Fonctions rationnelles

17c-FonctionsRationnelles.pdf, 30 janvier 2025, 14:11

Dans ce chapitre, lorsque $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme, on notera encore P la fonction polynomiale associée, c'est-à-dire l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$.
Mais il faut garder en tête que cette application n'est pas du même type que le polynôme formel P !

Autre notation pratique : pour un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, on notera $\mathrm{Rac}(Q)$ l'ensemble de ses racines prises dans $\mathbb{K}$.

Motivation

Un nombre rationnel, c'est la donnée de p et q dans $\mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$.
Comment trouver la partie entière du rationnel $\dfrac{p}{q}$?

On peut écrire la division euclidienne de p par q, disons $p = qe + r$ et obtenir :

$$\frac{p}{q} = \underbrace{e}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{r}{q}}_{\in\mathbb{Q}\cap[0,1[}$$

La partie entière de $\dfrac{p}{q}$ est l'entier e qui est donc le quotient de la division euclidienne de P par Q.

I. Généralités

Définition

1 **Définition.** Soit A une partie infinie de $\mathbb{K}$.
Une fonction $f : A \to \mathbb{K}$ est dite *fonction rationnelle* lorsqu'il existe deux polynômes $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ vérifiant :

$$\big(\forall x \in A,\ Q(x) \neq 0\big) \quad \text{et} \quad f : x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- **Exemple.** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-2,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3+x^2-1}{(x-1)(x+2)} \end{array}$ est une fonction rationnelle.
- **Exemple.** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z-\mathrm{i}} \end{array}$ est une fonction rationnelle.
- **Cas particulier.** Toute fonction polynomiale est en particulier une fonction rationnelle.
- **WHY?** Pour $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul, alors la partie $\mathbb{K}\setminus\mathrm{Rac}(Q)$ est infinie (WHY?).

Décomposition avec la partie entière

- **Avant de commencer.** Considérons la fonction rationnelle $x \longmapsto \frac{x^5}{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  On a (WHY?) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^5}{x^2+x+1} = x^3 - x^2 + 1 - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

  À votre avis, comment trouver une telle décomposition ?

2 **Proposition (décomposition d'une fonction rationnelle avec sa partie entière).**
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$.
Il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \dfrac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)} \\ \deg R < \deg Q \end{cases}$$

- **Division euclidienne!** Au cours de la preuve, on a vu que le couple (E, R) n'est ni plus ni moins que le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q.
  Attention ici, malgré la notation, Q n'est pas le quotient, mais le diviseur!

- **Partie entière.** Le polynôme E s'appelle la *partie entière* de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.
  On a
  - si $\deg P < \deg Q$, alors $E = 0$
  - si $\deg P \geqslant \deg Q$, alors $\deg E = \deg P - \deg Q$

- **Exemple.** Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^5}{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Déterminons la partie entière et l'écriture donnée dans la proposition précédente.

  La fonction rationnelle f est de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P = X^5$ et $Q = X^2 + X + 1$.
  La division euclidienne de P par Q s'écrit :

$$P = (X^3 - X^2 + 1)Q - (X+1).$$

  Ainsi, la partie entière de la fonction rationnelle f est le polynôme $X^3 - X^2 + 1$, et l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x^2 + 1 - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

3 **Question.** Faire le même travail avec :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^3}{x-1} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x^3}{x^7-1} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{x^7}{x^7+x+1} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{x+1}{3x+7}$$

II. Décomposition en éléments simples (PCSI)

4 **Exemple introductif.** Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

Dans ce qui suit, on suppose le polynôme Q unitaire. En particulier, Q est non nul !
Ce n'est pas restrictif, car on peut toujours s'arranger pour « mettre » le coefficient dominant de Q au niveau du numérateur (c'est-à-dire l'inclure dans P).

5 preuve

Proposition (DÉS : cas où Q est scindé à racines simples).
Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q unitaire.
Notons E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.
Supposons que le polynôme Q est scindé à racines simples que l'on écrit $Q = \prod_{k=1}^{q} (X - \alpha_k)$.

