Convexité

I. Du vocabulaire et des résultats « élémentaires »

1

Définition.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

— Une combinaison *linéaire* de a et b est un nombre réel qui est de la forme $\lambda a + \mu b$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Une combinaison *convexe* de a et b est un nombre réel qui est de la forme $\lambda a + \mu b$ avec λ, μ positifs de somme 1.

- **Exemple.** Le nombre 3 est combinaison *linéaire* de 70 et 71, WHY ?
Mais 3 n'est pas combinaison *convexe* de 70 et 71 !

2 preuve

Proposition. Soit $a < b \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des combinaisons convexes de a et b est l'ensemble des réels du segment $[a, b]$.

On a les trois égalités :

(G) $$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, t \in [0,1],\ x = (1-t)a + tb\right\}$$

(M) $$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, \lambda, \mu \text{ positifs de somme } 1,\ x = \lambda a + \mu b\right\}$$

(D) $$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, s \in [0,1],\ x = sa + (1-s)b\right\}$$

- **Vocabulaire.** On dit que $(1-t)a + tb$ est une paramétrisation du segment $[a, b]$ (et t est le paramètre, on peut y penser comme un temps).
Il est bon de voir la quantité $(1-t)a + tb$ comme une expression affine de t via $a + t(b-a)$.
- **Trois expressions explicites.** Au cours de la preuve précédente, on a vu qu'un réel $x \in [a, b]$ s'écrit de manière explicite comme combinaison convexe de a et b.
Il y a trois expressions :

(G) $$x = \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)a + \frac{x-a}{b-a}b$$

(M) $$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b$$

(D) $$x = \frac{b-x}{b-a}a + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right)b$$

3 preuve

Proposition. Soit I un intervalle.

— On a :
$$\forall\, a, b \in I, \quad \forall\, \lambda, \mu \text{ réels positifs de somme } 1, \qquad \lambda a + \mu b \in I$$

— On a :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in I, \quad \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ réels positifs de somme } 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I$$

Autrement dit, un intervalle est stable par combinaison convexe finie.

On dit qu'un intervalle est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

4
preuve

Petit lemme géométrique.
Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On considère les deux points du plan suivants $A(a, \alpha)$ et $B(b, \beta)$.

i) Soit x_0 un réel de $[a, b]$ que l'on écrit $x_0 = a + t_0(b - a)$ avec $t_0 \in [0, 1]$.
Le point d'abscisse x_0 appartenant à $[AB]$ a pour ordonnée $y_0 = \alpha + t_0(\beta - \alpha)$.

ii) Soit x un réel de $[a, b]$ que l'on écrit $x = \lambda a + \mu b$ avec λ, μ positifs de somme 1.
Le point d'abscisse x appartenant à $[AB]$ a pour ordonnée $\lambda\alpha + \mu\beta$.

iii) Supposons A et B sur la courbe d'une fonction f de sorte que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$.
Soit x un réel de $[a, b]$ que l'on écrit $x = \lambda a + \mu b$ avec λ, μ positifs de somme 1.
Le point d'abscisse x appartenant à $[AB]$ a pour ordonnée $\lambda f(a) + \mu f(b)$.

II. Fonctions convexes et fonctions concaves

Définition

5 **Définition (fonction convexe).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
On dit que f est *convexe* sur I lorsque

$$\forall\, a, b \in I, \quad \forall\, \lambda, \mu \text{ réels positifs de somme } 1, \quad f(\lambda a + \mu b) \leqslant \lambda f(a) + \mu f(b)$$

ou encore

$$\forall\, a, b \in I, \quad \forall\, \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda a + (1-\lambda) b\big) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

L'image par f d'une combinaison convexe de a et b est inférieure à cette même combinaison convexe des images de a et b

Graphiquement, f est convexe lorsque $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de ses cordes.

- **Remarque.**
  L'inégalité étant symétrique en a et b, on peut supposer $a \leqslant b$.
  Pour $a = b$, l'inégalité est toujours vérifiée.
  Pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, l'inégalité est également toujours vérifiée.
- **Conséquence.**
  Pour montrer qu'une fonction est convexe, il suffit d'établir l'inégalité dans le cas où $a < b$ et $\lambda \in \,]0,1[$.
  Cette remarque n'est utile que lorsque les cas extrêmes seraient à traiter à part (et du coup, n'ont pas besoin d'être traités du tout !).
- **Définition équivalente.** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I lorsque

$$\forall\, a < b \in I, \quad \forall\, x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

- **Trois définitions équivalentes, avec taux d'accroissement.**
  Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
  Pour $c \in I$, on rappelle que la fonction taux d'accroissement de f en c est $\tau_c : \begin{array}{ccc} I \setminus \{c\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c} \end{array}$
  La fonction f est convexe sur I lorsque l'une des trois assertions suivantes est vérifiée :

