.
   Même question avec $n = 2$.
2. On revient au cas général avec n quelconque. Que peut-on dire du polynôme $XP(X) - 1$?
   Son degré ? Ses racines ? Son coefficient dominant ?
   Montrer que $P(-1) = n + 1$.

152 **La suite du 121**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

153 **L'exercice de Y.G. (24/01/23) !** Tigrane, première victime !

Soit $n \geqslant 2$. Simplifier

$$\prod_{\substack{(\omega,\omega')\in\mathbb{U}_n^2\\ \omega\neq\omega'}} (\omega-\omega')$$

Comme première indication, on peut demander au candidat de simplifier $\displaystyle\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} (1-\xi)$.

154 $a^n - b^n$

Soit a, $b \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Simplifier l'expression $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a + b\,\omega_k)$ où les ω_k sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Gros exercices

155 Racines des polynômes de Tchebychev

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
On pourra ou bien définir T_n de manière explicite, ou bien par récurrence à l'aide de $\cos p + \cos q$.
2. Montrer qu'une telle suite est unique.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
Calculer $T_n(x_k)$ puis montrer que T_n possède n racines distinctes réelles.
4. En déduire la factorisation de T_n en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

156 Factorisation du 5ème polynôme cyclotomique

On considère le polynôme
$$Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
Pour la culture : c'est ce que les mathématiciens connaissent sous le nom de 5ème polynôme cyclotomique.
On pose $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$.

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
En déduire que le polynôme Q n'a pas de racine réelle.
2. (2a) Montrer que $\cos(\theta) = \cos(4\theta)$.
(2b) Montrer que
$$\cos(4\theta) \;=\; 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$
Penser à la formule de duplication $\cos(2x)$.
3. Considérons
$$Q = 8X^4 - 8X^2 - X + 1$$
Montrer que 1 et $-\frac{1}{2}$ et $\cos(\theta)$ sont racines de Q et en déduire que
$$4\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 1 = 0$$
4. Montrer que
$$\cos(\theta) + \cos(2\theta) \;=\; -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos(\theta)\cos(2\theta) \;=\; \frac{1}{4}$$
En déduire que le polynôme
$$\big(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1\big)\big(X^2 - 2\cos(2\theta)X + 1\big)$$
est à coefficients entiers.
5. Quelle est la factorisation de Q ?

157 Polynômes qui stabilisent ...

1. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}\}$.
2. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall\, x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}\}$. Penser à l'interpolation de Lagrange.
3. On note $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall\, x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) On pose $P_0 = 1$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
   Montrer $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n \in \mathcal{E}$.
   (b) Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
   Aspect générateur. On pourra remarquer que, pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé, on a $P_k - \dfrac{1}{k!}X^k \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$.
   (c) En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers (relatifs) des P_n.

Un peu d'algèbre linéaire

158 $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie

Soit $(P_1, \dots, P_s)$ une famille de s polynômes de $\mathbb{K}[X]$?
Peut-elle être génératrice de $\mathbb{K}[X]$?

159 Espaces supplémentaires

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et :

$$F = \Big\{ P \in E \mid P(1 - X) = P(X) \Big\} \qquad G = \Big\{ P \in E \mid P(1 - X) = -P(X) \Big\}$$

En considérant une involution de E, montrer sans effort que $E = F \oplus G$.

160 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. On pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big). \end{array}$$

et on note $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

1. Justifier que φ est linéaire et montrer que φ est injective.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$, que l'on explicitera, tel que $\varphi(L_k) = e_{k+1}$.
3. En déduire que φ est un isomorphisme.
4. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
5. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

161 Polynôme annulateur et matrice

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, vérifiant $P(0) \neq 0$, tel que $P(M) = 0$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1 est-elle inversible ?

162 Polynôme annulateur

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $H^2 = \alpha H$ avec $\alpha \neq -1$.
On pose $A = I + H$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. Montrer que A est inversible.
   Puis exprimer son inverse comme une combinaison linéaire de A et I.

163 L'idéal des polynômes annulateurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On rappelle que pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Montrer $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
2. Montrer que si P divise Q, alors $\operatorname{Ker} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f)$ et $\operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f)$
3. On dit qu'un polynôme P est *annulateur* de l'endomorphisme f si l'on a $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_f$ des polynômes annulateurs de u est un *idéal* de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire :
   (a) $\mathcal{I}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$;
   (b) $\forall\, P \in \mathcal{I}_f,\ \forall\, Q \in \mathbb{K}[X],\ PQ \in \mathcal{I}_f$.

164 Deux applications linéaires qui coïncident sur une base ...

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. En considérant deux applications linéaires, montrer sans effort que

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)$$

165 Matrice de Vandermonde

Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

1. Déterminer une matrice $\mathbf{V}$ (elle est unique et dépend bien sûr de $\boldsymbol{\alpha}$) telle que pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, on ait

$$\mathbf{V} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\alpha_0) \\ P(\alpha_1) \\ \vdots \\ P(\alpha_n) \end{bmatrix}$$

   On commencera par le cas $n = 2$.

2. Conjecturer une CNS sur $\boldsymbol{\alpha}$ pour que la matrice $\mathbf{V}$ précédente soit inversible.
   Démontrer la conjecture.
   On pourra s'aider du critère « une matrice est inversible ssi le système homogène associé admet 0 pour unique solution ».

166 Combinaison linéaire de I et J

Soit $n \geqslant 2$. Soit I la matrice identité de taille n et J la matrice pleine de 1 de taille n.
On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & b & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{bmatrix}}_{=M(a,b)} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{K} \right\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Montrer que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(I, J)$.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par somme et produit.
3. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par puissance entière positive.

Soit $a, b \in \mathbb{K}$. On pose $M = M(a, b)$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 pour M.
2. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff a \notin \{b, \ -(n-1)b\}$.
   Dans ce cas, montrer que $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

167 Un classique

1. Soit $G = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2 - 1)Q' = 2XQ \right\}$
   (a) Soit $Q \in G \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. En examinant les coefficients dominants, montrer que $\deg Q = 2$.
   (b) Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer une base.

Dans la suite, on suppose que $n \geqslant 3$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application $f : P \mapsto \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ (on pourra utiliser judicieusement la question 1).
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
5. Ici, $n = 3$.
   (a) En concaténant les bases précédentes, montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\, f$.
   (b) Déterminer un polynôme annulateur pour f.

168 Opérateur des différences finies

Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. Montrer que $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$.
3. À l'aide de la question précédente, déterminer une base de $\operatorname{Ker} \Delta$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $\Delta^n(P)$ en fonction de $\deg P$.
5. Considérons l'endomorphisme $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'endomorphisme T^k.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exprimant Δ en fonction de T, montrer sans effort que :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \Delta^n(P) \; = \; (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) \; = \; 0.$$

   Connaît-on cette égalité pour $P = 1$, et pour $P = X$, et pour $P = X(X-1)$?

169 Un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \geqslant 2$.

Soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], \; P_k = \dfrac{1}{k!} X(X-k)^{k-1} \end{cases}$$

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Justifier que $P_k - \dfrac{1}{k!} X^k \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$.

   En déduire que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Vérifier que $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.
4. Soit f l'application définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ par

$$f : P \longmapsto P(X) - P'(X+1)$$

   (4a) Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

   (4b) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathcal{F}$.

   (4c) En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

   (4d) Montrer que $(X-1)^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f.

   (4e) Déterminer les valeurs propres de f, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}$.
5. En introduisant l'endomorphisme $g = \operatorname{id} - f$, démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad f^m(P) \; = \; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

   où $P^{(i)}$ désigne le polynôme dérivé $i^{\text{ème}}$ de P.

Khôlles

170 Une identité binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) \;=\; 0.$$

171 Dérivée $k^{\text{ème}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$.
On considère

$$P \;=\; \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$$

Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

172 Relations coefficients-racines

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ tels que $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

173 sinus et cosinus

Soit U, $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \;\; U(t)\sin t + V(t)\cos t = 0.$$

Montrer que U et V sont égaux au polynôme nul.

174 Divisibilité avec paramètres

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme A_n est divisible par $B = X^2 - X + 1$.

(ii) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$A_n = (\sin\theta) X^n - \sin(n\theta) X + \sin((n-1)\theta)$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, le polynôme A_n est divisible par $B = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

175 Somme de deux carrés

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

1. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\overline{C}$.
3. En déduire qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

176 Un équation fonctionnelle amusante (from Jean Rax)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P^2 + 1 = P(X^2 + 1)$.

On pourra poser $R = X^2 + 1$.

Plus difficiles...

177 Autre exercice de Y.G.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$.

Montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

178 Polynômes stabilisant $\mathbb{U}$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E} = \Big\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}\Big\}$.

179 Une équation (difficile)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

180 Ordre au voisinage de $+\infty$

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes différents. Montrer que

$$\Big(\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, t \geqslant A,\ \ P(t) < Q(t)\Big) \qquad \text{ou} \qquad \Big(\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, t \geqslant A,\ \ P(t) > Q(t)\Big)$$

181 Avec des racines multiples

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que

$$(X-1)^3 \mid P+1 \qquad \text{et} \qquad (X+1)^3 \mid P-1.$$

On pourra penser aux polynômes dérivés. Mais attention, est-il vrai que $B \mid A \implies B' \mid A'$? Mais si B est ...

182 Conditions sur des polynômes, avec dérivation et racines multiples

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = P'\,P''$.

183 L'ensemble ordonné $\mathbb{C}[X]$

Déterminer les $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \leqslant |Q(z)|$.

184 Le plus difficile est de comprendre l'énoncé !

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et $n = \deg P$.
Montrer que la somme des racines de P, P', ..., $P^{(n-1)}$ sont en progression arithmétique.

185

Soient a, b, c trois points distincts de $[0, 1]$. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2.

1. Montrer l'existence de trois réels α, β, γ tels que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X], \ \int_0^1 P(x)\, dx = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$$

2. Déterminer explicitement ces trois réels en fonction de a, b, c.

Soit $P \in \mathbf{E}$. Alors si P est constant, il vaut 0 ou 1, et est bien du type $aX^q(X-1)^q$ (en effet, le polynôme nul s'écrit $aX^q(X-1)^q$ avec $a=0$ et le polynôme constant égal à 1 s'écrit $aX^q(X-1)^q$ avec $a=1$ et $q=0$).

Pour l'inclusion $\supset$,
Soit P un polynôme de la forme $aX^q(X-1)^q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0,1\}$.
Montrons que P est dans $\mathbf{E}$.
On a l'égalité (vérifiez ! utilisez notamment que $a^2 = a$ dans notre cas)

$$aX^q(X-1)^q \times a(X+1)^q((X+1)-1)^q \;=\; a(X^2)^q(X^2-1)^q$$

Donc $P = aX^q(X-1)^q$ est dans $\mathbf{E}$.

Si on ne sait pas écrire $\mathbf{E}$ en maths comme ci-dessus, ce n'est absolument pas grave. Il suffit de faire une phrase claire en français, par exemple :
L'ensemble $\mathbf{E}$ est constitué des polynômes constants 0 et 1 et des polynômes de la forme $X^q(X-1)^q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$.

186 Polynômes de Bernstein

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$.
Par convention (ou bien par définition du coefficient binomial), pour tout $k \notin [\![0,n]\!]$, on pose $B_{n,k} = 0$.

1. **Début**
   (a) Ici, $n=3$. Donner les coefficients 4 polynômes de Bernstein $B_{n,k}$ pour $k \in [\![0,3]\!]$.
   (b) Ici, n est quelconque. On considère le polynôme $B_{n,k}$. Donner son degré, son coefficient dominant, ses racines dans $\mathbb{C}$, ainsi que leur multiplicité.
2. **Calculs**
   (a) Montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$ est constant égal à 1.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX$. Calculer de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.
   (c) Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} \left(X - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} = \frac{1}{n} X(1-X)$$
   (d) Montrer que $\forall x \in [0,1], \quad B_{n,k}(x) \in [0,1]$.
   (e) Soit $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Montrer que $B_{n,k} = XB_{n-1,k-1} + (1-X)B_{n-1,k}$.
   (f) Soit $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Montrer que $B'_{n,k} = B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}$.
   (g) $B_{n,k}$ atteint son maximum en $\dfrac{k}{n}$.
3. **Algèbre linéaire**
   (a) Montrer que la famille $(B_{n,k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre.
   (b) Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. **Étude d'une application linéaire.** Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \end{array}$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) On oublie la question précédente. Comment montrer la surjectivité de φ « à la main » ? Exprimer les a_k en fonction de P.
5. **Une propriété**
   (d) Montrer que si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B_{n,k}$, alors
   $$\forall x \in [0,1], \qquad \min(a_0, \ldots, a_n) \leqslant P(x) \leqslant \max(a_0, \ldots, a_n)$$

Pour la culture

Les polynômes de Bernstein de degré n forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Si l'on décompose un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n,k}$, alors le nombre de racines (comptées avec multiplicité) de P dans l'intervalle $]0,1[$ est inférieur ou égal au nombre de changement de signes dans la suite $a_0, \ldots, a_n$, et la différence est paire.

Ces polynômes présentent plusieurs propriétés importantes : $\forall u \in [0,1]$

- partition de l'unité :

$$\sum_{i=0}^{m} B_i^m(u) = 1,$$

- positivité :

$$\forall i \in \{0, \ldots, m\} \quad B_i^m(u) \geqslant 0,$$

- symétrie :

$$\forall i \in \{0, \ldots, m\} \quad B_i^m(u) = B_{m-i}^m(1-u),$$

- valeurs aux bords :

$$\forall i \in \{0, \ldots, m\} \quad B_i^m(0) = \delta_{i,0}, B_i^m(1) = \delta_{i,m}$$

avec δ le symbole de Kronecker

- multiplicité des racines : pour B_i^m, 0 est une racine de multiplicité i et 1 , une racine de multiplicité $m-i$.

- formules de récurrence : pour $m > 0$,

$$B_i^m(u) = \begin{cases} (1-u)B_i^{m-1}(u) & \text{si } i = 0 \\ (1-u)B_i^{m-1}(u) + uB_{i-1}^{m-1}(u) & \forall i \in \{1, \ldots, m-1\}. \\ uB_{i-1}^{m-1}(u) & \text{si } i = m. \end{cases}$$

$$B_i^m{\prime}(u) = m\left(B_{i-1}^{m-1}(u) - B_i^{m-1}(u)\right).$$

- décomposition sur la base canonique :

$$B_i^m(u) = \left(\begin{array}{c} m \\ i \end{array}\right) \sum_{k=0}^{m-i} \left(\begin{array}{c} m-i \\ k \end{array}\right) (-1)^k x^{i+k} = \sum_{l=i}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} l \\ i \end{array}\right) (-1)^{l-i} x^l$$

et inversement

$$u^p = \sum_{k=0}^{m-p} \left(\begin{array}{c} m-p \\ k \end{array}\right) \frac{1}{\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right)} B_{m-k}^m(u) = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} m \\ p \end{array}\right)} \sum_{s=p}^{m} \left(\begin{array}{c} s \\ p \end{array}\right) B_s^m(u).$$

1. On a l'égalité $\Big(X + (1-X)\Big)^n = 1^n$.

   La formule du binôme de Newton fournit $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1$.

2. Soit $x \in [0,1]$. On montre facilement que $B_{n,k}(x) \geqslant 0$.
   On en déduit :

   $$B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{j=0}^{n} B_{n,j}(x)$$

   puis $B_{n,k}(x) \leqslant 1$.

3.
4. — si $k = 0$: $\quad B'_{n,0} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$
   — si $k = n$: $\quad B'_{n,n} = nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}$
   — si $0 < k < n$, on a

   $$B'_{n,k} \;=\; k\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k} \;-\; (n-k)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}$$

   On a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et $(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-k-1} = n\binom{k}{n-1}$.
   Ainsi $B'_{n,k} \;=\; n\Big(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}\Big)$

Polynômes

corrigés

101

Soit P un polynôme de degré d impair que l'on écrit

$$P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \qquad \text{avec } a_d \neq 0$$

On a alors

$$\forall\, x \neq 0, \quad P(x) \;=\; a_d x^d \underbrace{\left(1 + \frac{a_{d-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^d}\right)}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1} \qquad \text{et} \qquad x^d \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty.$$

On en déduit que

$$P(x) \to \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a_d > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a_d < 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto P(x)$ est polynomiale donc continue.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires généralisé, on en déduit l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.
Le polynôme P a donc une racine réelle.

102

Notons $\mathscr{I} = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists\, Q \in \mathbb{K}[X], PQ = 1\right\}$ l'ensemble de l'énoncé.
Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathscr{I}$.

On peut donc trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = 1$.
En passant au degré, on obtient $\deg P + \deg Q = 0$.
Comme $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, on a nécessairement $\deg P = 0$.

Synthèse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 0.

Il s'agit donc d'un polynôme constant non nul, et on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda$.
Posons $Q = \frac{1}{\lambda}$ (licite).
On a alors $PQ = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$, ce qui montre que $P \in \mathscr{I}$.