- Alors il existe des scalaires $\lambda_k \in \mathbb{K}$ (et ils sont uniques) tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{q} \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k}$$

- Soit $k \in [\![1, q]\!]$. En écrivant Q sous la forme $Q = (X - \alpha_k)\widetilde{Q_k}$, on a les deux formules :

$$\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{\widetilde{Q_k}(\alpha_k)} \quad \text{et} \quad \lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

- La formule précédente s'appelle **la décomposition en éléments simples** de la fonction rationnelle.
- **Précision.** Que vaut $\widetilde{Q_k}$? Réponse. On a $\widetilde{Q_k} = \prod_{j \neq k} (X - \alpha_j)$
- **Choix de la formule.**
  — la formule $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{\widetilde{Q_k}(\alpha_k)}$ est utilisée lorsque le dénominateur est factorisé ;
  — on utilise $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ lorsque le dénominateur apparaît sous forme développée, donc facile à dériver.
- **Exemple.** Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^3-2x+7}{x^2+x-2}$.
  Notons $P = X^3 - 2X + 7$ et $Q = X^2 + X - 2$.
  — La partie entière de f, quotient dans la division euclidienne de P par Q, vaut $X - 1$.
  — On a $Q = (X-1)(X+2)$, donc Q est scindé à racines simples.

  D'après la proposition précédente, on peut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad f(x) = x - 1 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

  Pour trouver a et b, utilisons la formule « $\lambda_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{\widetilde{Q_k}(\alpha_k)}$ » :

$$a = \frac{1^3 - 2 \times 1 + 7}{1 + 2} = 2 \qquad \text{et} \qquad b = \frac{(-2)^3 - 2 \times (-2) + 7}{-2 - 1} = -1.$$

  La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

III. Des exemples

6 **Question.** Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2+1}$.

7 **Question.** Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \dfrac{10z^3}{(z^2+1)(z^2-4)}$.
sol → 10

8 **Question.** Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^3-1}$.
sol → 10

9 **Question.** Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^5-1}$.
sol → 11

10 **Proposition (fonction réelle homographique).**
Soit a, b, c, d quatre réels, avec $c \neq 0$.

— La division euclidienne de $aX+b$ par $cX+d$ est :

$$aX+b \;=\; \frac{a}{c}\big(cX+d\big) \;-\; \frac{1}{c}(ad-bc)$$

— On a la décomposition en éléments simples :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \qquad \frac{ax+b}{cx+d} \;=\; \frac{a}{c} \;-\; \frac{1}{c}\,\frac{ad-bc}{cx+d}$$

— La fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et on a :

$$f' : x \longmapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

À lire uniquement :

11 **Proposition (Q' sur Q).**

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire scindé à racines simples que l'on écrit $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{q}(X-\alpha_k)$.

Alors on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \qquad \frac{Q'(x)}{Q(x)} \;=\; \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{x-\alpha_k}.$$

IV. Application au calcul de primitives et de dérivées $n^{\text{èmes}}$

12 **Exemple.** Reprenons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{x^3-2x+7}{x^2+x-2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.
La décomposition en éléments simples de f est :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}, \quad f(x) \;=\; x-1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

- **Question.** Déterminer *une* primitive de f sur l'intervalle $]-2,1[$.

  — *Une* primitive de $x \mapsto x-1$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x$.

  — **Des** primitives sur $]-2,1[$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont respectivement

  $$x \mapsto \ln|x-1| \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \ln|x+2|$$

  Une primitive de f sur $]-2,1[$ est donc :

  $$F : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x \,+\, 2\ln|x-1| \,-\, \ln|x+2|,$$

  ou encore, puisque l'on travaille sur l'intervalle $]-2,1[$:

  $$F : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x \,+\, 2\ln(1-x) \,-\, \ln(x+2).$$

- **Question.** Soit $n \geqslant 2$. Déterminer l'expression de la dérivée d'ordre n de f sur l'intervalle $]-2,1[$.

  — La fonction polynomiale $x \mapsto x-1$ a ses dérivées nulles à partir de l'ordre 2.

  — Les dérivées d'ordre n des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont respectivement :

  $$x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

  La dérivée d'ordre n de f est :

  $$f^{(n)} : x \longmapsto (-1)^n n!\Big(\frac{2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\Big).$$

13 sol → 11 **Question.** Soit $n \geqslant 1$.
Montrer que la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction Arctan est donnée par :

$$\operatorname{Arctan}^{(n)} : x \longmapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^n}\Big).$$

Défi. Trouver une expression sans passer par $\mathbb{C}$.

V. La décomposition en éléments simples (MPSI)

Des exemples

Toutes les fonctions rationnelles ne rentrent pas dans le cadre de la proposition 5. Elle ne traite que les fonctions rationnelles de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec Q *scindé à racines simples.*

Le cas général est hors programme.

Illustrons sur deux exemples quelques techniques qui, en admettant la forme de la décomposition en éléments simples recherchée, permettent d'en déterminer les coefficients.