(G) $\quad \forall\, a < x < b \in I, \quad f(x) \leqslant \left(1 - \dfrac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b) \quad$ ce qui s'écrit aussi $\quad \tau_a(x) \leqslant \tau_a(b)$

(M) $\quad \forall\, a < x < b \in I, \quad f(x) \leqslant \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b) \quad$ ce qui s'écrit aussi $\quad \tau_x(a) \leqslant \tau_x(b)$

(D) $\quad \forall\, a < x < b \in I, \quad f(x) \leqslant \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \left(1 - \dfrac{b-x}{b-a}\right) f(b) \quad$ ce qui s'écrit $\quad \tau_b(a) \leqslant \tau_b(x)$

6 **Lemme des 3 pentes.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Illustrer (et montrer ?) l'inégalité dite des 3 pentes :

$$\forall\, a < b < c \in I, \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

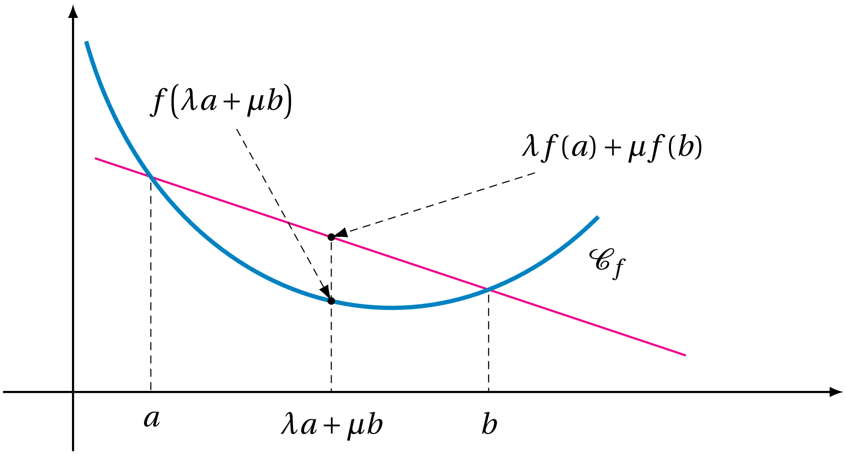
$$\begin{array}{ccccc} \tau_a(b) & \leqslant & \tau_a(c) & & \\ \tau_b(a) & \leqslant & & \leqslant & \tau_b(c) \\ & & \tau_c(a) & \leqslant & \tau_c(b) \end{array}$$

7 **Proposition (interprétation géométrique).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.
Soit A, B deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses $a < b$.
Alors :

— le graphe de $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est situé au-dessus de la droite (AB)

— le graphe de $f_{|[a,b]}$ est situé en dessous de $[AB]$

— le graphe de $f_{|I\cap[b,+\infty[}$ est situé au-dessus de la droite (AB)



- **Reformulation « algébrique » de l'énoncé.** On a

(a au milieu) $\forall x \in I, \quad x < a < b \implies f(x) \geqslant \tau_a(b)(x-a) + f(a) \qquad$ càd $\quad \tau_a(x) \leqslant \tau_a(b)$

(x au milieu) $\forall x \in I, \quad a < x < b \implies f(x) \leqslant \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b) \qquad$ càd $\quad \tau_x(a) \leqslant \tau_x(b)$

(b au milieu) $\forall x \in I, \quad a < b < x \implies f(x) \geqslant \tau_b(a)(x-b) + f(b) \qquad$ càd $\quad \tau_b(a) \leqslant \tau_b(x)$

- **Preuve.**
Le plus simple est de montrer l'inégalité sur les taux d'accroissement.
On voit que la lettre en indice est celle qui est « au milieu » des deux autres.
Ainsi, il suffit de prendre, à trois reprises, la formulation **(M)** de la page précédente !

8 **Définition (fonction concave).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
On dit que f est *concave* sur I lorsque $-f$ est convexe sur I.

9 **Proposition (fonctions usuelles, 1ère passe).**

— Une fonction affine est convexe et concave sur $\mathbb{R}$.

— La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

— La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

Opérations

- **Somme.** Si f et g sont convexes, alors $f+g$ est convexe.
- ~~**Multiplication par un scalaire.**~~ Si f est convexe, alors λf ne l'est pas forcément.
- ~~**Produit.**~~ Le produit de deux fonctions convexes ne l'est pas forcément.
- ~~**Composée.**~~ La composée de deux fonctions convexes ne l'est pas forcément.
- ~~**Réciproque.**~~ La réciproque d'une bijection convexe n'est pas nécessairement concave.

Inégalité de convexité généralisée (HP)

10
preuve
Proposition (inégalité de convexité généralisée / inégalité de Jensen). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in I, \quad \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ réels positifs de somme 1}, \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

- **Idem.** Énoncé analogue avec f concave.
- **Exemple.**
La convexité de $x \mapsto x^2$ nous permet d'écrire (WHY?) :

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{donc} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Par exemple, $\forall\, a, b, c, \in \mathbb{R}, \ (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.
Pour vous amuser, essayez de prouver cette dernière assertion avec des outils de lycée, voire de collège.