Bilan. $\mathscr{I} = \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

103

(i) Soit P tel que $P(2X) = P(X) - 1$.
En évaluant en 0, on obtient $P(0) = P(0) - 1$, d'où $0 = -1$.
Bilan : l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

(ii) On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.
Comme $\deg(X^2) \geqslant 1$, on peut appliquer la formule pour le degré de la composée de deux polynômes. Ainsi, $\deg P(X^2) = \deg P \times \deg X^2 = 2 \deg P$.
Par ailleurs, $\deg\big((X^2 + 1)P\big) = \deg(X^2 + 1) + \deg P = 2 + \deg P$.
On en déduit que $2 \deg P = 2 + \deg P$, d'où l'on tire $\deg P \in \{-\infty, 2\}$.
— Si $\deg P = -\infty$, on a $P = 0$.
— Si $\deg P = 2$, on peut trouver $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$.
Comme $\deg P = 2$, on a $a \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} P(X^2) = (X^2+1)P \quad & \text{donc} \quad aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2 + bX + c) \\ & \text{donc} \quad aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \\ & \text{donc} \quad \begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = a + c \\ 0 = b \\ c = c \end{cases} \qquad \text{(par identification des coefficients)} \\ & \text{donc} \quad b = a + c = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $P = a(X^2 - 1)$.
On a montré qu'un polynôme vérifiant la condition de l'énoncé était nécessairement de la forme $a(X^2 - 1)$, le cas $a = 0$ correspondant au polynôme nul et le cas $a \neq 0$ correspondant au cas de degré 2.

Synthèse. Prenons P de la forme $P = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{K}$.
On a d'une part $P(X^2) = a(X^4 - 1)$.
D'autre part, $(X^2 + 1)P = a(X^2 + 1)(X^2 - 1) = a(X^4 - 1)$.

Ainsi, on a montré

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X^2) = (X^2 + 1)P\Big\} = \mathrm{Vect}(X^2 - 1)$$

(iii) Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \circ P = P$.
Si d'aventure le polynôme P est non constant, on a $\deg P = \deg(P \circ P) = \deg(P)^2$, ce qui entraîne $\deg P = 0$ ou $\deg P = 1$.
Dans tous les cas, on a donc $\deg P \leqslant 1$.
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX + b$.
On a alors

$$P \circ P = a(aX + b) + b = a^2 X + ab + b.$$

L'égalité $P \circ P = P$ entraîne donc

$$\begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \left(a = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \right)$$

Donc P est constant ou $P = X$.

Synthèse. Réciproquement, il est clair que les polynômes constants et le polynôme X satisfont aux hypothèses.

Bilan.

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P \circ P = P\Big\} = \mathbb{K}_0[X] \cup \{X\}$$

(iv) Le polynôme nul satisfait la condition.
Soit P un polynôme non nul vérifiant la condition de l'énoncé.
On peut donc trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ (nécessairement non nul, car P l'est) tel que $Q^2 = XP^2$.
En passant au degré, on obtient $2 \deg Q = \deg X + \deg P^2 = 1 + 2 \deg P$.
On obtient une égalité entre un nombre pair et un nombre impair.

Bilan.

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X], Q^2 = XP^2\Big\} = \{0\}.$$

1. Écrire explicitement la somme. Et vérifier que les deux membres de la formule sont égaux.
2. En utilisant trois fois la formule du binôme de Newton, on a :

$$A = (1+X)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} X^n \qquad \text{et} \qquad B = (1+X)^q = \sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n} X^n$$

et

$$C = (1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q} = \sum_{n=0}^{p+q} \binom{p+q}{n} X^n$$

Par ailleurs, le coefficient de degré n du produit $C = AB$ est, d'après la formule définissant le produit de deux polynômes, égal à

$$\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

En identifiant les coefficients, on en déduit la *formule de convolution de Vandermonde* :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{m}{m-i} && \text{(symétrie des coefficients binomiaux)} \\ &= \binom{2m}{m}. && \text{(convolution de Vandermonde)} \end{aligned}$$

105

Le coefficient en X^{2p} du polynôme $(X^2-1)^{2n}$ est $\binom{2n}{p}(-1)^p$.

Le coefficient en X^{2p} du polynôme $(X-1)^{2n}(X+1)^{2n}$ est $\displaystyle\sum_{i+j=2p}\binom{2n}{i}\binom{2n}{j}(-1)^j$.

D'où

$$\sum_{i+j=2p}\binom{2n}{i}\binom{2n}{j}(-1)^j = \binom{2n}{p}(-1)^p$$

En particulier, pour $p=n$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{2n}{k}=\binom{2n}{n}(-1)^n$.

D'où la formule avec la symétrie du coefficient binomial.

1. On obtient
$$\begin{array}{rcl} P_2 &=& 4X^2-2 \\ P_3 &=& -8X^3+12X \\ P_4 &=& 16X^4-48X^2+12. \end{array}$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ l'assertion

   « $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n 2^n$. »

   ou encore, pour faciliter la présentation du raisonnement :

   « il existe $R_{n-1}\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P_n=(-1)^n 2^n X^n + R_{n-1}$ »

   Montrons $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ par récurrence double.

   Initialisation. On a évidemment $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.

   Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$. On a alors
$$\begin{array}{rcll} P_{n+2} &=& -2XP_{n+1}-2(n+1)P_n & \\ &=& -2X\Big((-1)^{n+1}2^{n+1}X^{n+1}+R_{n+1}\Big) \;-\; 2(n+1)\Big((-1)^n 2^n X^n + R_{n-1}\Big) & \text{d'après } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \\ &=& (-1)^{n+2}2^{n+2}X^{n+2} \;-\; \underbrace{2XR_n}_{\in\mathbb{K}_{n+1}[X]} \;-\; \underbrace{2(n+1)(-1)^n 2^n X^n}_{\in\mathbb{K}_n[X]} \;-\; \underbrace{2(n+1)R_{n-1}}_{\in\mathbb{K}_{n-1}[X]} & \end{array}$$

   D'où P_{n+2} s'écrit $(-1)^{n+2}2^{n+2}X^{n+2}+S_{n+1}$ où S_{n+1} est dans $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
   D'où $\mathcal{H}_{n+2}$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ l'assertion $P_n(-X)=(-1)^nP_n$.
   Montrons $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{H}_n$ par récurrence double.

   Initialisation. On a $P_0(-X)=1=P_0$ et $P_1(-X)=2X=-P_1$, d'où $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.

   Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$. On a alors
$$\begin{array}{rcll} P_{n+2}(-X) &=& -2(-X)P_{n+1}(-X)-2(n+1)P_n(-X) & \\ &=& 2X(-1)^{n+1}P_{n+1}-2(n+1)(-1)^nP_n & \text{(d'après } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1}) \\ &=& (-1)^n\left(-2XP_{n+1}-2(n+1)P_n\right) & \\ &=& (-1)^{n+2}P_{n+2} & \text{(car } (-1)^{n+2}=(-1)^n), \end{array}$$

   D'où $\mathcal{H}_{n+2}$.

   On en déduit que le polynôme P_n est pair si n est pair et impair sinon.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   Comme P_{2n+1} est un polynôme impair d'après la question précédente, on a $P_{2n+1}(0)=0$.

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} P_{2n+2}(0) &= \left(-2XP_{2n+1}-2(2n+1)P_{2n}\right)(0) \\ &= -2(2n+1)P_{2n}(0). \end{aligned}$$

   Par une récurrence immédiate (comme $P_0(0)=1$), cela montre que
$$\begin{aligned} P_{2n}(0) &= (-1)^n2^n(2n-1)(2n-3)\cdots 5\times 3\times 1 \\ &= (-1)^n2^n\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\times 2} \\ &= (-1)^n2^n\frac{(2n)!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\ &= (-1)^n2^n\frac{(2n)!}{2^n\,n!} \\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}. \end{aligned}$$

107

Les règles de calcul dans $\mathbb{K}[X]$ permettent notamment de factoriser la différence $P^3 - Q^3$:

$$P^3 - Q^3 = (P - Q)(P^2 + PQ + Q^2).$$

Comme P et Q sont distincts, $P - Q \neq 0$, donc $\deg(P - Q) \geqslant 0$ et l'on en déduit

$$\begin{aligned}\deg\left(P^3 - Q^3\right) &= \deg\left(P - Q\right) + \deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right) \\ &\geqslant \deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right). \qquad (\heartsuit)\end{aligned}$$

Notons maintenant α (resp. β) le coefficient dominant de P (resp. Q), de telle sorte que l'on peut décomposer ces polynômes avec leur terme dominant comme suit :

$$P = \alpha X^n + P_0 \qquad \text{et} \qquad Q = \beta X^n + Q_0,$$

où $P_0, Q_0 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
On a donc

$$\begin{aligned}P^2 &= \left(\alpha X^n + P_0\right)^2 \\ &= \alpha^2 X^{2n} + 2\underbrace{\alpha X^n P_0}_{\in \mathbb{K}_{2n-1}[X]} + \underbrace{P_0^2}_{\in \mathbb{K}_{2n-2}[X]} \\ &= \alpha^2 X^{2n} + R_1,\end{aligned}$$

où $R_1 = 2\alpha X^n P_0 + P_0^2 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$.
De la même façon, on peut trouver $R_2, R_3 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ tels que $PQ = \alpha\beta X^{2n} + R_2$ et $Q^2 = \beta^2 X^{2n} + R_3$.
En notant $R = R_1 + R_2 + R_3 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$, on trouve donc

$$P^2 + PQ + Q^2 = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) X^{2n} + R. \qquad (\spadesuit)$$

Le point-clef est maintenant que la non-nullité de α et β entraîne que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ (et cette quantité est donc non nulle).
Avant de démontrer ce fait, constatons qu'il permet de conclure : l'égalité ($\spadesuit$) montre en effet alors que $\deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right) = 2n$, et l'inégalité ($\heartsuit$) montre donc que $\deg(P^3 - Q^3) \geqslant 2n$.

Pour montrer que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$, proposons plusieurs démonstrations

En se ramenant à une identité remarquable. On distingue deux cas.

— Si α et β sont du même signe, $\alpha\beta > 0$. On en déduit alors que $\alpha\beta > -2\alpha\beta$, donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geqslant 0.$$

— De même, si α et β sont de signes opposés, on a $0 > \alpha\beta > 2\alpha\beta$, donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geqslant \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \geqslant 0.$$

Grâce à la forme canonique d'un trinôme. On peut appliquer la manipulation qui permet d'obtenir la factorisation canonique d'un trinôme, c'est-à-dire essayer de reconnaître dans une somme le début du développement du carré. On a alors

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \beta^2 \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2.\end{aligned}$$

Cette quantité est donc la somme d'un carré de nombre réel et de $\frac{3}{4}\beta^2 > 0$, donc elle est strictement positive.

En se ramenant à un trinôme. Comme $\beta \neq 0$, on peut factoriser

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \beta^2\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} + 1\right).$$

Le trinôme du second degré $X^2 + X + 1$ ayant un discriminant < 0, on en déduit

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0,$$

comme voulu.

Grâce aux complexes. Posons $z = e^{i\pi/3}$. On a $|z| = 1$ et $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
|\alpha + \beta z|^2 &= \overline{(\alpha + \beta z)}(\alpha + \beta z) \\
&= (\alpha + \beta \overline{z})\,(\alpha + \beta z) && \text{(car } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\text{)} \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta\,(z + \overline{z}) + \beta^2 z\overline{z} \\
&= \alpha^2 + 2\alpha\beta \operatorname{Re}(z) + \beta^2\,|z|^2 \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2.
\end{aligned}$$

Comme $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta z$ n'est pas nul (il suffit par exemple de regarder sa partie imaginaire), donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = |\alpha + \beta z|^2 > 0.$$

108

Dans chacun des cas, on peut effectuer la division euclidienne de $A \in \mathbb{R}[X]$ par $B \in \mathbb{R}[X]$, qui est de degré 2.
On peut donc trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $A = BQ + R$.
En notant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les coefficients de R, on obtient donc l'égalité

$$A = BQ + \alpha X + \beta, \tag{$*$}$$

et il s'agit de déterminer α et β.

(i) On évalue $(*)$ en 1 et en 2, qui sont les racines de B. On obtient ainsi

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{et} \qquad 2^n = \alpha \times 2 + \beta.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer l'unique polynôme affine $R = \alpha X + \beta$ tel que $R(1) = 1$ et $R(2) = 2^n$. Après calcul, on obtient $\alpha = 2^n - 1$ et $\beta = 2 - 2^n$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est

$$(2^n - 1)X + (2 - 2^n).$$

(ii) On évalue $(*)$ en 1, qui est l'unique racine de B. On obtient ainsi

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Pour exploiter le fait que 1 est racine double de B, on va également dériver la relation $(*)$, puis évaluer la relation dérivée en 1. Ainsi, $A' = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + \alpha$ d'où $nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + \alpha$ puis, en évaluant 1, on trouve $n = \alpha$.
On en déduit $\beta = 1 - \alpha = 1 - n$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ est

$$nX + (1 - n).$$

(iii) Le polynôme B possède deux racines qui sont cette fois-ci non réelles : il s'agit de $\pm i$.
En évaluant $(*)$ en i, on obtient

$$(i \sin t + \cos t)^n = \alpha i + \beta \qquad \text{donc} \qquad e^{int} = \alpha i + \beta.$$

(On pourrait également évaluer en $-i$, mais on n'obtiendrait alors rien d'autre que la relation conjuguée, ce qui ne nous apporterait pas de nouvelle information).
On obtient ainsi

$$\alpha = \operatorname{Im} e^{int} = \sin(nt)$$
$$\beta = \operatorname{Re} e^{int} = \cos(nt).$$

Ainsi, le reste dans la division euclidienne de $(X \sin t + \cos t)^n$ par $(X-1)^2$ est

$$\sin(nt)X + \cos(nt).$$

109

Solution. à rédiger !

Autre solution sans nombres complexes, mais avec une récurrence sur n, alors qu'au début de l'exercice n est fixé !
Cela nécessite de connaître le résultat !
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^2+1 est $\alpha_n X + \beta_n$ où

$$\alpha_n = \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Initialisation. Montrons que la propriété est vraie au rang 0.
D'une part, la division euclidienne de $(X+1)^0$ par X^2+1 s'écrit

$$(X+1)^0 \quad = \quad (X^2+1) \times 0_{\mathbb{R}[X]} \; + \; 0X+1$$

D'autre part, on a $\alpha_0 = \sqrt{2}^0 \sin 0 = 0$ et $\beta_0 = \sqrt{2}^0 \cos 0 = 1$.
Ainsi, le reste de la division euclidienne de $(X+1)^0$ par X^2+1 s'écrit $\alpha_0 X + \beta_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie au rang n.
Ainsi, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$(X+1)^n \quad = \quad (X^2+1)Q_n \; + \; \alpha_n X + \beta_n$$

Multiplions par $X+1$, on obtient :

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)(X+1)Q_n \; + \; (X+1)(\alpha_n X + \beta_n)$$

ou encore :

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)(X+1)Q_n \; + \; \alpha_n X^2 + (\alpha_n + \beta_n)X + \beta_n$$

Écrivons $\alpha_n X^2$ sous la forme $\alpha_n(X^2+1) - \alpha_n$. On obtient

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)(X+1)Q_n \; + \; \alpha_n(X^2+1) \; + \; (\alpha_n+\beta_n)X + (\beta_n - \alpha_n)$$

D'où

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)\Big((X+1)Q_n + \alpha_n\Big) \; + \; (\alpha_n+\beta_n)X + (\beta_n - \alpha_n)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\alpha_n + \beta_n = \alpha_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \beta_n - \alpha_n = \beta_{n+1}$$

On a

$$\alpha_{n+1} \; = \; \sqrt{2}^{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \; = \; \sqrt{2}^{n+1}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \; + \; \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

En utilisant que $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$\alpha_{n+1} \; = \; \sqrt{2}^n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \; + \; \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

ce qui s'écrit $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$.
On procède de même pour β_{n+1}.
La propriété au rang $n+1$ est donc vraie.

111

Le reste de la division euclidienne de X^a par X^b-1 est X^r si et seulement si $\begin{cases} X^b - 1 \mid X^a - X^r \\ \deg(X^r) < \deg(X^b - 1) \end{cases}$

Comme $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$, la deuxième condition sur le degré est vérifiée.
Reste à montrer la divisibilité.
On a

$$X^a - X^r \;=\; X^{bq+r} - X^r \;=\; X^r((X^b)^q - 1)$$

L'égalité de Bernoulli dit que $X^b - 1$ divise $(X^b)^q - 1$, a fortiori divise $X^r((X^b)^q - 1)$, donc divise $X^a - X^r$.

112

Le mot clé est « Bernoulli ».
Supposons que $a = bq$.
Alors $X^a - 1 = (X^b)^q - 1^q$. Ce dernier polynôme est divisible par $X^b - 1$ (merci Bernoulli).

113

On peut fournir deux preuves.

1. À vous. En utilisant les racines de X^2+X+1, à savoir j et $\mathrm{j}^2=\bar{\mathrm{j}}$.
2. Ici, on s'interdit d'invoquer $\mathbb{C}$.
   - Commençons par montrer le lemme suivant

     Lemme pratique.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, Q_n \in \mathbb{R}[X], \quad X^{3n} = (X^3-1)Q_n + 1$$

L'identité de Bernoulli stipule que le polynôme $A^n - B^n$ est divisible par $A-B$. En utilisant cela avec $A = X^3$ et $B=1$, on obtient que $X^{3n}-1$ est divisible par X^3-1. Ainsi il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^{3n}-1 = (X^3-1)Q_n$, d'où le lemme.