- **Cas où Q n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples.**

  Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^3-1} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
  Admettons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

  $$(\star) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) \;=\; \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

  — **Détermination de a.** En multipliant $(\star)$ par $x-1$, on obtient

  $$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \underbrace{(x-1)f(x)}_{\frac{x+1}{x^2+x+1}} \;=\; a \;+\; (x-1)\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

  En passant à la limite quand $x \to 1$, on obtient $a = \frac{2}{3}\cdot$

  — **Détermination de b.** En multipliant $(\star)$ par x, on obtient :

  $$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{x(x+1)}{x^3-1} \;=\; \frac{ax}{x-1} \;+\; \frac{(bx+c)x}{x^2+x+1}$$

  En passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient $0 = a + b$, donc $b = -\frac{2}{3}\cdot$

  — **Détermination de c.** En évaluant $(\star)$ en $x = 0$, on obtient :

  $$-1 = -a + c \qquad \text{d'où} \qquad c = a - 1 = -\frac{1}{3}\cdot$$

  Bilan. On a

  $$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)\cdot$$

- **Cas où Q est scindé sur $\mathbb{R}$ mais possède des racines multiples.**

  Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{x(x-1)^3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
  Admettons qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

  $$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad f(x) \;=\; \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$$

  — Déterminons les coefficients a et d.
    — En multipliant $(\star)$ par x puis en passant à la limite quand $x \to 0$, on obtient $a = -2$.
    — En multipliant $(\star)$ par $(x-1)^3$ puis en passant à la limite quand $x \to 1$, on obtient $d = 3$.

  — En multipliant $(\star)$ par x puis en passant à la limite quand $x \to +\infty$, on a $0 = a + b$, donc $b = 2$.

  — Pour déterminer le dernier coefficient c, évaluons $(\star)$ en -1 :

  $$\frac{3}{8} \;=\; -a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - \frac{d}{8} \qquad \text{d'où} \qquad c = -1.$$

  Bilan. On a

  $$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad f(x) \;=\; \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

Les résultats

Pour finir, donnons deux théorèmes **hors programme** indiquant la forme de la décomposition en éléments simples dans le cas général.
Il est intéressant de comprendre qu'ils sont cohérents avec les décompositions en éléments simples obtenues dans les exemples.

Dans ce qui suit, on suppose le polynôme Q unitaire. En particulier, Q est non nul !
Ce n'est pas restrictif, car on peut toujours s'arranger pour « mettre » le coefficient dominant de Q au niveau du numérateur (c'est-à-dire l'inclure dans P).

14 **Proposition (Cas où Q est scindé).**
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec Q unitaire.
Notons E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.
Supposons que le polynôme Q soit scindé sous la forme $Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

Alors il existe des scalaires $\lambda_{k,\ell} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(x - \alpha_k)^{\ell}}.$$

- **Exemple.** Si $Q = (X-\alpha)^2 (X-\beta)^3$, la proposition dit que ...

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

15 **Proposition (Cas général pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients réels).**
Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec Q unitaire.
Notons E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.
Écrivons la DFI du polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$:

$$Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{s} R_k^{\mu_k} \qquad \text{où les } R_k \text{ sont de degré 2 à discriminant} < 0.$$

Alors il existe des réels $\lambda_{k,\ell}$, $a_{k,\ell}$ et $b_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(x-\alpha_k)^{\ell}} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{\ell=1}^{\mu_k} \frac{a_{k,\ell}\, x + b_{k,\ell}}{R_k(x)^{\ell}}$$

- **Exemple.** Si $Q = (X-\alpha)^2 (X^2+1)^3$, la proposition dit que ...

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Fonctions rationnelles

preuve et éléments de correction

5

• Montrons l'unicité.
Donnons-nous des scalaires $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que …
Multiplions par $Q(x)$.
On a alors

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad P(x) \;=\; Q(x)E(x) \;+\; \sum_{k\in[\![1,q]\!]} \lambda_k \underbrace{\frac{Q(x)}{x-\alpha_k}}_{=\widetilde{Q}_k(x)}$$

On a deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q)$ qui est une partie infinie, donc ils sont égaux :

$$P \;=\; QE \;+\; \sum_{k\in[\![1,q]\!]} \lambda_k \widetilde{Q_k}$$

Fixons $k \in [\![1,n]\!]$ et isolons le terme.

$$P \;=\; QE \;+\; \lambda_k \widetilde{Q_k} \;+\; \sum_{i\in[\![1,q]\!]\setminus\{k\}} \lambda_i \widetilde{Q_i}$$

Évaluons en α_k.
On obtient :

$$P(\alpha_k) \;=\; \underbrace{Q(\alpha_k)}_{=0} E(\alpha_k) \;+\; \lambda_k \underbrace{\widetilde{Q_k}(\alpha_k)}_{\neq 0} \;+\; \sum_{i\in[\![1,q]\!]\setminus\{k\}} \lambda_i \underbrace{\widetilde{Q_i}(\alpha_k)}_{=0}$$

D'où $\lambda_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{\widetilde{Q_k}(\alpha_k)}$.