On applique ce lemme avec les entiers p, q, r. Donc il existe Q_p, Q_q et Q_r tels que

$$X^{3p} = (X^3-1)Q_p + 1 \qquad X^{3q} = (X^3-1)Q_q + 1 \qquad X^{3r} = (X^3-1)Q_r + 1$$

En utilisant l'égalité $X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r} = X^{3p}X^2 + X^{3q}X + X^{3r}$, on en déduit

$$X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r} = \Big((X^3-1)Q_p + 1\Big)X^2 + \Big((X^3-1)Q_q + 1\Big)X + \Big((X^3-1)Q_r + 1\Big)$$

D'où

$$X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r} = (X^3-1)\Big(X^2Q_p + XQ_q + Q_r\Big) + (X^2+X+1)$$

Or $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$, d'où

$$X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r} = (X^2+X+1)\Big[(X-1)\Big(X^2Q_p + XQ_q + Q_r\Big) + 1\Big]$$

On a donc montré que X^2+X+1 divise $X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r}$.

114

Deux preuves au moins.

— Une première preuve en posant la division euclidienne. On trouve :

$$X^4+X^3-\lambda X^2+\mu X+2 \;=\; (X^2+2)\big(X^2+X+(\lambda-2)\big) \;+\; \Big((\mu-2)X+(-2\lambda+6)\Big)$$

La CNS est donc que le reste soit nul, c'est-à-dire que $\mu-2=0$ et $-2\lambda+6=0$, d'où $(\lambda,\mu)=(3,2)$.

— Une avec les racines de X^2+2 (chausser ses lunettes : il y a un système somme-différence à voir).

Notons $P=X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Comme on cherche une condition *nécessaire et suffisante*, il serait bon de raisonner directement par équivalence. Cela va être faisable grâce au cours, et au fait que l'on résout ensuite un système linéaire (par équivalence).

On a la factorisation $X^2+2=(X+\mathrm{i}\sqrt{2})(X-\mathrm{i}\sqrt{2})$.

D'après le cours, on a l'équivalence

$$X^2+2 \text{ divise } P \iff \mathrm{i}\sqrt{2} \text{ et } -\mathrm{i}\sqrt{2} \text{ sont racines de } P$$

En évaluant P en $\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{2}$, on obtient donc les deux égalités suivantes qui sont équivalentes à l'assertion initiale :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 4 & - & \mathrm{i}2\sqrt{2} & - & 2\lambda & + & \mathrm{i}\sqrt{2}\mu & + & 2 & = & 0 \\ 4 & + & \mathrm{i}2\sqrt{2} & - & 2\lambda & - & \mathrm{i}\sqrt{2}\mu & + & 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda & - & \mathrm{i}\sqrt{2}\mu & = & 6-2\sqrt{2}\mathrm{i} \\ 2\lambda & + & \mathrm{i}\sqrt{2}\mu & = & 6+2\sqrt{2}\mathrm{i} \end{array}\right.$$

Par somme et différence (on ne perd pas les équivalences, WHY ?), on a

$$\lambda=3 \qquad \text{et} \qquad \mu=2$$

115

Écrire explicitement la division euclidienne en fonction de a et b.
On trouve

$$X^4 - X + a \;=\; (X^2 - bX + 1)\big(X^2 + bX + (b^2 - 1)\big) + (b^3 - 2b - 1)X + (a - b^2 + 1)$$

Puis imposer au reste d'être nul. On trouve

$$\begin{cases} b^3 - 2b - 1 = 0 \\ a = b^2 - 1 \end{cases} \qquad \text{qui est équivalent à} \qquad \begin{cases} (b+1)(b^2 - b - 1) = 0 \\ a = b^2 - 1 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = (-1)^2 - 1 \end{cases} \qquad \text{OU} \quad \begin{cases} b^2 - b - 1 = 0 \\ a = b^2 - 1 \quad \text{qui vaut } b \text{ d'après la ligne précédente} \end{cases}$$

D'où $(a, b) = (0, -1)$ ou bien $\begin{cases} b = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ a = b \end{cases}$.

D'où 3 couples solutions.

1. Écrivons P comme combinaison linéaire de X^k.
   Constatons que $P \circ A - P \circ B$ est alors combinaison linéaire de $A^k - B^k$ pour $k \geqslant 1$ (que devient le terme pour $k = 0$?).
   Or $A - B$ divise $A^k - B^k$ en vertu de l'égalité de Bernoulli.
   Par transitivité, on en déduit que $A - B$ divise $P \circ A - P \circ B$.
   On a donc
   $$P \circ A - P \circ B \; = \; (A - B) \times \text{qq chose}$$
2. On a $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$.
   Donc il suffit de montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.

   On applique la question précédente à $A = P$ et $B = X$.
   D'où $P - X$ divise $P \circ P - P$.
3. Posons $P = X^2 + 3X + 1$.
   On a
   $$P \circ P - X \; = \; (X^2 + 3X + 1)^2 + 3(X^2 + 3X + 1) + 1 \; - \; X \; = \; (X^2 + 3X + 1)^2 + 3X^2 + 8X + 4$$
   Et on a
   $$P - X \; = \; X^2 + 2X + 1 \; = \; (X + 1)^2$$
   D'après la question précédente, on sait que $(X + 1)^2$ divise $(X^2 + 3X + 1)^2 + 3X^2 + 8X + 4$.
   On identifie le quotient (par exemple en identifiant les coefficients) et on trouve
   $$Q = X^2 + 4X + 5$$
   Reste à trouver les racines de ce polynôme (à vous) et à conclure (à vous).

   Les solutions de l'équation $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$ sont donc ...

118

Supposons qu'un tel polynôme P existe.
Ainsi, il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A,\ P(x) = \ln(x)$.
Les deux fonctions qui interviennent sont dérivables. On a donc :

$$\forall\, x \geqslant A,\ P'(x) = \frac{1}{x}$$

D'où

$$\forall\, x \geqslant A,\ xP'(x) = 1$$

On en déduit que les polynômes XP' et 1 coïncident sur un ensemble infini à savoir $[A, +\infty[$.
Donc ils sont égaux.
À cet instant, on a donc $XP' = 1$.
En appliquant le degré, on a $1 + \deg P' = 0$, égalité de $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ qui n'a pas de solution.
D'où l'absurdité.
On peut aussi remarquer que $XP' = 1$ fournit $0 = 1$ en évaluant en 0.

Solution de Tigrane Ponsin (2022-2023). Exploiter le fait que $\ln(x^2) = 2\ln x$ pour obtenir $P(X^2) = 2P(X)$, d'où $2\deg P = \deg P$, d'où P est constant. Mais la fonction ln n'est pas constante !
On peut terminer légèrement différemment.
Comme P est constant, l'égalité $P(X^2) = 2P(X)$ fournit $a = 2a$ d'où $a = 0$, mais la fonction logarithme n'est pas nulle.

Autre preuve de Benoît Faure (2024-2025).
Le polynôme P n'est pas nul. Il a un degré entier. Dériver plus de fois que le degré, donc dériver $n+1$ fois.
On obtient une contradiction.

Autre preuve. Le polynôme P n'est pas nul. Il a un degré $d \in \mathbb{N}$.
On regarde ce qui se passe asymptotiquement en $+\infty$: on obtient $ax^d \sim \ln x$.
Contradiction par croissances comparées.

(i) Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(k) = \frac{1}{k}$.
On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ kP(k) = 1$.
Les polynômes XP et 1 coïncident sur $\mathbb{N}^*$, qui est une partie infinie.
Donc ils sont égaux, c'est-à-dire $XP = 1$.
En évaluant en 0, on trouve $0 = 1$, ce qui est absurde.

(ii) Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(k) = \sqrt{k^2+1}$.
D'où $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(k)^2 = k^2 + 1$.
Les polynômes P^2 et $X^2 + 1$ coïncident en une infinité de points.
Donc ils sont égaux, c'est-à-dire $P^2 = X^2 + 1$.
Appliquons le degré, on a donc $2 \deg P = 2$, donc $\deg P = 1$.
Comme tout polynôme à coefficients réels de degré 1 possède une racine réelle, on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 1$.
En évaluant en x_0 l'égalité $P^2 = X^2 + 1$, on trouve

$$\underbrace{P(x_0)^2}_{=0} = x_0^2 + 1$$

Or $x_0^2 + 1 > 0$ (car x_0 est un réel), donc est non nul, d'où la contradiction.

(iii) Supposons par l'absurde pouvoir trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(k) = 3^k.$$

Il est déjà clair qu'un tel polynôme P ne peut pas être nul.
On peut alors écrire $P = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell X^\ell$ avec $a_d \neq 0$. On a $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_d x^d$.
On a alors $a_d\, k^d \underset{k\to+\infty}{\sim} 3^k$.
D'où l'absurdité par croissance comparée (on a $k^d = \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}(3^k)$).

Deuxième preuve, plus savante.
Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme P tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = 3^k$.
Donc P est non nul.
Notons $d = \deg P \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\quad P(k+1) - P(k) &= 3^{k+1} - 3^k \\ &= 2 \times 3^k \\ &= 2P(k).\end{aligned}$$

Ainsi, la différence $P(X+1) - P(X)$ et $2P$ coïncident sur une infinité de valeurs.
D'où $P(X+1) - P(X) = 2P$.
Appliquons le degré.
On a $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant d - 1$ (WHY ?) et $\deg 2P = d$. D'où la contradiction.
Justifions le WHY qui n'est pas du tout évident.
Notons α le coefficient dominant de P, ainsi αX^d est le coefficient dominant de P.
On peut donc trouver $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ tel que $P = \alpha X^d + R$.
On a alors

$$\begin{aligned}P(X+1) - P(X) &= \big(\alpha(X+1)^d + R(X+1)\big) - \big(\alpha X^d + R(X)\big) \\ &= \alpha \left[\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} X^k - X^d\right] + R(X+1) - R(X) \\ &= \underbrace{\alpha \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k}_{\in \mathbb{K}_{d-1}[X]} + R(X+1) - R(X).\end{aligned}$$

Or $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, donc on a aussi $R(X+1) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$. Par combinaison linéaire, on en déduit que $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

1. Le polynôme $\widetilde{L_0} = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ convient.

   Ce polynôme est bien de degré n et admet les x_i comme racines.
2. Considérons le polynôme $\widetilde{L_0}$ précédent.

   Son évaluation en x_0 est non nulle : elle vaut $\widetilde{L_0}(x_0) = \prod_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)$, qui est non nul car les x_j sont deux à deux distincts.

   Posons $L_0 = \dfrac{1}{\widetilde{L_0}(x_0)}\widetilde{L_0}$ (licite d'après la phrase précédente).

   Ce polynôme est de degré n, vérifie $L_0(x_0) = 1$ et admet $x_1, \dots, x_n$ comme racines.

   Résumons. Le polynôme L_0 cherché (on démontre en fait qu'il est unique) est :

$$L_0 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{X - x_i}{x_0 - x_i}$$

3. Il suffit de poser

$$L_k = \frac{1}{\prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{k\}}(x_k - x_j)} \prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{k\}}(X - x_j)$$

   qui s'écrit encore

$$L_k = \prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{k\}} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

4. — **Existence.** Considérons $P = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$.

   Le polynôme P est une combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
   Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Calculons $P(x_i)$.
   On a donc

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}} y_k \underbrace{L_k(x_i)}_{=0} + \sum_{k\in\{i\}} y_k \underbrace{L_k(x_i)}_{=1} = y_i.$$

   — **Unicité.**
   Prenons deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant la condition. Alors ils coïncident en $n+1$ points (et sont de degré $\leqslant n$), donc ils sont égaux.
5. **Première solution.**
   Un tel polynôme Q est unique d'après la question précédente, et s'exprime à l'aide des polynômes de Lagrange.
   Considérons les polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ associés aux points $1, 2, \dots, n$.
   Ainsi,

$$L_k = \prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} \frac{X - j}{k - j}$$

   Le polynôme cherché vaut $Q = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} L_k$.

   On souhaite calculer $Q(-1)$.

   Pour cela, calculons les $\frac{1}{k}L_k(-1)$.

   On peut conjecturer cette valeur en calculant ce terme pour $k = 1$, puis $k = 2$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}L_k(-1) &= \frac{1}{k}\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} \frac{-1-j}{k-j} \\
&= \frac{1}{k}\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} (-1-j) \times \frac{1}{\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}(k-j)} \\
&= \frac{1}{k}\times(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{k+1}\times\frac{1}{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,k-1]\!]}(k-j)\prod_{j\in[\![k+1,n]\!]}(k-j)} \\
&= \frac{1}{k}\times(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{k+1}\times\frac{1}{(k-1)!\times(-1)^{n-k}(n-k)!} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

On a donc

$$Q(-1) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}L_k(-1) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} \;=\; \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i}\binom{n+1}{i}$$

On reconnaît la somme alternée des coefficients binomiaux amputée de ses deux premiers termes.
On rappelle que la somme alternée des coefficients binomiaux est nulle, exceptée lorsque l'on est à la ligne numéro 0 du triangle de Pascal (ce qui n'est pas ici, car $n+1$ est supérieur à 1).
Reprenons :

$$Q(-1) \;=\; 0-\left((-1)^0\binom{n+1}{0}+(-1)^1\binom{n+1}{1}\right) \;=\; -\Big(1-(n+1)\Big) \;=\; n$$

Autre solution (moins calculatoire, mais plus astucieuse).
Soit $Q\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall\, k\in[\![1,n]\!], Q(k)=\frac{1}{k}$ (un tel polynôme existe et est unique d'après la question précédente).
Posons $P = XQ-1$.
C'est un polynôme qui appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ et qui vérifie

$$P(0)=-1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ P(k)=0$$

Considérons $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que $\forall\, k\in[\![0,n]\!]$, $x_k=k$
Posons également $y_0=-1$, $y_1=0$, $\ldots$, $y_n=0$.
On a donc $\forall\, i\in[\![0,n]\!]$, $P(x_i)=y_i$.
D'après la question précédente, P est unique.
Comme on connaît n racines, et une évaluation, on a nécessairement :

$$P \;=\; -\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X-j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(-j)} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad P=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{j=1}^{n}(X-j)$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
P(-1) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{j=1}^{n}(-1-j) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(-1)^n\prod_{j=1}^{n}(1+j) \\
&= -\frac{(n+1)!}{n!} \\
&= -(n+1)
\end{aligned}$$

Comme $P(-1) = -Q(-1) - 1$, on en déduit $Q(-1) = n$.

1. Presque facile !
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P.
   Par récurrence, on montre que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a^{2^n} \text{ est une racine de } P$$
   Comme le polynôme P est non nul, il n'a qu'un nombre fini de racines.
   Ainsi, l'ensemble $\left\{a^{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est fini.
   On peut donc trouver deux entiers $n \neq m$ tels que $a^{2^n} = a^{2^m}$.
   Quitte à échanger n et m, on peut supposer $n > m$.
   En divisant de part et d'autre par a^{2^n} (ce qui est licite car $a \neq 0$), on obtient $a^{2^n - 2^m} = 1$.
   On a trouvé $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^p = 1$.
   Donc a est une racine de l'unité.
3. • Par l'absurde, supposons 0 racine de P.
   Alors d'après la question 1, le scalaire $(0+1)^2 = 1$ est aussi racine de P.
   Puis, à nouveau avec la question 1, le scalaire $(1+1)^2 = 4$ est aussi racine de P.
   La question 2 implique alors que 4 est une racine de l'unité, d'où la contradiction !

   • Par l'absurde, supposons -1 racine de P.
   Alors d'après la question 1, le scalaire $(-1+1)^2 = 0$ est aussi racine de P.
   Contradiction avec le point précédent.
4. On va montrer que $\begin{cases} |\beta| = 1 \\ |\beta+1| = 1 \end{cases}$ ce qui fournira (WHY ?) que $\beta \in \{j, j^2\}$ (faire un dessin).
   • Par hypothèse, β est racine de P.
   D'après la question 3, β n'est pas nul.
   D'après la question 2, β est une racine de l'unité, donc a fortiori est de module 1.
   Cela montre la première égalité $|\beta| = 1$.
   • Par hypothèse, β est racine de P.
   D'après la question 1, le scalaire $(\beta+1)^2$ est racine de P, et est non nul d'après la question 3.
   D'après la question 2, $(\beta+1)^2$ est une racine de l'unité, donc a fortiori est de module 1.
   D'où la deuxième égalité $|\beta+1| = 1$.

   Justification. Montrons $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases} \implies z \in \{j, j^2\}$

   Par le dessin.
   L'ensemble des complexes z tels que $|z| = 1$ est le cercle trigonométrique.
   L'ensemble des complexes z tels que $|z+1| = 1$ est le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1.
   Ces deux cercles s'intersectent en deux points qui sont équidistants des points $O = (0, 1)$ et $\Omega = (-1, 0)$ et donc sont sur la médiatrice du segment $[O\Omega]$ qui est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
   Ainsi, ces deux points ont une abscisse égale à $-\frac{1}{2}$ et comme ils sont sur le cercle trigonométrique leur ordonnée vaut $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Ces deux points ont donc pour affixe j et j^2.

   Par le calcul.

   Rappel. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*
   $$\begin{aligned} |z+1|^2 &= (z+1)(\overline{z+1}) \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 \end{aligned}$$
   Plus généralement, pour tous $z, \omega \in \mathbb{C}$, on a :
   $$\begin{aligned} |z+\omega|^2 &= (z+\omega)(\overline{z+\omega}) \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{\omega}) + |\omega|^2 \end{aligned}$$

On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases}
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z+1|^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 1 + 2\operatorname{Re}(z) + 1 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = 1 \\ \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \operatorname{Im}(z)^2 = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \operatorname{Im}(z) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff z \in \{j, j^2\}
\end{aligned}
$$

122

On écrit le polynôme sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où *a priori*, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.
Cela permet de définir le polynôme conjugué

$$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k \in \mathbb{C}[X].$$

On voit directement que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} t^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k} = \overline{P(t)}.$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$, on a automatiquement $P(\alpha) = \overline{P}(\alpha)$.
L'hypothèse de l'énoncé entraîne donc que P et $\overline{P}$ coïncident sur un ensemble infini.
D'où $P = \overline{P}$.
En identifiant les coefficients, on obtient $\forall k \in [\![0, n]\!], \overline{a_k} = a_k$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $P \in \mathbb{R}[X]$.

(i) Si $\deg P \geqslant 1$, on sait que $\deg P' = \deg P - 1$, ce qui entraîne $P \neq P'$.
Si $\deg P \leqslant 0$, on a $P' = 0$, donc P ne peut être égal à P' que si $P = 0$.
Ainsi, $\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P = P'\right\} = \{0\}$.

(ii) On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(P')^2 = 4P$. On distingue deux cas :

— Si $\deg P \leqslant 0$, $P' = 0$, donc $P = 0$.

— Supposons $\deg P \geqslant 1$. On a alors $\deg P' = \deg P - 1$. On a alors

$$\deg(P')^2 = 2\deg P' = 2\deg P - 2 \quad \text{et} \quad \deg(4P) = \deg P,$$

d'où il vient $2\deg P - 2 = \deg P$ et donc $\deg P = 2$.
On peut donc trouver $a \in \mathbb{K}^*$ et $b, c \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On a alors la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
(P')^2 = 4P \quad & \text{donc} \quad (2aX+b)^2 = 4(aX^2+bX+c) \\
& \text{donc} \quad 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \\
& \text{donc} \quad \begin{cases} 4a^2 = 4a \\ 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases} \qquad \text{(par identification des coefficients)} \\
& \text{donc} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 4c, \end{cases} \qquad \text{(car } a \neq 0\text{).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$.

Synthèse. Réciproquement, on vérifie directement que le polynôme nul et, pour tout $b \in \mathbb{K}$, le polynôme $X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$, vérifient la condition de l'énoncé.

In fine,

$$\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid (P')^2 = 4P\right\} = \{0\} \cup \left\{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \mid b \in \mathbb{K}\right\}$$

(i) On constate que le polynôme est solution.
Montrons que c'est la seule solution.
Pour cela, supposons qu'il existe un polynôme *non nul* P tel que $P = P'$.
Comme $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on a $\deg P \in \mathbb{N}$.
Comme $P = P'$, on a $\deg P = \deg P'$.
Or $\deg P \leqslant \deg P' - 1$.
On en déduit $\deg P \leqslant \deg P - 1$ (ce qui serait possible si $\deg P$ était égal à $-\infty$).
Comme $\deg P \in \mathbb{N}$, en ajoutant $-\deg P$, on obtient $0 \leqslant -1$, d'où la contradiction.

(ii) Montrons que l'équation $P - XP' = X$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de solution.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P - XP' = X$.

Première solution d'Alfred – année 2021-2022

On a $P - XP' = X$.
Alors en dérivant, on obtient

$$P' - (P' + XP'') = 1$$

D'où $-XP'' = 1$.
Cette égalité montre que $P'' \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, donc $\deg P'' \in \mathbb{N}$.
En prenant les degrés, on a $1 + \deg P'' = 0$, ce qui conduit à $\deg P'' = -1$ qui n'est pas dans $\mathbb{N}$ d'où la contradiction.

Deuxième solution

Écrivons P sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
L'égalité $P - XP' = X$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \; - \; X \times \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \; = \; X$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (1-k) X^k \; = \; X$$

En examinant le coefficient en X^1, on a

$$a_1(1-1) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad 0 = 1$$

d'où la contradiction.

(iii) Résoudre l'équation $2P = XP'$.

Première solution

Analyse Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $2P = XP'$.

Écrivons P sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
L'égalité $2P = XP'$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \; = \; X \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \; = \; \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \; = \; \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad 2a_k = ka_k \qquad \text{ou encore} \qquad (2-k)a_k = 0$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \neq 2, \quad a_k = 0$$

Bilan de l'analyse : P est de la forme a_2X^2 avec $a_2 \in \mathbb{K}$.

Synthèse Vérifions que les polynômes de la forme aX^2 avec $a \in \mathbb{K}$ sont solutions.
Le membre gauche vaut $2P = 2aX^2$.
Le membre droit vaut $XP' = X \times 2aX = 2aX^2$.
D'où $2P = XP'$.

BILAN : les solutions sont les polynômes de la forme aX^2 avec $a \in \mathbb{K}$.

Deuxième solution par équivalences (mais attention, en général, c'est dangereux de raisonner par équivalence)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ que l'on écrit $\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} 2P = XP' &\iff \sum_{k=0}^{n} 2a_kX^k = \sum_{k=0}^{n} ka_kX^k \\ &\iff \forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad 2a_k = ka_k \\ &\overset{\text{WHY}}{\iff} \forall\, k \in [\![0,n]\!] \setminus \{2\}, \quad a_k = 0 \\ &\iff P = a_2X^2 \end{aligned}$$

(iv) **Analyse** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $mP = XP'$.

Écrivons P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
Si vous avez des doutes à la fin de la preuve, supposez dès maintenant que n est supérieur ou égal à m.
L'égalité $mP = XP'$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} ma_kX^k = X\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} ma_kX^k = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^k$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} ma_kX^k = \sum_{k=0}^{n} ka_kX^k$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad ma_k = ka_k \qquad \text{ou encore} \qquad (m-k)a_k = 0$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \neq m, \quad a_k = 0$$

Bilan de l'analyse : P est de la forme a_mX^m avec $a_m \in \mathbb{K}$.

Synthèse Vérifions que les polynômes de la forme aX^m avec $a \in \mathbb{K}$ sont solutions.
Le membre gauche vaut $mP = maX^m$.
Le membre droit vaut $XP' = X \times \begin{cases} maX^{m-1} & \text{si } m \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = maX^m$.
D'où $mP = XP'$.

BILAN : les solutions sont les polynômes de la forme aX^m avec $a \in \mathbb{K}$.

125

Vous devez trouver $\mathrm{Vect}(X+2)$.

Remarque. Cette équation est « linéaire en P ».
En effet, on cherche le noyau de $P \mapsto X(X+1)P'' + (X+2)P' - P$ qui est une application linéaire.
Ainsi, la solution doit être également « linéaire en P ».
Une famille génératrice permettra donc de décrire l'ensemble des solutions !

126

Le polynôme nul est solution.
Soit P non nul vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.
Notons $n = \deg P$ qui est donc un entier !
Si $n < 2$, alors $P'' = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Avec la relation, on trouve $P(2X) = 0$, puis $P = 0$ ce que l'on a exclu.
Ainsi, $n \geqslant 2$ et alors $\deg P'' = n - 2$ et $\deg P = n - 1$.
Par passage au degré dans la relation, on trouve $n = (n-1) + (n-2)$.
D'où $n = 3$.
On peut l'écrire avec ses coefficients et traduire l'égalité $P(2X) = P'(X)P''(X)$ à l'aide des coefficients.
On trouve $P = \frac{4}{9}X^3$.
Réciproquement, ce polynôme est bien solution.

L'ensemble des solutions est donc le doubleton $\left\{0_{\mathbb{K}[X]},\ \frac{4}{9}X^3\right\}$.

127

Le polynôme nul n'est pas solution.
Analyse. Soit P un polynôme non nul solution.
Appliquons le degré. On trouve que P est nécessairement de degré n.
Écrivons $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Comme $P_n - P_n' = X^n$, on a :

$$a_n X^n \; + \; \sum_{k=0}^{n-1} \big[a_k - (k+1)a_{k+1}\big] X^k \; = \; X^n$$

En identifiant les coefficients, on a alors

$$a_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad a_k = (k+1)a_{k+1}$$

Cela définit la famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de manière unique.

Synthèse. Posons $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est la famille définie par $\begin{cases} a_n = 1 \\ \forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad a_k = (k+1)a_{k+1} \end{cases}$
En remontant l'analyse, on a $P_n - P_n' = X_n$.
Bilan. Il existe un unique polynôme P_n tel que $P_n - P_n' = X^n$.

Expression explicite des coefficients.
Par récurrence descendante finie, on voit que les a_k sont non nuls.
Ensuite, fixons $j \in [\![0, n-1]\!]$ (et même dans $[\![0, n]\!]$ si l'on veut !). On a :

$$\prod_{k=j}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} \; = \; \prod_{k=j}^{n-1} (k+1)$$

d'où, par télescopage, $\dfrac{a_j}{a_n} = n(n-1)\cdots(j+1)$.
Comme $a_n = 1$, on obtient $a_j = \dfrac{n!}{j!}$.
Bilan : $P_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{n!}{j!} X^j$.

Autre preuve.

Analyse.

Soit P solution.
Le polynôme P n'est pas nul.
On a nécessairement $n = \deg P$.
En dérivant une fois $P' - P'' = nX^{n-1}$, puis $P'' - P^{(3)} = n(n-1)X^{n-2}$.
Par récurrence, on obtient

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad P^{(k)} - P^{(k+1)} \; = \; n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}$$

Par somme,

$$P - \underbrace{P^{(n+1)}}_{=0} \; = \; \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}$$

D'où

$$P \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$$

Synthèse. On vérifie que le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ est solution.

Unicité à la main.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Soit P_n et Q_n deux polynômes tels que ...
On a alors $P_n - P_n' = Q_n - Q_n'$.
D'où $P_n - Q_n = (P_n - Q_n)'$.
En considérant le degré, on a $P_n - Q_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

128

Le polynôme est divisible par son polynôme dérivé.
Désormais, cherchons les polynômes non nuls divisibles par leur polynôme dérivé.
Analyse. Soit P non nul tel que $P' \mid P$.
Alors P n'est pas constant, donc $n = \deg P$ est $\geqslant 1$.
Pour des raisons de degré, le quotient est de degré 1.
Ce quotient peut s'écrire $aX + b$, mais peut aussi s'écrire $\lambda(X - \alpha)$ (WHY ?).
On a alors

$$P = \lambda(X - \alpha)P'$$

En examinant les coefficients dominants, on a $\lambda = \dfrac{1}{n}$ où $n = \deg P$.
Ainsi,

$$nP \;=\; (X - \alpha)P'$$

On est ramené à une équation connue (enfin, si on a fait l'exercice en question).
Plusieurs possibilités s'offrent à nous, dont :

— Utiliser la formule de Taylor en α pour P et identifier les coordonnées dans la base de Taylor en α, et trouver que P est de la forme $a(X - \alpha)^n$.

— Établir une formule sur les polynômes dérivés successifs

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad (n-k)P^{(k)} \;=\; (X - \alpha)P^{(k+1)}$$

Puis évaluer en α et dire que α est racine de multiplicité au moins n. Or $n = \deg P$, donc on a toutes les racines, donc P s'écrit $a(X - \alpha)^n$.

— Établir une formule sur les polynômes dérivés successifs

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad (n-k)P^{(k)} \;=\; (X - \alpha)P^{(k+1)}$$

Puis considérer le produit de toutes ces égalités pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et obtenir

$$\prod_{k=0}^{n-1}(n-k) \;\times\; P^{(0)}P^{(1)}\cdots P^{(n-1)} \;=\; (X-\alpha)^n \;\times\; P^{(1)}\cdots P^{(n-1)}P^{(n)}$$

Comme P est de degré n, les polynômes $P^{(k)}$ est de degré $n-k$ et n'est donc pas le polynôme nul.
Ainsi, on peut simplifier par $P^{(1)}\cdots P^{(n-1)}$ et obtenir

$$n!\,P \;=\; (X-\alpha)^n\, P^{(n)}$$

Or $P^{(n)}$ est constant (WHY) et vaut $a\,n!$ où a est le coefficient dominant de P.
Ainsi, P est de la forme $a(X - \alpha)^n$.

— Après translation, se ramener à $nQ = XQ'$ (avec $Q = P(X + \alpha)$), résoudre cette équation en Q avec la base canonique, trouver que Q est de la forme aX^n, puis revenir à P en disant que P s'écrit $a(X - \alpha)^n$.

Synthèse. Soit P un polynôme de la forme $a(X - \alpha)^n$ avec $a \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On vérifie qu'un tel polynôme est divisible par son polynôme dérivé.

130

Soit $n \in \mathbb{N}$ un majorant du degré de P.
D'après la formule de Taylor, on a

$$P \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \;=\; P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

On a donc

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

On a $\forall\, x \in [a, +\infty[,\ x - a \geqslant 0$, d'où $(x-a)^k \geqslant 0$.
De plus, par hypothèse, on a $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(a)$.
Donc tous les termes de la somme de droite sont $\geqslant 0$, ce qui montre que

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) \geqslant P(a) > 0.$$

On en déduit que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

— La linéarité n'est pas difficile : elle résulte de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation.

— Montrons l'injectivité de Ψ. Prenons un polynôme du noyau de Ψ. Alors il est de degré $\leqslant n$ et admet a comme racine de multiplicité au moins $n+1$. Donc c'est le polynôme nul.

— Montrons la surjectivité. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k$.

On montre que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et que $\Psi(P) = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$.

— **Conclusion.** L'application Ψ est un isomorphisme et on a

$$\begin{array}{rccc} \Psi^{-1} : & \mathbb{K}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k \end{array}$$

— **Remarque (1).** En exploitant la formule de Taylor, on peut montrer directement la bijectivité de Ψ.

— **Remarque (2).** En algèbre linéaire, on apprend que « une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension est un isomorphisme ».

Ce résultat peut être appliqué ici car $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ qui vaut également $\dim \mathbb{K}^{n+1}$.

— **Remarque (3).** Une autre façon de montrer que Ψ est un isomorphisme est de montrer que Ψ est une application linéaire qui transforme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ en une base de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Un petit calcul montre que

$$\begin{array}{rcl} \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \Psi(X^k) & = & (0, \ldots, 0, k!, 0, \ldots, 0) \\ & = & k!\; e_{k+1} \end{array}$$

où $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Ainsi, Ψ transforme la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ en la famille $\big(k!\, e_{k+1}\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$ qui est une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ (WHY ?).

(i) On a $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$, donc $P(1) = 0$.
Puis $P' = 5X^4 - 16X^3 + 21X^2 - 14X + 4$, donc $P'(1) = 0$.
On a $P'' = 20X^3 - 48X^2 + 42X - 14$, d'où $P''(1) = 0$.
On a $P''' = 60X^2 - 96X + 42$, d'où $P'''(1) \neq 0$.
Ainsi 1 est racine de P de multiplicité 3.
Ainsi P s'écrit $(X-1)^3 Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_2[X]$.
En examinant les coefficients dominant et constant, on peut dire que Q est de la forme $X^2 + bX + 1$. Reste donc à déterminer b.
On a l'égalité
$$P = (X-1)^3(X^2 + bX + 1)$$
Le coefficient en X du polynôme à droite vaut $3 - b$.
Comme le coefficient en X de P vaut 4, on a $4 = 3 - b$, d'où $b = -1$.
On a donc l'égalité :
$$P = (X-1)^3(X^2 - X + 1)$$
Comme le discriminant de $X^2 - X + 1$ est strictement négatif, ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est
$$P = (X-1)^3(X^2 - X + 1)$$

(ii) On a $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$, donc $P(1) = 0$.
On a $P' = 4X^3 + 4X - 8$, donc $P'(1) = 0$.
Donc 1 racine de P de multiplicité au moins 2. Ainsi, P s'écrit $(X-1)^2 Q$ avec $\deg Q \leqslant 2$.
Le polynôme Q est de la forme $aX^2 + bX + c$.
En examinant le coefficient dominant et constant, on obtient directement $a = 1$ et $c = 5$. Reste à déterminer le coefficient b. On trouve $b = 2$.
On a donc l'égalité
$$P = (X-1)^2(X^2 + 2X + 5)$$
Comme le discriminant de $X^2 + 2X - 5$ est strictement négatif, ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, la factorisation du polynôme P est
$$P = (X-1)^2(X^2 + 2X + 5)$$

(iii) On a
$$P = X^4 - (5 + \sqrt{2})X^3 + (5\sqrt{2} - 2)X^2 + (10 + 2\sqrt{2})X - 10\sqrt{2}$$
Donc $P(\sqrt{2}) = 0$.
Puis $P' = 4X^3 - 3(5 + \sqrt{2})X^2 + 2(5\sqrt{2} - 2)X + (10 + 2\sqrt{2})$, d'où $P'(\sqrt{2}) = 0$.
De plus, $P'' = 12X^2 - 6(5 + \sqrt{2})X + 2(5\sqrt{2} - 2)$, donc $P''(\sqrt{2}) = -20\sqrt{2} + 8 \neq 0$,
Donc $\sqrt{2}$ est racine de P de multiplicité 2.
Ainsi P s'écrit $(X - \sqrt{2})^2(aX^2 + bX + c)$.
En identifiant les coefficients, on trouve $a = 1$, $b = \sqrt{2} - 5$ et $c = -5\sqrt{2}$.
On a donc l'égalité
$$P = (X - \sqrt{2})^2(X^2 + (\sqrt{2} - 5)X - 5\sqrt{2})$$
Le polynôme $X^2 + (\sqrt{2} - 5)X - 5\sqrt{2}$ a un discriminant positif ; il admet 5 et $-\sqrt{2}$ pour racine. Il s'écrit donc $(X - 5)(X + \sqrt{2})$.
On a donc l'égalité
$$P = (X - \sqrt{2})^2(X - 5)(X + \sqrt{2})$$
C'est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

133

Première preuve. On utilise la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(X+1)^n - nX - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k \\ &= X^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-2}}_{\in \mathbb{K}[X]},\end{aligned}$$

donc ce polynôme est divisible par X^2.