Pour l'autre formule, on a $Q = (X-\alpha_k)\widetilde{Q_k}$.
D'où $Q' = \widetilde{Q_k} + (X-\alpha_k)\widetilde{Q_k}'$.
Il reste à évaluer en α_k pour obtenir $Q'(\alpha_k) = \widetilde{Q_k}(\alpha_k)$.

• Existence.
On a $R \in \mathbb{K}_{q-1}[X]$ et $\mathbb{K}_{q-1}[X] = \mathrm{Vect}(\widetilde{L_1}, \ldots, \widetilde{L_q})$ où les $\widetilde{L_k}$ sont les polynômes de Lagrange **unitaires** associés aux α_i.
On remarque que $\widetilde{L_k}$ est exactement $\widetilde{Q_k}$.

7

La fonction rationnelle f est de la forme $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P = 10X^3$ et $Q = (X^2+1)(X^2-4)$.

— La partie entière de f est nulle, car $\deg P < \deg Q$.

— Le polynôme Q est scindé à racines simples : on a $Q = (X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+2)(X-2)$.

La proposition 5 s'applique, donc il existe un unique quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tel que

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}, \pm 2\}, \quad f(z) \;=\; \frac{a}{z-\mathrm{i}} + \frac{b}{z+\mathrm{i}} + \frac{c}{z-2} + \frac{d}{z+2}.$$

En appliquant les formules, on trouve $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$ et $d = 4$.

8

La fonction rationnelle f est de la forme :

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^3-1} = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \text{avec } P = 1 \text{ et } Q = X^3 - 1$$

— La partie entière de f est nulle, car $\deg P < \deg Q$.

— Le polynôme Q est scindé à racines simples : on a $Q = (X-1)(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}})$.

Ainsi, la proposition 5 assure qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\}, \quad f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-j} + \frac{c}{z-\bar{j}}.$$

Pour déterminer les coefficients, utilisons la formule « $\lambda_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ ».

On a $Q = X^3 - 1$, donc $Q' = 3X^2$.
D'où

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{P(j)}{Q'(j)} = \frac{1}{3\mathrm{j}^2} = \frac{1}{3}\mathrm{j} \quad \text{et} \quad c = \frac{P(\bar{\mathrm{j}})}{Q'(\bar{\mathrm{j}})} = \frac{1}{3\bar{\mathrm{j}}^2} = \frac{1}{3}\bar{\mathrm{j}}$$

La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\}, \quad \frac{1}{z^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{\mathrm{j}}{z-\mathrm{j}} + \frac{\bar{\mathrm{j}}}{z-\bar{\mathrm{j}}}\right).}$$

9

La fonction rationnelle f est de la forme :

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^5-1} = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \text{avec } P = 1 \text{ et } Q = X^5 - 1$$

— La partie entière de f est nulle, car $\deg P < \deg Q$.

— Le polynôme Q est scindé à racines simples : on a $Q = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_5} (X - \omega)$.

Ainsi, la proposition 5 assure qu'il existe des $\lambda_\omega \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_5, \quad f(z) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \frac{\lambda_\omega}{z - \omega}$$

Pour déterminer les coefficients, utilisons la formule « $\lambda_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ ».

On a $Q = X^5 - 1$, donc $Q' = 5X^4$.
D'où

$$\forall \omega \in \mathbb{U}_5, \qquad \lambda_\omega = \frac{P(\omega)}{Q'(\omega)} = \frac{1}{5\omega^4} = \frac{1}{5}\frac{\omega}{\omega^5} = \frac{1}{5}\omega$$

La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_5, \quad f(z) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \frac{\frac{1}{5}\omega}{z - \omega}$$

13

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $g : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right).$$

Les dérivées $n^{\text{èmes}}$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-\mathrm{i}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+\mathrm{i}}$ sont respectivement :

$$x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-\mathrm{i})^{n+1}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}.$$

D'où

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = g^{(n-1)}(x) \ = \ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^n}\right).$$