Deuxième preuve. Notons $P = (X+1)^n - nX - 1$. On a

- ⋆ $P(0) = (0+1)^n - n\,0 - 1 = 0$, donc 0 est racine de P ;
- ⋆ $P' = n(X+1)^{n-1} - n$, donc $P'(0) = n1^{n-1} - n = 0$.

Donc 0 est racine de multiplicité au moins 2. Donc X^2 divise P.

134

Notons P ce polynôme.
On a $P' = 3X^2 - 3 = 3(X-1)(X+1)$.
On a donc l'équivalence :

$$P \text{ est à racines simples} \iff P(1) \text{ et } P(-1) \text{ sont non nuls.}$$

On a $P(1) = -2 - \left(\frac{b}{ac} + \frac{ac}{b}\right)$ et $P(-1) = 2 - \left(\frac{b}{ac} + \frac{ac}{b}\right)$.
On montre facilement

$$P(1) = 0 \iff ab = -c \qquad \text{et} \qquad P(-1) = 0 \iff ab = c$$

Ainsi,

$$P \text{ est à racines simples} \iff ab \neq -c \quad \text{et} \quad ab \neq c$$

ou encore

$$P \text{ est à racines simples} \iff (ab+c)(ab-c) \neq 0$$

Remarque. On a l'équivalence :

$$P \text{ est à racines simples} \iff \mathrm{Rac}(P) \cap \mathrm{Rac}(P') = \emptyset$$

135

On a

- $P(1) = 1 - (2n+1) + (2n+1) - 1 = 0$, donc 1 est racine de P.
- $P' = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1}$, donc

$$\begin{aligned} P'(1) &= (2n+1) - (2n+1)(n+1) + (2n+1)n \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P'.
- $P'' = (2n+1)(2n)X^{2n-1} - (2n+1)(n+1)nX^{n-1} + (2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ donc

$$\begin{aligned} P''(1) &= (2n+1)(2n) - (2n+1)(n+1)n + (2n+1)n(n-1) \\ &= (2n+1)n\,[2 - (n+1) + (n-1)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P''.
- $P''' = (2n+1)(2n)(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)(n+1)n(n-1)X^{n-2} + (2n+1)n(n-1)(n-2)X^{n-3}$ donc

$$\begin{aligned} P'''(1) &= (2n+1)(2n)(2n-1) - (2n+1)(n+1)n(n-1) + (2n+1)n(n-1)(n-2) \\ &= (2n+1)n\,[2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)] \\ &= (2n+1)n\,[4n - 2 - (n-1)\,[(n+1) - (n-2)]] \\ &= (2n+1)n(n+1) \neq 0, \end{aligned}$$

  donc 1 n'est pas racine de P'''.

La multiplicité de 1 en tant que racine de P est donc 3.

1. Soit a une racine de P_n, donc $P_n(a) = 0$. Montrons que $P_n'(a) \neq 0$.
   La clé de la démonstration réside dans l'égalité suivante (à prouver tout seul)

   $$P_n' \; = \; P_{n-1} \quad \text{qui s'écrit encore} \quad P_n' \; = \; P_n - \frac{1}{n!}X^n$$

   D'où

   $$P_n'(a) = P_n(a) - \frac{1}{n!}a^n$$

   Comme $P_n(a) = 0$, on obtient $P_n'(a) = -\frac{1}{n!}a^n$.
   Cette expression est non nulle car $a \neq 0$ (en effet, on remarque que $P_n(0) = 1$ donc 0 n'est pas racine).

   Résumé de la preuve.
   On a l'égalité fondamentale suivante (spécifique à ce polynôme) :

   $$P_n \; = \; \frac{1}{n!}X^n \; + \; P_n'$$

   En évaluant en $a \in \mathbb{C}$, on obtient

   $$P_n(a) \; = \; \frac{1}{n!}a^n \; + \; P_n'(a)$$

   Désormais, si on prend a une racine de P_n, on a nécessairement $a \neq 0$ (WHY ?), et on constate donc que $P_n'(a) \neq 0$.

   Autre rédaction (un petit raisonnement par l'absurde).
   Le polynôme constant $P_0 = 1$ n'a pas de racine, donc il n'a tautologiquement que des racines simples.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que P_n n'a que des racines simples.
   Supposons par l'absurde que P_n possède une racine multiple $a \in \mathbb{C}$. En particulier, on doit avoir

   $$P_n(a) = P_n'(a) = 0.$$

   Or,

   $$\begin{aligned} P_n' &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,X^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{X^\ell}{\ell!} \qquad [\ell = k-1] \\ &= P_{n-1} \\ &= P_n - \frac{X^n}{n!}. \end{aligned}$$

   La double égalité $P_n(a) = P_n'(a) = 0$ donne alors que $\frac{a^n}{n!} = 0$; ce qui entraîne, *puisque* $n \geqslant 1$, que $a = 0$.
   Or 0 n'est pas racine de P_n, car $P_n(0) = 1 \neq 0$.
   On obtient ainsi la contradiction souhaitée, ce qui conclut la démonstration.

2. **Brouillon.**
   On commence par se faire la main sur les petites valeurs de n.
   On a

   $$P_0 = 1 \qquad P_1 = X + 1 \qquad P_2 = \frac{1}{2}X^2 + X + 1 \qquad P_3 = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X + 1$$

   On constate que les polynômes P_0 et P_2 n'ont pas de racine réelle (calculer le discriminant).

D'autre part, on se rappelle du résultat suivant « un polynôme à ceofficients réels de degré impair admet *au moins* une racine réelle ».

Pour connaître le nombre de racines de P_3, on peut étudier les variations de la fonction polynomiale associée, notée $\widetilde{P_3}$.

Or on a l'égalité de polynômes formels $P_3' = P_2$.

De plus, la fonction $\widetilde{P_2}$ ne s'annule pas, donc garde un signe constant en vertu du TVI (une fonction polynomiale est continue).

Comme il est facile de voir que $\widetilde{P_2}$ est une fonction positive, on constate que $\widetilde{P_3}$ est croissante, donc ne peut pas s'annuler plus de deux fois (comme $\widetilde{P_3}$ s'annule une fois, elle s'annule une unique fois !).

Début de la preuve. On note $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale associée à un polynôme P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

$$\text{« Le polynôme } P_n \text{ possède } \begin{cases} 0 \text{ racine réelle} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ unique racine réelle} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \text{ »}$$

Initialisation.

Montrons $\mathcal{H}_0$. Comme 0 est pair, il s'agit de montrer que P_0 n'a pas de racine réelle, ce qui est le cas puisque $P_0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_{n-1}$. Montrons $\mathcal{H}_n$.

Il y a deux cas à distinguer !

— **Cas n pair.** Montrons que P_n n'a pas de racine réelle.

Utilisons un raisonnement d'Analyse en étudiant les fonctions polynomiales associées.

On a l'égalité de polynômes formels $P_n' = P_{n-1}$.

D'après $\mathcal{H}_{n-1}$, comme $n-1$ est impair, le polynôme P_{n-1} admet une unique racine réelle, notons-la α.

Comme le coefficient dominant de P_{n-1} est positif, on en déduit la première ligne du tableau suivant.

Justifions la deuxième ligne.

On a $P_{n-1}(\alpha) = 0$ et la relation fondamentale $P_n = \frac{1}{n!}X^n + P_n'$, d'où $P_n(\alpha) = \dfrac{1}{n!}\alpha^n$.

Comme n est pair, $P_n(\alpha) \geqslant 0$.

Par ailleurs, comme 0 n'est pas racine des polynômes P_k, on a $\alpha \neq 0$.

On en déduit $P_n(\alpha) > 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $\widetilde{P_n}' = \widetilde{P_{n-1}}$		$-$	0	$+$	
Variations de $\widetilde{P_n}$		$\searrow$	>0	$\nearrow$	

On en déduit que P_n n'a pas de racine réelle.

— **Cas n impair.** Montrons que P_n a une unique racine réelle.

D'après $\mathcal{H}_{n-1}$, comme $n-1$ est pair, le polynôme P_{n-1} n'admet pas de racine réelle. De plus, en examinant le signe du coefficient dominant et en utilisant la continuité de $\widetilde{P_{n-1}}$, on obtient que la fonction $\widetilde{P_{n-1}}$ est strictement positive.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $\widetilde{P_n}' = \widetilde{P_{n-1}}$		$+$	
Variations de $\widetilde{P_n}$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Le TVI appliqué à la fonction $\widetilde{P_n}$ montre que le polynôme formel P_n admet une unique racine réelle.

Dans les deux cas, on a montré $\mathcal{H}_n$.

1. À vous.
2. • L'identité de Bernoulli fournit
$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$
Comme le discriminant de X^2+X+1 est négatif, c'est la factorisation de X^3-1 dans $\mathbb{R}[X]$.
• On a $X^3+1 = -\Big((-X)^3-1\Big) = -\big((-X)-1\big)\big((-X)^2+(-X)+1\big)$. Donc
$$X^3+1 \;=\; -(-X-1)(X^2-X+1)$$
Donc
$$X^3+1 \;=\; (X+1)(X^2-X+1)$$
Comme le discriminant de X^2-X+1 est négatif, c'est la factorisation de X^3+1 dans $\mathbb{R}[X]$.
• Concluons.
En utilisant les deux points précédents et la factorisation de Y^2-1, on a :
$$X^6-1 \;=\; (X^3)^2-1 \;=\; (X^3-1)(X^3+1) \;=\; (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$$
Comme les discriminants des polynômes de degré 2 sont négatifs, c'est la factorisation de X^6-1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Autre idée (pas terrible).
En utilisant la factorisation de Y^3-1, on a
$$X^6-1 \;=\; (X^2)^3-1 \;=\; (X^2-1)(X^4+X^2+1)$$
Il nous faut donc factoriser X^2-1 (facile, c'est $(X-1)(X+1)$) et factoriser le polynôme de degré X^4+X^2+1 (plus difficile !), c'est un polynôme sans racine réelle donc produit de deux polynômes de degré 2. Et sa factorisation fait l'objet de l'exercice suivant.

• Utilisons $\mathbb{C}[X]$ pour ensuite revenir à $\mathbb{R}[X]$

La clé est de remarquer que le polynôme P est bicarré, c'est-à-dire s'écrit $Q(X^2)$ avec $Q = X^2 + X + 1$.
Dans $\mathbb{C}[T]$, on a l'égalité $T^2 + T + 1 = (T - \mathrm{j})(T - \bar{\mathrm{j}})$.
Ainsi, dans $\mathbb{C}[X]$, on a $P = (X^2 - \mathrm{j})(X^2 - \bar{\mathrm{j}})$.
Notons z **UNE** racine carrée de j. Alors l'OPPOSE de z est également une racine carrée de j.
D'où $X^2 - \mathrm{j} = (X - z)(X + z)$.
Comme z est une racine carrée de j, on obtient que $\overline{z}$ est une racine carrée de $\bar{\mathrm{j}}$.
Donc $X^2 - \bar{\mathrm{j}} = (X - \overline{z})(X + \overline{z})$.

Par produit, on a donc :

$$X^4 + X^2 + 1 \;=\; (X - z)(X + z)(X - \overline{z})(X + \overline{z}).$$

On groupe les facteurs en fonction d'une racine et de son conjugué. Ainsi,

$$X^4 + X^2 + 1 \;=\; (X - z)(X - \overline{z}) \times (X + z)(X + \overline{z})$$

Le polynôme $(X - z)(X - \overline{z})$ est un polynôme à coefficients **réels**. En effet, on a :

$$(X - z)(X - \overline{z}) \;=\; X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$$

Ici $z^2 = \mathrm{j}$, donc en appliquant le module, on a $|z|^2 = 1$.
Comme racine carrée de j, on peut choisir $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ (de partie réelle $\frac{1}{2}$) ou bien j^2 (de partie réelle $\frac{-1}{2}$).

• Preuve spécifique aux particularités de ce polynôme.

On remarque que j est racine. Donc $\bar{\mathrm{j}}$ aussi (car le polynôme est à coefficients réels).
De plus, le polynôme est pair, donc j^2 et $(\bar{\mathrm{j}})^2$ sont aussi racines.
On tient 4 racines distinctes pour le polynôme P qui est de degré 4 (oui, les complexes j, $\bar{\mathrm{j}}$, j^2 et $(\bar{\mathrm{j}})^2$ sont bien distincts).
Donc P se factorise sous la forme $\lambda(X - \mathrm{j})(X - \overline{j})(X - \mathrm{j}^2)(X - \bar{\mathrm{j}}^2)$ avec $\lambda = 1$!

• Restons dans $\mathbb{R}[X]$

Première solution astucieuse. On a

$$X^4 + X^2 + 1 \;=\; (X^2 + 1)^2 - X^2 \;=\; (X^2 + 1 - X)(X^2 + 1 + X).$$

Comme chaque polynôme de degré 2 obtenu a un discriminant strictement négatif, la factorisation du polynôme P est :

$$X^4 + X^2 + 1 \;=\; (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

Deuxième solution.
Voici un mini-lemme.

> *Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré pair est toujours un produit de polynômes de degré 2.*
> *Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré impair est toujours un produit de polynômes de degré 2, à un facteur de degré 1 près !*

En fait, ce mini-lemme ne va même pas nous servir. Ici, on veut factoriser dans $\mathbb{R}[X]$. Le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle (en effet, on a $\forall\, t \in \mathbb{R}, P(t) > 0$). Donc P est produit de deux polynômes de degré 2 à discriminant < 0.

Le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ se factorise sous la forme suivante (penser au mini-lemme, ou à sa démonstration, ou à la phrase précédente) :

$$P \;=\; a(X^2 + bX + c)(X^2 + b'X + c')$$

Comme P est unitaire, on a $a = 1$.
Le membre droit vaut $X^4 + (b + b')X^3 + (c + bb' + c')X^2 + (bc' + cb')X + cc'$.

Par identification des coefficients, on a les 4 égalités suivantes :

$$\begin{cases} b+b'=0 \\ c+bb'+c'=1 \\ bc'+cb'=0 \\ cc'=1 \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 impliquent $b(c'-c)=0$.
Donc $b=0$ ou $c=c'$.

Montrons que le cas $b=0$ ne peut pas arriver. Si $b=0$, alors la ligne 1 fournit $b'=0$; la ligne 2 s'écrit donc $c+c'=1$. Or $cc'=1$. En combinant ces deux dernières égalités, on a $c(1-c)=1$ d'où $c^2-c+1=0$.
Donc c est solution de $t^2-t+1=0$. Or cette équation n'a pas de racine réelle, car le discriminant vaut -3. D'où la contradiction.

On a donc $c=c'$.
Les lignes 1 et 2 fournissent $2c-b^2=1$ et la ligne 4 fournit $c^2=1$. Ces deux égalités fournissent $c=1$ (WHY ?).
D'où $c'=1$.
Reste à identifier b et b'. La ligne 2 fournit $bb'=-1$ et et la ligne 1 est $b+b'=0$. Donc b et b' sont solution de $t^2-1=0$.
Ainsi b et b' valent 1 ou -1.
D'où :

$$P=(X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

Ces deux polynômes de degré 2 étant de discriminant <0, c'est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

140

On utilise ici la notation classique $\zeta_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$.

(i) Sur $\mathbb{C}$: $X^2+X+1 = (X-j)(X-\overline{\jmath})$;
Sur $\mathbb{R}$, le polynôme est irréductible.

(ii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4-4 = (X^2-2)(X^2+2) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)$.
Sur $\mathbb{R}$: $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+2)$.

(iii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4+1 = (X-\zeta_8)(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)(X-\zeta_8^7)$ (les racines sont les racines quatrièmes de -1).
Sur $\mathbb{R}$, on rassemble les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} X^4+1 &= (X-\zeta_8)(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)(X-\zeta_8^7) \\ &= \left[(X-\zeta_8)(X-\zeta_8^7)\right]\left[(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)\right] \\ &= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right). \end{aligned}$$

(iv) Sur $\mathbb{C}$: $X^6+27 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_6}\left(X-\omega\, i\sqrt{3}\right) = \prod_{\substack{k\in[\![0,11]\!]\\ k \text{ impair}}}\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^k\right)$.

Sur $\mathbb{R}$ (un petit dessin aide),

$$\begin{aligned} X^6+27 &= \left[\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}\right)\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^{11}\right)\right]\left[\left(X-\sqrt{3}\,i\right)\left(X+\sqrt{3}\,i\right)\right]\left[\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^5\right)\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^7\right)\right] \\ &= (X^2-3X+3)(X^2+3)(X^2+3X+3). \end{aligned}$$

(v) Sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (X^2-X+1)^2+1 &= \left[(X^2-X+1)-i\right]\left[(X^2-X+1)+i\right] \\ &= \left(X^2-X+(1-i)\right)\left(X^2-X+1+i\right) \\ &= (X+i)(X-(1+i))(X-i)(X-(1-i)). \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (X^2-X+1)^2+1 &= \left[(X+i)(X-i)\right]\left[(X-(1+i))(X-(1-i))\right] \\ &= \left(X^2+1\right)\left(X^2-2X+2\right). \end{aligned}$$

(vi) On se rend compte (soit successivement soit, si l'on sent l'arnaque, en vérifiant que les premières dérivées du polynôme ont 1 comme racine) que $(X-1)^3$ divise le polynôme. On obtient alors

$$\begin{aligned} X^5-10X^4+25X^3-25X^2+10X-1 &= (X-1)^3(X^2-7X+1) \\ &= (X-1)^3\left(X-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui est à la fois la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

(vii) L'indication montre qu'il existe une racine z telle que la somme des trois racines vaille $2z$. D'après les relations coefficients-racines, cette somme vaut en fait 8, donc on obtient que 4 est racine. Ainsi,

$$X^3-8X^2+23X-28 = (X-4)(X^2-4X+7),$$

ce qui est la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ s'obtient alors immédiatement :

$$X^3-8X^2+23X-28 = (X-4)(X-(2+\sqrt{3}\,i))(X-(2-\sqrt{3}\mathrm{i})).$$

(viii) L'indication nous permet d'obtenir une factorisation de la forme

$$X^4+12X-5 = (X^2-2X+a)(X^2+bX+c),$$

d'où l'on tire immédiatement $b=2$ puis, rapidement, $a=5$ et $c=-1$.
Ainsi,

$$X^4+12X-5 = (X^2-2X+5)(X^2+2X-1) = (X^2-2X+5)(X+1+\sqrt{2}))(X+1-\sqrt{2}),$$

ce qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
On obtient alors la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4+12X-5 = (X-(1+2i))(X-(1-2i))(X+1+\sqrt{2}))(X+1-\sqrt{2}).$$

• On montre la première égalité en distinguant le cas $z = 0$ ou pas à l'aide de l'identité :

$$X^n - 1 \;=\; \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$$

Pour $z \neq 0$, on a

$$X^n \,-\, z^n \;=\; z^n \Big((\frac{1}{z} X)^n - 1 \Big) \;=\; z^n \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(\Big(\frac{1}{z} X \Big) - \omega \right) \;=\; \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega z)$$

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ \xi & \longmapsto & \overline{\xi} \end{array}$ est bijective (c'est même une involution).

Ainsi

$$\Big\{ \omega,\ \omega \in \mathbb{U}_n \Big\} \;=\; \Big\{ \overline{\xi},\ \xi \in \mathbb{U}_n \Big\}$$

D'où

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega z) \;=\; \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n} (X - \overline{\xi} z)$$

• Prenons la première égalité que l'on évalue en z_1 :

♣ $$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1^n \,-\, z_2^n \;=\; \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z_1 - \omega z_2)$$

• D'après l'égalité ♣, on a :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{C}, \quad (A^n \,-\, B^n)(\xi) \;=\; \left(\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (A - \omega B) \right)(\xi)$$

Ainsi, les deux polynômes $A^n - B^n$ et $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (A - \omega B)$ coïncident sur $\mathbb{C}$.

D'où l'égalité.

145

$\boxed{\Longrightarrow}$ A rédiger. Écrire $P = 1\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$.
Utiliser que $\quad \forall\, \omega \in \mathbb{C}, \quad |\omega| \geqslant |\operatorname{Im} \omega|$.
Faire le produit d'inégalités positives.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$.
Montrons que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
D'après un corollaire de d'Alembert-Gauss, tout polynôme (non nul) est scindé sur $\mathbb{C}$.
Bref, P est scindé sur $\mathbb{C}$, donc on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ (il y a $n = 0$ ici) et des α_i tels que $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ (ne pas oublier que P est supposé unitaire).
Il s'agit de montrer que les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (il n'y a rien à prouver si $n = 0$, car un polynôme constant (non nul) est scindé !).
Soit α une racine de P (qui n'existe pas si $n = 0$, mais ce n'est pas grave, puisqu'il n'y a rien à prouver).
Montrons que $\alpha \in \mathbb{R}$.
On applique l'hypothèse à $z = \alpha$. On obtient $|\underbrace{P(\alpha)}_{=0}| \geqslant |\operatorname{Im} \alpha|^n$, d'où $\operatorname{Im} \alpha = 0$, d'où $\alpha \in \mathbb{R}$.

147

1. D'après le cours (relation coefficients-racines), on a $\sigma_1 = \dfrac{-b}{a}$, puis $\sigma_2 = \dfrac{c}{a}$ et $\sigma_3 = \dfrac{-d}{a}$.
2. Vous devez trouver $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.
3. On doit trouver 6 solutions. L'une d'entre elles est $(1, -2, 3)$, je vous laisse deviner les 5 autres.

148

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ yz+xz+xy=-4 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x,\ y,\ z \text{ racines de} \\ X^3-X^2-4X+4 \end{array}$$

Le polynôme X^3-X^2-4X+4 admet 1 comme racine évidente, donc est factorisable par $X-1$. En effectuant la division euclidienne, ou bien en identifiant les coefficients, on trouve que :

$$X^3-X^2-4X+4 \;=\; (X-1)(X^2-4).$$

Donc les racines de ce polynôme sont $1, 2, -2$.
Il y a donc 6 triplets solutions :

$$(1,2,-2) \quad ; \quad (1,-2,2) \quad ; \quad (2,-2,1) \quad ; \quad (2,1,-2) \quad ; \quad (-2,2,1) \quad ; \quad (-2,1,2).$$

Rappel. Les relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 3 se résument via l'équivalence suivante (où $x, y, z \in \mathbb{K}$ sont fixés et s_1, s_2, s_3 aussi)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & s_1 \\ xy+yz+xz & = & s_2 \\ xyz & = & s_3 \end{array} \right. \iff X^3-s_1X^2+s_2X-s_3 \;=\; (X-x)(X-y)(X-z)$$

Ainsi, on a l'équivalence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & s_1 \\ xy+yz+xz & = & s_2 \\ xyz & = & s_3 \end{array} \right. \iff x,\ y,\ z \text{ sont racines de } X^3-s_1X^2+s_2X-s_3$$

149

Vous devez trouver $\dfrac{2^n}{\text{truc}}$: vérifiez si votre formule fonctionne pour $n = 1$.
Penser à l'angle moitié. Compléter l'égalité $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \dots$.

153

On peut commencer à se faire la main, même si c'est trop petit, avec $n = 2$ (on trouve -4).
On a
$$\prod_{\substack{(\omega,\omega')\in\mathbb{U}_n^2\\ \omega\neq\omega'}} (\omega-\omega') \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (\omega-\omega') \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\omega\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}}(1-\frac{\omega'}{\omega})\right)$$

Pause.
Faisons une pause dans notre calcul, et apprenons un peu de maths.
Fixons $\omega_0 \in \mathbb{U}_n$. L'application
$$\begin{array}{rccc}\varphi_{\omega_0}: & \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n\\ & \zeta & \longmapsto & \dfrac{\zeta}{\omega_0}\end{array}$$
est bien définie (WHY ?) et est bijective (de bijection réciproque $\xi \mapsto \omega_0\xi$).
On en déduit facilement par restriction et co-restriction (ou bien on refait une preuve) que l'application :
$$\begin{array}{rccc}\psi_{\omega_0}: & \mathbb{U}_n\setminus\{\omega_0\} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n\setminus\{1\}\\ & \zeta & \longmapsto & \dfrac{\zeta}{\omega_0}\end{array}$$
est bijective.

Autre pause.
Soit $f : E \to F$ une application *bijective* entre deux ensembles finis, et on suppose que $F \subset \mathbb{C}$ (de sorte que les éléments de F se multiplient).
Alors
$$\prod_{x\in E} f(x) = \prod_{y\in F} y$$
On peut reformuler cela :

> *Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application injective avec E ensemble fini.*
> *Alors*
> $$\prod_{x\in E} f(x) = \prod_{y\in f(E)} y$$

Un joli résultat. On a les deux égalités :
$$X^n - 1 \;=\; \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n}(X-\xi) \qquad \text{et} \qquad X^n-1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$$
On en déduit (WHY ? Cela nécessite une vraie preuve)
$$\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}(X-\xi) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}X^k$$
En évaluant en 1, on obtient la belle identité :
$$\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}(1-\xi) \;=\; n$$

Revenons à nos moutons et recollons les morceaux !

On a
$$\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}}(1-\frac{\omega'}{\omega}) \;=\; \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}(1-\xi) \;=\; n$$
Multiplions par $\omega\in\mathbb{U}_n$ et effectuons le produit sur ω :
$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\omega\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}}(1-\frac{\omega'}{\omega})\right) \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(\omega n) \;=\; n^n\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega \;=\; n^n(-1)^{n+1}$$
Cette formule fonctionne bien pour $n = 2$, c'est rassurant !

154

On prend l'égalité remarquable $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n}(X - \omega)$ et on évalue en $\dfrac{-a}{b}$ (licite car $b \neq 0$).

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(a + b\omega_k) &= (-b)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{-a}{b} - \omega_k\right) \\
&= (-b)^n\left(\left(\frac{-a}{b}\right)^n - 1\right) \\
&= a^n - (-b)^n
\end{aligned}$$

Solution, pour moi, Madame Tête, à ne pas lire.
Considérer $P = (X-a)^n - b^n$ qui a pour racines (comptées avec multiplicité !) les $a + b\omega_k$ (si $b = 0$, c'est a répété n fois ; sinon, cela fait n racines distinctes).
Pour un polynôme unitaire de degré n, le produit de ses racines vaut $(-1)^n P(0)$.

1. **Remarque initiale.** Rappelons que l'on a
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
En prenant $p=(n+1)\theta$ et $q=(n-1)\theta$, on a $\dfrac{p+q}{2}=n\theta$ et $\dfrac{p-q}{2}=\theta$.
D'où
$$\cos\big((n+1)\theta\big)+\cos\big((n-1)\theta\big) \;=\; 2\cos(n\theta)\cos\theta$$
Reformulation : on vient de montrer que
$$\forall\, p\in\mathbb{N},\quad \cos\big((p+2)\theta\big) \;=\; 2\cos\theta\,\cos\big((p+1)\theta\big)-\cos(p\theta)$$
Existence.
On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par récurrence de la façon suivante
$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1}-T_n \end{cases}$$
Montrons maintenant que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$
Pour cela, fixons $\theta\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété suivante :
$$\mathcal{H}_n:\qquad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$
Prouvons cela par récurrence double.
Initialisation
$\star$ D'une part, on a $T_0=1$, donc $T_0(\cos\theta)=1$. D'autre part, $\cos(0\times\theta)=1$.
Donc $\mathcal{H}_0$ et vraie.
$\star$ D'une part, on a $T_1=X$, donc $T_1(\cos\theta)=\cos\theta$. D'autre part, $\cos(1\times\theta)=\cos\theta$.
Donc $\mathcal{H}_1$ et vraie.
Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$.
Montrons $\mathcal{H}_{n+2}$.
Par définition de la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on a
$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; 2\cos\theta\,T_{n+1}(\cos\theta)-T_n(\cos\theta)$$
D'après $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$, on a
$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; 2\cos\theta\cos\big((n+1)\theta\big)-\cos(n\theta)$$
Or, d'après la remarque initiale, on a
$$\forall\, p\in\mathbb{N},\quad 2\cos\theta\,\cos\big((p+1)\theta\big)-\cos(p\theta)=\cos\big((p+2)\theta\big)$$
On applique cela à $p=n$ et on obtient
$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; \cos\big((n+2)\theta\big)$$
D'où $\mathcal{H}_{n+2}$.

2. Considérons deux suites de polynômes (S_n) et (T_n) telles que
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\qquad S_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)\qquad\text{et}\qquad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$
On souhaite montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les polynômes S_n et T_n sont égaux.
Fixons $n\in\mathbb{N}$.
On remarque que
$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad S_n(\cos\theta) \;=\; T_n(\cos\theta)$$
Comme la fonction cosinus a pour image $[-1,1]$, on en déduit :
$$\forall\, t\in[-1,1],\quad S_n(t) \;=\; T_n(t)$$
Ainsi les polynômes S_n et T_n coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$ donc, d'après le critère radical de nullité, les polynômes S_n et T_n sont égaux.

3. On souhaite calculer $T_n(x_k)$ sachant que x_k est du type $\cos\theta_k$ avec $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
Or $T_n(\cos\theta_k) = \cos(n\theta_k)$.
Donc
$$T_n(x_k) \;=\; \cos\left(n\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \;=\; \cos\left(k+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{WHY}}{=} 0$$
On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel x_k est racine de T_n.
Remarque. On a l'impression d'avoir trouvé une infinité de racines pour T_n. Mais T_n n'est pas le polynôme nul comme on le verra dans un instant. Où est donc l'explication ? Les x_k ne sont pas deux à deux distincts !

Montrons que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$. Comme la fonction cosinus est **strictement** décroissante et que $\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1}$, on en déduit
$$x_0 = \cos\theta_0 \;>\; x_1 = \cos\theta_1 \;>\; \cdots \;>\; x_{n-1} = \cos\theta_{n-1}$$
Donc les x_i sont deux à deux distincts pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

BILAN : le polynôme T_n possède (au moins) n racines réelles distinctes deux à deux.

4. Commençons par remarquer que T_0 est constant et que sa factorisation est donc immédiate :
$$T_0 = 1$$
Désormais, supposons $n \geqslant 1$.
Le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes, à savoir $x_0, \ldots, x_{n-1}$.
Comme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (récurrence double, faites-le), on en déduit la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$:
$$T_n \;=\; 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$$

1. La fonction polynomiale $f : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est dérivable.
   On a $f' : x \mapsto 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
   On a $f'' : x \mapsto 12x^2 + 6x + 2$ qui est une fonction polynomiale de degré 2 dont le discriminant est < 0. Ainsi, f' est strictement monotone (croissante ici) et est une fonction polynomiale de degré 3, donc f' s'annule exactement une fois en un certain r.

x	$-\infty$		r		$+\infty$
f''		$+$	$+$	$+$	
f'	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	?	↗	$+\infty$

   On a $4r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0$. Donc $f(r) = r^4 + r^3 + r^2 + r + 1$ s'exprime en fonction de $r^4, r^2, r, 1$ et on trouve

$$f(r) \;=\; \frac{1}{4}(4r^4 + r^2 + 2r + 3) \;=\; \frac{1}{4}\Big(4r^4 + (r+1)^2 + 2\Big) > 0$$

   Ainsi f admet un minimum strictement positif, donc f ne s'annule pas.
   Donc Q n'a pas de racine réelle.

2. (2a) Comme $\theta = \frac{2\pi}{5}$, on a

$$\cos(4\theta) = \cos(5\theta - \theta) = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

   (2b) On a donc

$$\cos(4\theta) \;=\; \cos(2\times 2\theta) \;=\; 2\cos^2(2\theta) - 1 \;=\; 2\big(2\cos(\theta) - 1\big)^2 - 1 \;=\; 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$

3. D'après la question précédente, $\cos(\theta)$ est racine de Q.
   On vérifie facilement que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines de Q.
   Donc Q se factorise sous la forme

$$Q = 8(X-1)\Big(X + \frac{1}{2}\Big)(X^2 + bX + c)$$

   En identifiant les coefficients, on trouve $b = \frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{4}$.
   Comme $\cos(\theta)$ est racine de Q, on a donc

$$0 = 8\big(\cos(\theta) - 1\big)\Big(\cos(\theta) + \frac{1}{2}\Big)\Big(\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{4}\Big)$$

   Comme $\cos(\theta) \neq 1$ et $\cos(\theta) \neq -\frac{1}{2}$ (WHY ?), on a

$$\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{4} = 0$$

   D'où

$$4\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 1 = 0$$

4. En utilisant que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et le fait que $\cos^2(\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\cos(2\theta) \;=\; -\cos(\theta) - \frac{1}{2}$$

   Avec cette dernière égalité (et celle donnant $\cos^2(\theta)$), on en déduit que :

$$\cos(\theta)\cos(2\theta) \;=\; \frac{1}{4}$$

En développant, on trouve que $\big(X^2-2\cos(\theta)X+1\big)\big(X^2-2\cos(2\theta)X+1\big)$ vaut

$$X^4+\big(-2\cos(2\theta)-2\cos(\theta)\big)X^3+\big(2+4\cos\theta\cos(2\theta)\big)X^2+\big(-2\cos\theta-2\cos(2\theta)\big)X+1$$

D'après les relations de la question précédente, on obtient

$$\big(X^2-2\cos(\theta)X+1\big)\big(X^2-2\cos(2\theta)X+1\big)=X^4+X^3+X^2+X+1$$

5. Comme $Q=X^4+X^3+X^2+X+1$ n'a pas de racines réelles (ce que l'on peut revérifier en calculant les discriminants des deux polynômes de degré 2 ci-dessus), l'égalité précédente fournit la factorisation du polynôme Q.

① φ est linéaire (à vous)

Mq φ est injective en mq $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$

Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ càd $\begin{cases} P \in \mathbb{K}_n[X] \\ \varphi(P) = 0_{\mathbb{K}^{n+1}} \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = 0 \end{cases}$

Donc P est de degré $\leqslant n$ et admet $n+1$ racines $\neq$.
Donc $P = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$.

② Unicité Soit L_k et $\tilde{L}_k$ deux polynômes tq $\varphi(L_k) = e_{k+1}$
$\varphi(\tilde{L}_k) = e_{k+1}$

Alors $\varphi(L_k) = \varphi(\tilde{L}_k)$

Par injectivité de φ, on a $L_k = \tilde{L}_k$.

Existence Posons $L_k = \prod_{i \neq k} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$

L_k est un produit de n polynômes de degré 1
donc $\deg L_k = n$
a fortiori $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$.

Ce polynôme vérifie $L_k(a_j) = \delta_{kj}$ (calcul) càd $L_k(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $\left(L_k(a_0), \dots, L_k(a_n)\right) = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$
$= e_{k+1}$

Ainsi $\varphi(L_k) = e_{k+1}$

(3) φ est linéaire, injective et surjective car les vecteurs de la base canonique sont atteints.
Donc φ est un isomorphisme

(4) Comme φ est un iso, φ^{-1} existe et est un iso.
L'image d'une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ par φ^{-1} est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Ainsi $\left(\varphi^{-1}(e_1), \dots, \varphi^{-1}(e_{n+1})\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
càd $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(5) Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
On cherche $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tq $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$
Soit $i \in [\![0, n]\!]$
Evaluons en a_i :

$$P(a_i) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{L_k(a_i)}_{\delta_{ki}} = \lambda_i$$

<u>Bilan</u> les coord de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ sont $\left(P(a_0), \dots, P(a_n) \right)$

164

Considérons $\phi : P \mapsto P(X+1)$ qui est une application linéaire définie sur $\mathbb{K}_n[X]$.
Considérons $\psi : P \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)$, qui est également une application linéaire définie sur $\mathbb{K}_n[X]$.
Par la formule du binôme, on montre que ϕ et ψ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
Ces deux applications linéaires sont coïncident sur une base de $\mathbb{K}_n[X]$, donc sont égales.

1. (a) Notons $n = \deg Q$ (licite, car Q est non nul) donc $Q = a_n X^n + \cdots$ avec $a_n \neq 0$.
En examinant le terme de degré $n+1$ de chaque côté de l'égalité $(X^2-1)Q' = 2XQ$, on obtient $na_n = 2a_n$.
En divisant par $a_n \neq 0$, on a $n = 2$.

(b) D'après la question précédente, il suffit de chercher $Q \in G$ parmi les polynômes de degré $\leqslant 2$.
Soit donc $Q = aX^2 + bX + c$. Raisonnons par Analyse-Synthèse.
Analyse.

$$\text{On a } (X^2-1)Q' = 2XQ \quad \text{donc} \quad (X^2-1)(2aX+b) = 2X(aX^2+bX+c)$$
$$\text{donc} \quad 2aX^3 + bX^2 - 2aX - b = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX$$

En identifiant les coefficients, on a donc

$$\begin{cases} 2a &= 2a \\ b &= 2b \\ -2a &= 2c \\ -b &= 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a + + c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

donc $Q = aX^2 - a$

donc Q est de la forme $a(X^2-1)$

Synthèse. Vérifions qu'un polynôme Q de la forme $a(X^2-1)$ est solution.
Le membre gauche vaut $(X^2-1)Q' = (X^2-1) \times 2aX$
Le membre droit vaut $2XQ = 2X \times a(X^2-1)$
Les deux membres sont égaux, donc Q est solution !

Au lieu de raisonner par Analyse-Synthèse, on peut raisonner par équivalences, mais c'est dangereux pour un élève. Faites-moi confiance !
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
(X^2-1)Q' = 2XQ &\iff (X^2-1)(2aX+b) = 2X(aX^2+bX+c) \\
&\iff 2aX^3 + bX^2 - 2aX - b = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX \\
&\iff \begin{cases} 2a &= 2a \\ b &= 2b \\ -2a &= 2c \\ -b &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\
&\iff Q = aX^2 - a \\
&\iff Q \text{ est multiple de } X^2 - 1
\end{aligned}$$

Voici une autre solution. Cette méthode ne passe pas par l'identification des coefficients, mais par l'utilisation des racines des différents polynômes.
Analyse. Soit $Q \in G$. Alors $(X^2-1)Q' = 2XQ$.
Evaluons cette égalité en 1 et en -1.
On obtient $Q(1) = 0$ et $Q(-1) = 0$.
Donc 1 et -1 sont racines de Q.
Comme Q est de degré au plus 2, on a $Q = \alpha(X-1)(X+1) = \alpha(X^2-1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Synthèse. Réciproquement, on vérifie facilement qu'un multiple de X^2-1 est dans G.

2. (2a) ▷ On s'assure que f envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ (ce qui n'est, a priori, pas une évidence).
Ici, ce n'est pas difficile, car chaque terme de $f(P)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$. En effet, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\deg(P) \leqslant n \qquad \deg(-XP') = 1 + \deg P' \leqslant 1 + (n-1) = n \qquad \deg\left(\frac{1}{2}(X^2-1)P''\right) = 2 + \deg P'' \leqslant 2 + (n-2) = n$$

Comme $\deg\big(f(P)\big) \leqslant \max(\text{les trois degrés ci-dessus})$, on a $\deg\big(f(P)\big) \leqslant n$.

▷ Linéarité de f. À vous.

(2b) Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $P \in E$ vérifiant $f(P) = P$.

On a alors $\dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P = P$, d'où $\dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' = 0$ d'où $(X^2-1)P'' = 2XP'$.

Ainsi, P' est dans G. D'après la question 1), on en déduit que P' s'écrit $a(X^2-1)$.

Ainsi (WHY ?), P s'écrit $a(\frac{1}{3}X^3 - X) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Vérifions qu'un polynôme P de la forme $a(\frac{1}{3}X^3 - X) + c$ vérifie $f(P) = P$.

Calculons $f(P)$.

Faisons un petit calcul préparatoire en calculant $f(\frac{1}{3}X^3 - X)$ et $f(X^0)$. Je vous laisse faire.

On a

$$f(P) \;=\; f\Big(a(\tfrac{1}{3}X^3 - X) + c\Big) \;\overset{\text{WHY}}{=}\; af(\tfrac{1}{3}X^3 - X) + cf(X^0) \;\overset{\text{WHY}}{=}\; a(\tfrac{1}{3}X^3 - X) + cX^0 \;=\; P$$

(2c) Soit $P \in E$ vérifiant $\dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On peut supposer P non nul (why ?). Ainsi $P = a_dX^d + \ldots$ **avec** $a_d \neq 0$.

En examinant le terme en X^d de l'égalité, on obtient $\dfrac{1}{2}d(d-1)a_d - da_d + a_d = 0$.

D'où (WHY ?) $d^2 - 3d + 2 = 0$. Ainsi $d = 1$ ou $d = 2$.

On vient de montrer que $\deg P = 1$ ou $\deg P = 2$.

Ceci constitue une première étape. Attaquons la deuxième étape de la preuve.

Avec la condition sur le degré, on en déduit que dans tous les cas, P est de la forme $aX^2 + bX + c$ (avec a nul si $\deg P = 1$ et $a \neq 0$ si $\deg P = 2$).

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad &\text{donc} \quad \frac{1}{2}(X^2-1)(2a) - X(2aX+b) + (aX^2+bX+c) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\text{donc} \quad (\tfrac{1}{2}2a - 2a + a)X^2 \;+\; (-b+b)X \;+\; (-\tfrac{1}{2}2a + c) = 0_{\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -a+c & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} &\text{donc} \quad P = aX^2 + bX + a \\ &\text{donc} \quad P = a(X^2+1) + bX \\ &\text{donc} \quad P \text{ est combinaison linéaire de } X^2+1 \text{ et } X \end{aligned}$$

Synthèse. Vérifions qu'un polynôme P combinaison linéaire de X^2+1 et X est solution, c'est-à-dire vérifie $f(P) = 0$.

Commençons par un petit calcul préparatoire en calculant $f(X^2+1)$ et $f(X)$. Vous devez trouver 0.

Ecrivons P sous la forme $a(X^2+1) + bX$.

On a alors

$$f(P) = f\Big(a(X^2+1) + bX\Big) \;\overset{\text{WHY}}{=}\; af(X^2+1) + bf(X) \;=\; a \cdot 0 + b \cdot 0 \;=\; 0$$

① Δ est linéaire (à vous)
L'espace vectoriel de départ est égal à l'ev d'arrivée.
Donc Δ est un endomorphisme

② Soit P non constant : alors $\deg P \geq 1$.
Alors $\deg P(X+1) = \deg P$
donc $\deg \Delta(P) < \deg P$.
Cela ne montre pas ce qu'il faut prouver
Écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n = \deg P$ (donc $a_n \neq 0$)

On a $P(X+1) = a_n \underbrace{(X+1)^n}_{X^n + nX^{n-1} + \dots} + a_{n-1} \underbrace{(X+1)^{n-1}}_{X^{n-1} + \dots} + \dots$

$$= a_n X^n + (n a_n + a_{n-1}) X^{n-1} + \dots$$

D'où $\underbrace{P(X+1) - P(X)}_{\Delta(P)} = n a_n X^{n-1}$ + un poly de deg $\leq n-2$

Comme $a_n \neq 0$ et $n \geq 1$, on a $n a_n \neq 0$
donc le degré de $\Delta(P)$ vaut $n-1$
c.à.d $\deg P - 1$.

③ Base de $\operatorname{Ker} \Delta$?
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Si P est constant, alors $\Delta(P) = 0$
Si P est non constant, alors en notant $n \geq 1$ son

degré, on a $\deg \Delta(P) = n-1 \in \mathbb{N}$
donc $\Delta(P) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

D'où l'équivalence : $P \in \operatorname{Ker} \Delta \iff P$ est constant

Ainsi $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{K}_0[X]$
$= \operatorname{Vect}(X^0)$

Une base de $\operatorname{Ker} \Delta$ est (X^0)

Rmq On fixe P une fois pour toutes

4) Déterminons $\deg \Delta^n P$

Mq $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \ \deg \Delta^n P = \begin{cases} \deg P - n & \text{si } \deg P \geq n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}_{\mathcal{H}_n}$

Par récurrence.

- $\Delta^0 = \mathrm{id}$, donc $\deg \underbrace{\Delta^0 P}_{P} = \deg P$, d'où $\mathcal{H}_0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{H}_n$

$\deg \Delta Q = \begin{cases} \deg Q - 1 & \text{si} \dots \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

$\Delta^{n+1}(P) = \Delta(\Delta^n(P))$

$= \begin{cases} \deg \Delta^n(P) - 1 & \text{si } \deg \Delta^n(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

d'après $\mathcal{H}_n$ $= \begin{cases} (\deg P - n) - 1 & \text{si } \deg P - n \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \deg P - (n+1) & \text{si } \deg P \geq n+1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $\mathcal{H}_{n+1}$

5. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k : P \longmapsto P(X+k)$
Preuve par récurrence

6. On a $\Delta = T - id$ (égalité d'endos)

Comme T et id commutent, d'après Newton, on a
$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k$$

D'où
$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \underbrace{T^k(P)}_{P(X+k)}$$

$(-1)^{n+k}$ WHY ?

7. Remarquons tout d'abord que
$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad \Delta^n P = 0$$

(utiliser 4 sachant que $\deg P \leq n-1$
donc $\deg \Delta^n P = -\infty$)

D'après 6, on a donc :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad 0 = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

Évaluons en 0 :

D'où

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k)$$

1. • Tout d'abord, remarquons que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre. En effet, c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés.
• Reste à montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.
Ce n'est pas facile !
En fait, **au mois de Mai**, nous n'aurons pas besoin de montrer l'aspect générateur. On pourra dire (avec un théorème de demi-fainéant) :

> *La famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre de E de bon cardinal (« de bon cardinal » voulant dire que $\mathcal{F}$ possède $\dim E$ vecteurs). Donc $\mathcal{F}$ est une base de E.*

Mais comme on n'est pas encore au mois de Mai (ah, si, maintenant, on y est, mais je laisse quand même la preuve ci-dessous), on va prouver que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
Pour cela, on se donne un polynôme Q quelconque de E.
On cherche à montrer que Q est combinaison linéaire des polynômes $P_0, \dots, P_n$.
Autrement dit, on cherche à montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = Q$$

En identifiant les coefficients en $X^0, X^1, \dots, X^n$ de cette égalité, cela revient à montrer l'existence de scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_0 \mathrm{coeff}_{X^0}(P_0) & + & \lambda_1 \mathrm{coeff}_{X^0}(P_1) & + & \cdots & + & \lambda_n \mathrm{coeff}_{X^0}(P_n) & = & \mathrm{coeff}_{X^0}(Q) \\
\lambda_0 \mathrm{coeff}_{X^1}(P_0) & + & \lambda_1 \mathrm{coeff}_{X^1}(P_1) & + & \cdots & + & \lambda_n \mathrm{coeff}_{X^1}(P_n) & = & \mathrm{coeff}_{X^1}(Q) \\
\vdots & & & & & & & & \\
\lambda_0 \mathrm{coeff}_{X^n}(P_0) & + & \lambda_1 \mathrm{coeff}_{X^n}(P_1) & + & \cdots & + & \lambda_n \mathrm{coeff}_{X^n}(P_n) & = & \mathrm{coeff}_{X^n}(Q)
\end{array}\right.$$

En fait (WHY ?), on obtient le système *triangulaire* suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_0 \mathrm{coeff}_{X^0}(P_0) & + & \lambda_1 \mathrm{coeff}_{X^0}(P_1) & + & \lambda_2 \mathrm{coeff}_{X^0}(P_2) & + & \cdots & + & \lambda_n \mathrm{coeff}_{X^0}(P_n) & = & \mathrm{coeff}_{X^0}(Q) \\
 & & \lambda_1 \mathrm{coeff}_{X^1}(P_1) & + & \lambda_2 \mathrm{coeff}_{X^1}(P_2) & + & \cdots & + & \lambda_n \mathrm{coeff}_{X^1}(P_n) & = & \mathrm{coeff}_{X^1}(Q) \\
 & & & & \lambda_2 \mathrm{coeff}_{X^2}(P_2) & + & \cdots & + & \lambda_n \mathrm{coeff}_{X^2}(P_n) & = & \mathrm{coeff}_{X^2}(Q) \\
 & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & \lambda_n \mathrm{coeff}_{X^n}(P_n) & = & \mathrm{coeff}_{X^n}(Q)
\end{array}\right.$$

Dans notre exercice, on a $\quad \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{coeff}_{X^k}(P_k) = \dfrac{1}{k!}$
Le système précédent s'écrit matriciellement :

matrice triangulaire avec une belle diagonale à dessiner : à vous de faire le dessin

La matrice qui intervient est triangulaire supérieure avec aucun zéro sur la diagonale donc elle est inversible.
Donc en inversant la matrice, on obtient des λ_i en fonction des coefficients de Q tels que...

BILAN : la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

D'ailleurs, est-ce que cette dernière preuve ne montrerait pas directement que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E ?

Autre preuve.
On veut montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{K}_n[X]$.
L'inclusion non évidente est $\supset$ et cette inclusion revient à montrer que

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad X^k \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$

Montrons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la propriété $\mathcal{H}_k$: « $X^k \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ » est vraie.
Procédons par récurrence forte.
▷ Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_0$ est vraie car X^0 vaut P_0 qui est bien dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

$\triangleright$ Hérédité. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que les propriétés $\mathcal{H}_0, \ldots, \mathcal{H}_k$ sont vraies.
Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.
On a l'égalité

$$P_{k+1} \;=\; \frac{1}{(k+1)!} X(X-(k+1))^k \;=\; \frac{1}{(k+1)!}\Big[X^{k+1} + R\Big] \quad \text{avec } R \text{ de degré} \leqslant k$$

Ainsi

$$\bigstar \qquad X^{k+1} \;=\; (k+1)!\, P_{k+1} \;-\; R$$

• Le polynôme R est de degré $\leqslant k$, donc est combinaison linéaire de $X^0, \ldots, X^k$.
D'après $\mathcal{H}_0, \ldots, \mathcal{H}_k$, on en déduit que R est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
• Le polynôme P_{k+1} est un polynôme de la famille $\mathcal{F}$, donc est a fortiori dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

L'égalité $\bigstar$ et les deux points • précédents montrent que X^{k+1} est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

2. Pour $k=1$, on a $P_1'(X+1)=1=P_0(X)$.

   Pour $k\in[\![2,n]\!]$, on a

$$P_k'(X+1)=\frac{1}{k!}(X+1-k)^{k-1}+\frac{k-1}{k!}(X+1)(X+1-k)^{k-2}=\frac{1}{(k-1)!}X(X+1-k)^{k-2}=P_{k-1}$$

3. (3a) On remarque que $f=\mathrm{id}_E-g$ où $g:P\mapsto P'(X+1)$.
   Il suffit de montrer que g est un endomorphisme. Et ce n'est pas trop dur !
   Ainsi, f est un endomorphisme de E.

   (3b) On a $f(P_0)=P_0$.
   Et pour $k\in[\![1,n]\!]$, on a $f(P_k)=P_k-P_k'(X+1)=P_k-P_{k-1}$.

   (3c) La matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est $A=\begin{bmatrix}1&-1&0&\dots&0\\0&1&-1&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&\ddots&1&-1\\0&\dots&\dots&0&1\end{bmatrix}$
   Cette matrice est inversible, donc f est un automorphisme de E.

   (3d) Montrons que $(X-1)^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f.
   Autrement dit, montrons que $(f-\mathrm{id})^{n+1}=0_{\mathcal{L}(E)}$.
   En notant $g:P\mapsto P'(X+1)$, on remarque que $f=\mathrm{id}_E-g$.
   Ainsi $(f-\mathrm{id}_E)^{n+1}=(-1)^{n+1}g^{n+1}$.
   Il suffit donc de montrer que $g^{n+1}=0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Pour cela, on va calculer les itérés de g.
   Par une récurrence immédiate, on montre que $g^k:P\mapsto P^{(k)}(X+k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
   En particulier $g^{n+1}:P\mapsto P^{(n+1)}(X+n)$.
   Or lorsque P est de degré $\leqslant n$, alors $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul. Ainsi, l'endomorphisme g^{n+1}, défini sur $E=\mathbb{K}_n[X]$, est nul.

   (3e) Déterminer les valeurs propres de f, c'est-à-dire les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E)\neq\{0_E\}$.
   Analyse.
   Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de f.
   Faisons une remarque HORS CONTEXTE. De manière générale, lorsqu'on a un endomorphisme f d'un espace vectoriel E annulé par un certain polynôme Q, alors une valeur propre de f est racine de Q.
   En effet, une égalité du type $f(x)=\lambda x$ s'itère de la manière suivante $f^2(x)=f(\lambda x)=\lambda f(x)=\lambda\lambda x=\lambda^2 x$, et on montre que $f^k(x)=\lambda^k x$ par récurrence.
   Ainsi si $Q(f)=0$ avec $Q=\sum b_kX^k$, alors $Q(f)=\sum b_kf^k$.
   En prenant l'image de x par cet endomorphisme, on a $Q(f)(x)=\sum b_kf^k(x)$.
   Si x vérifie $f(x)=\lambda x$, alors $Q(f)(x)=\sum b_k\lambda^kx$; d'où $P(\lambda)x=0_E$.
   Si $x\neq 0_E$ (ce qui est le cas si c'est un vecteur propre), alors on en déduit que $P(\lambda)=0$.

   Comme le polynôme $Q=(X-1)^{n+1}$ est annulateur de f, on en déduit que λ est racine de Q, autrement dit que $\lambda=1$.

   Bilan de l'Analyse : si λ est valeur propre de f, alors nécessairement $\lambda=1$.

   Synthèse.
   Vérifions (ou pas) que 1 est valeur propre.
   Il s'agit de voir s'il existe un polynôme P **non nul** tel que $f(P)=P$, c'est-à-dire tel que $P-P'(X+1)=P$.
   Et c'est bien le cas en prenant un polynôme constant non nul. Il vérifie bien $f(P)=P$!

   (3f) Pour déterminer la matrice inverse de A, soit on écrit le système $Y=AX$ à inverser avec le pivot de Gauss.
   Ou bien on écrit $A=I-N$ avec N la matrice ayant une surdiagonale de 1 et des 0 ailleurs. Les puissances de N sont évidentes à calculer et on a $N^{n+1}=0$.

En utilisant l'identité de Bernoulli (car I et N commutent), on a

$$I^{n+1} - N^{n+1} \;=\; (I-N)\sum_{k=0}^{n} N^k \qquad \text{ce qui s'écrit} \qquad I = A\sum_{k=0}^{n} N^k$$

Donc $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n} N^k$, ce qui, après calculs des puissances de N, donne :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **Première preuve, sans se fatiguer.** Fixons $m \in \mathbb{N}$.
On écrit f sous la forme $\mathrm{id}_E - g$ avec $g : P \mapsto P'(X+1)$.
Comme id_E et g commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient :

$$f^m \;=\; \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k g^k$$

Appliquons cette égalité d'endomorphismes à un polynôme quelconque. On obtient :

$$\forall\, P \in E, \qquad f^m(P) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k g^k(P)$$

Or, par récurrence immédiate, on montre que $g^k : P \mapsto P^{(k)}(X+k)$. Donc

$$f^m(P) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k P^{(k)}(X+k)$$

Soit $P \in E$. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f^m(P) \;=\; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

Deuxième preuve, on reprouve le binôme de Newton dans ce cas particulier.
On prouve par récurrence sur m le résultat proposé.
On peut commencer par fixer un polynôme P qui ne bougera pas.
Pour tout entier naturel m, on pose

$$\mathcal{H}(m) : \quad f^m(P)(X) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

- $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- Soit $m \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{H}(m)$. Montrons $\mathcal{H}(m+1)$.
En écrivant que $f^{m+1} = f \circ f^m$ et en utilisant $\mathcal{H}(m)$, on a :

$$f^{m+1}(P) = f \circ f^m(P) = f\left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)\right)$$

Par linéarité de f, puis définition de f :

$$f^{m+1}(P) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f\Big(P^{(i)}(X+i)\Big) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \Big(P^{(i)}(X+i) - P^{(i+1)}(X+i+1)\Big)$$

Ensuite, on utilise la linéarité du symbole Σ, puis on fait un changement d'indice.

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i) - \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i+1)}(X+i+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i) - \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m}{j-1} P^{(j)}(X+j)$$

Enfin, on sort le terme pour $i = 0$ et le terme pour $j = m+1$. D'où

$$= (-1)^0 \binom{m}{0} P^{(0)}(X+0) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \left[\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right] P^{(i)}(X+i) + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} P^{(m+1)}(X+m+1)$$

D'où

$$f^{m+1}(P)(X) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} P^{(i)}(X+i)$$

Ce qui établit $\mathcal{H}(m+1)$.

— On remarque que l'égalité est « linéaire en P » .

— Pour $P = X^0$, l'égalité est connue...

— Pour $P = X^1$, l'égalité est plus difficile à établir. Penser à la formule du capitaine

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

— Pour $P = X^2$, l'égalité est désagréable à montrer.
On peut utiliser le jeu d'écriture $k^2 = k(k-1) + k$.
Mais il est plus astucieux de montrer l'égalité directement avec le polynôme $P = X(X-1)$, en exploitant le fait que

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

— Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Pour $P = X(X-1)\cdots(X-i+1)$, on exploite le fait que

$$k(k-1)\cdots(k-i+1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-i+1)\binom{n-i}{k-i}$$

— On conclut en disant que l'égalité est vérifiée pour les vecteurs de la famille

$$\Big(X(X-1)\cdots(X-i+1)\Big)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$$

qui est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Par linéarité, la formule est vraie pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

172

En développant $(X-x)(X-y)(X-z)$, on obtient que x, y et z sont racines de $X^3 - xyz$.
Les trois nombres complexes ont donc le même cube et, *a fortiori*, le même module.

> ***Rappel.*** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $z, \omega \in \mathbb{C}$.
> *Si* $z^n = \omega^n$, *alors* $|z| = |\omega|$.

1. • Comme P est non constant, P est de degré $n \geqslant 1$.
   Notons c son coefficient dominant. Alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} cx^n$

   Or $cx^n \xrightarrow[+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$

   L'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ implique que P est positif au voisinage de $+\infty$, donc la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$, donc $c > 0$.

   • Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine de P. Notons m sa multiplicité.
   Ainsi, P s'écrit $(X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
   On a donc $P(x) \underset{a}{\sim} \lambda(x-a)^m$ où $\lambda = Q(a)$.
   Supposons par l'absurde que m est impair.
   Alors $(x-a)^m$ change de signe au voisinage de a, donc $P(x)$ aussi (par partage de signe).
   Or $P(x)$ est positif pour x au voisinage de a.
   D'où la contradiction.
   Donc m est pair.

   Bilan. Les racines de P sont de multiplicité paire.
2. Considérons la décomposition en facteurs irréductibles de P :
$$P = c \prod_{i=1}^{s} (X - x_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^{t} R_j^{q_j}$$
   où les x_i sont les racines réelles de P (elles sont de multiplicité paire !),
   et les R_j sont des polynômes du second degré à discriminant négatif.
   Les racines de ces polynômes sont des nombres complexes conjugués $z_j, \overline{z_j}$.
   En particulier, on a
$$R_j = (X - z_j)\,\overline{(X - z_j)}.$$
   Posons donc
$$C = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{s} (X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{t} (X - z_j)^{q_j}.$$
   On a bien $P = C\overline{C}$.
3. Décomposons C en partie réelle et en partie imaginaire $C = A + \mathrm{i}B$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.
   D'après la question précédente, on a $P = C\overline{C} = A^2 + B^2$.

176

À rédiger.
Pour mémoire, voici un lien.

177

Idée de la preuve.

Avec Euler, on trouve que
$$P \;=\; \frac{\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}X\right)^n-\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}X\right)^n}{2\mathrm{i}}.$$
Soit $z\in\mathbb{C}$.
On a $P(z)=0$ si et seulement s'il existe $\omega\in\mathbb{U}_n$ tel que $1+\mathrm{e}^{i\theta}z=\omega(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}z)$.
En inversant l'expression homographique, on a $z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega\mathrm{e}^{-i\theta})=\omega-1$.
En notant $\omega=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha_k}$ avec $\alpha_k=\dfrac{k\pi}{n}$, on a
$z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta+2\alpha_k)})=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha_k}-1$.
On constate que les angles moitiés de gauche et de droite sont égaux, donc cela sent bon la simplification.
On trouve alors :
$$z \;=\; \frac{\sin(\alpha_k)}{\sin(\theta-\alpha_k)} \;=\; \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{k\pi}{n}\right)}$$
qui est réel !

— On remarque que les constantes de module 1 sont solutions, que le polynôme nul n'est pas solution, que les monômes X^n sont solutions.

— On remarque également que $\mathcal{E}$ est stable par produit (ceci est dû au fait que $\mathbb{U}$ est lui-même stable par produit : un produit de nombres complexes de module 1 est de module 1).
Ainsi, si on prend P et Q dans $\mathcal{E}$, alors :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{U}, \quad (PQ)(\omega) = \underbrace{P(\omega)}_{\in \mathbb{U}}\underbrace{Q(\omega)}_{\in \mathbb{U}} \in \mathbb{U}$$

— Avec cela, on peut rapidement conjecturer que

$$\mathcal{E} \;=\; \Big\{ P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists\, (\lambda, n) \in \mathbb{U} \times \mathbb{N},\; P = \lambda X^n \Big\}$$

Montrons l'inclusion difficile.
Soit $P \in \mathcal{E}$. Alors P n'est pas le polynôme nul, donc possède un degré entier $n \in \mathbb{N}$.
Par hypothèse, on a (penser à traduire que le module au carré vaut 1) :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{U}, \quad P(\omega)\overline{P(\omega)} = 1$$

Comme $\overline{P(\omega)} = \overline{P}(\overline{\omega})$ et $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$, on a en multipliant par ω^n :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{U}, \quad P(\omega) \times \omega^n \overline{P}(\omega^{-1}) \;=\; \omega^n$$

Cette dernière égalité est polynomiale, elle s'écrit

$$P(\omega)Q(\omega) = \omega^n \qquad \text{où} \quad Q \;=\; \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^{n-k} \quad \text{avec } a_k = \operatorname{coeff}_{X^k}(P)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \overline{a_{n-\ell}} X^{\ell}$$

Ainsi, PQ et X^n coïncident sur $\mathbb{U}$ qui est une partie infinie, donc ils sont égaux.
En passant au degré dans l'égalité $PQ = X^n$, on en déduit que $\deg Q = 0$, ainsi

$$\forall\, \ell \in [\![1, n]\!], \qquad \overline{a_{n-\ell}} = 0$$

D'où

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \qquad a_k = 0$$

Finalement, $P = a_n X^n$. On montre que $a_n \in \mathbb{U}$ en évaluant en $1 \in \mathbb{U}$.

180

Considérons le polynôme $D = P - Q$. Comme P et Q sont distincts, la différence D est un polynôme non nul.
D'après le critère radical de nullité, D a un nombre fini ($\leqslant \deg D$) de racines. En particulier, on peut trouver un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que D n'a pas de racine dans $[A, +\infty[$.
En effet,

— si D n'a pas de racine (réelle), n'importe quel réel A convient, par exemple $A = 0$;

— si D a des racines (réelles), le réel $A = z_{\max} + 1$ convient, où $z_{\max}$ est la plus grande racine réelle.

Montrons que sur l'intervalle $[A, +\infty[$, le polynôme D reste de signe constant.

— Si $D(A) > 0$, montrons $\forall t \in [A, +\infty[\,, D(t) > 0$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in [A, +\infty[$ tel que $D(t_0) \leqslant 0$. Comme $D(A) > 0$, on a nécessairement $t_0 > A$.
La fonction $t \mapsto D(t)$ est continue (car polynomiale), vaut $D(A) > 0$ en A et $D(t_0) \leqslant 0$ en t_0. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $c \in [A, t_0]$ tel que $D(c) = 0$.
Cela fournit une racine réelle $\geqslant A$ au polynôme D, et une contradiction avec ce qui précède.
Cela conclut la preuve : on a montré $\forall t \geqslant A, D(t) > 0$, donc
$$\forall t \geqslant A, P(t) < Q(t).$$

— Si $D(A) < 0$, on montre de la même façon $\forall t \geqslant A, D(t) < 0$, donc
$$\forall t \geqslant A, P(t) > Q(t).$$

181

Analyse (éventuellement cachée). Si P est un tel polynôme, P' est de degré 4 et vérifie

$$(X-1)^2 \mid (P+1)' = P' \qquad \text{et} \qquad (X+1)^2 \mid (P-1)' = P',$$

d'où l'on tire l'existence de $u \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$P' = u(X-1)^2(X+1)^2 = u(X^4 - 2X^2 + 1),$$

puis celle de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = u\left(\frac{X^5}{5} - \frac{2}{3}X^3 + X\right) + c.$$

Les conditions $P(1) = -1$ et $P(-1) = 1$ donnent

$$\begin{cases} \frac{8}{15}u + c = -1 \\ -\frac{8}{15}u + c = 1 \end{cases}$$

d'où l'on tire $c = 0$ puis $u = -\frac{15}{8}$. Ainsi,

$$P = -\frac{3}{8}X^5 + \frac{5}{4}X^3 - \frac{15}{8}X.$$

Synthèse. Réciproquement, on vérifie que $-\frac{3}{8}X^5 + \frac{5}{4}X^3 - \frac{15}{8}X$ convient.

Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in K[X]$ tel que $P = P'P''$.

Distinguons deux cas.

— Si $\deg P \leqslant 1$, on a $P'' = 0$, donc $P = P'P'' = 0$.

— si $d = \deg P \geqslant 2$, on a $\deg(P'P'') = \deg P' + \deg P'' = (d-1) + (d-2)$.
On a donc l'égalité $d = 2d - 3$, c'est-à-dire $d = 3$.
À ce stade, on pourrait chercher bourrinement parmi tous les polynômes de degré 3. On va essayer d'être un peu plus fin, même si ce n'est pas nécessairement la meilleure chose à faire ici.
Si l'on considère P' comme un élément de $\mathbb{C}[X]$, il est scindé. Ainsi, l'une ou l'autre des deux possiblilités adviennent :

- Le polynôme P' a deux racines distinctes $z_1 \neq z_2$. L'égalité $P = P'P''$ montre alors que z_1 et z_2 sont également des racines de P. D'après le critère différentiel, on a donc
$$\mu_{z_1}(P) \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \mu_{z_2}(P) \geqslant 2,$$
ce qui contredit le fait que P est de degré 3. Ce cas est donc impossible.
- Le polynôme P' a une racine double z. L'égalité $P = P'P''$ montre alors que z est également une racine de P. D'après le critère différentiel, z est donc une racine au moins triple de P. Vu que P est de degré 3, P s'écrit donc sous la forme $P = u(X-z)^3$, où $u \in K$ est le coefficient dominant du polynôme P.
Remarquons que dans le cas $K = \mathbb{R}$, la racine z est nécessairement réelle. En effet [1], si z n'était pas réelle, $\overline{z}$ serait aussi racine triple de P ce qui est exclu par des considérations de degré.
Ainsi, on a trouvé $u \in K^*$ et $z \in K$ tel que $P = u(X-z)^3$.
On obtient alors par le calcul que $P'P'' = 3u(X-z)^2 \times 6u(X-z) = 18u^2(X-z)^3$, donc l'égalité $P = P'P''$ entraîne $u = \frac{1}{18}$.
Ainsi, il existe $z \in K$ tel que $P = \frac{1}{18}(X-z)^3$.

En résumé, on a $P = 0$ ou $\exists z \in K : P = \frac{1}{18}(X-z)^3$.

Synthèse. Réciproquement, il est déjà clair que le polynôme nul satisfait à la condition.

Dans le deuxième cas, soit donc $z \in K$ et $P = \frac{1}{18}(X-z)^3$. On a donc

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{6}(X-z)^2 \\ P'' &= \frac{1}{3}(X-z) \\ \text{donc} \quad P'P'' &= \frac{1}{18}(X-z)^3 \\ &= P, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

In fine,

$$\left\{P \in K[X] \mid P = P'P''\right\} \;=\; \{0\} \cup \left\{\frac{1}{18}(X-z)^3,\ z \in \mathbb{K}\right\}$$

1. Deuxième argument : d'après les relations coefficients-racines, le coefficient de degré 2 de P est $-3uz$, ce qui entraîne assez directement que $z \in \mathbb{R}$.

183

Clairement, $(P, \lambda P)$ avec $|\lambda| \geqslant 1$ convient. On va montrer que c'est la seule possibilité.
Soit (P, Q) un tel couple ; écrivons $Q = u \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)^{p_i}$ une factorisation de Q (u est un complexe non nul, les (a_i) sont des complexes distincts et $p_i \geqslant 1$). Montrons que P est associé à Q en trois étapes.

— En a_i, l'inégalité implique $P(a_i) = 0$: les a_i sont des racines de P.

— On a l'équivalent

$$Q(a_i + h) \sim u \prod_{j \neq i}(a_i - a_j) h^{p_i}.$$

L'inégalité entraîne donc que $P(a_i + h) = \underset{h \to 0}{O}(h^{p_i})$. Cela entraîne que la multiplicité de a_i en tant que racine de P est $\geqslant p_i$. En particulier, Q divise P.

— En général, un polynôme R de terme dominant $a_d\, X^d$ vérifie $|R(x)| \underset{|x| \to \infty}{\sim} a_d\, |x|^d$.

Ainsi, l'inégalité pour des complexes de grand module entraîne $\deg P \leqslant \deg Q$ et donc que P et Q sont associés.