III. Caractérisation de la convexité

Pour une fonction quelconque

11 **Proposition (croissance des pentes).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ quelconque. On a :

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall a \in I, \text{ la fonction } \tau_{f,a} \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}$$

- **Remarque.** La conclusion est forte : il s'agit bien de la croissance de $\tau_{f,a}$ sur $I \setminus \{a\}$ et *pas seulement* de sa croissance sur chacun des deux intervalles $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$.
Rien à voir. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- **Preuve.**
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f convexe. Soit $a \in I$ et montrons que τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Soit $x_1 < x_2 \in I \setminus \{a\}$.
Il y a trois implications à montrer :

(a à droite) $x_1 < x_2 < a \implies \tau_a(x_1) \leqslant \tau_a(x_2)$

(a au milieu) $x_1 < a < x_2 \implies \tau_a(x_1) \leqslant \tau_a(x_2)$

(a à gauche) $a < x_1 < x_2 \implies \tau_a(x_1) \leqslant \tau_a(x_2)$

Ces trois implications résultent respectivement de **(D)**, **(M)** et **(G)**.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $x \in I$, la fonction τ_x est croissante sur $I \setminus \{x\}$.
D'après **(M)**, la fonction f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall a < x < b \in I, \quad \tau_x(a) \leqslant \tau_x(b)$$

ce qui est vérifié d'après l'hypothèse.

Régularité des fonctions convexes (HORS PROGRAMME)

12 preuve **Proposition (HP).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ quelconque. Soit a un point intérieur à I.
Si f est convexe, alors f est dérivable à droite et à gauche au point $a \in \mathring{I}$ et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

- **Continuité sur l'intérieur.** On en déduit alors qu'une fonction convexe sur I est continue en tout point intérieur à I.
- **Discontinuité.** Il existe des fonctions convexes discontinues.
La fonction $f : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1[\\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$ est convexe sur $[0,1]$ et discontinue en 1.

Considèrons $g : x \mapsto x^2$ convexe sur $[0,1]$. Les fonctions g et f coïncident sur $[0,1[$ et $g \leqslant f$.
Montrons que f est convexe sur $[0,1]$.
Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in]0,1[$. On a :

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda x + (1-\lambda) y) & = & g(\lambda x + (1-\lambda) y) & \text{car } \lambda x + (1-\lambda) y \in [0,1[\\ & \leqslant & \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) & \text{car } g \text{ est convexe} \\ & = & \lambda f(x) + (1-\lambda) g(y) & \text{car } x \in [0,1[\\ & \leqslant & \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) & \text{car } g \leqslant f \text{ et } 1-\lambda \geqslant 0 \end{array}$$

Pour une fonction dérivable

13
preuve

Proposition (croissance de la dérivée). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On a :

$$f \text{ convexe sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I$$

- **Encore une double inégalité.**
Au cours de la preuve, on a vu que si f est une fonction convexe dérivable, alors pour tout $a < b$:

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b),$$

résultat très facile à retrouver sur un dessin.

- **Remarque.** La réciproque nécessite en fait seulement la continuité sur I et la dérivabilité sur $\mathring{I}$.
On peut montrer que si f est continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ de dérivée croissante, alors f est convexe sur I.

14

Proposition (fonctions usuelles, 2ème passe, énoncé non exhaustif).

— La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

— La fonction logarithme népérien est concave sur $]0,+\infty[$.

— La fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}^+$.

— La fonction Arcsinus est convexe sur $[0,1]$.

15
preuve

Proposition (position de la tangente). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe.
Alors

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

En français : *Si f est convexe, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.*

16
preuve

Proposition (inégalités de convexité).

⋆ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$

⋆ $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$

⋆ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|$

Pour une fonction deux fois dérivable

17

Proposition (positivité de la dérivée seconde). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On a :

$$f \text{ convexe sur } I \iff f'' \text{ positive sur } I$$

18
sol → 15

Question. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^x$ définie sur $]0,+\infty[$.
Étudier sa convexité/concavité sur $]0,+\infty[$.
Puis tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.

19
sol → 16

Question. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Dresser un tableau de « convexité/concavité » pour f sur $\mathbb{R}$ (du même style qu'un tableau de signe en classe de Seconde).
Dresser un tableau de variations pour f sur $\mathbb{R}$. Puis tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.
• Même question avec $x \mapsto e^{-1/x}$ sur $]0,+\infty[$.

IV. Des inégalités

20
sol → 16

Question. Montrer les inégalités suivantes et les illustrer !

- ⋆ $\forall\, x \in [1, \mathrm{e}], \quad \ln x \geqslant \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$
- ⋆ $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi} x \leqslant \sin x$

21
sol → 16

Question. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer l'*inégalité de Young* $\quad ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

22
sol → 16

Question (Différentes moyennes pour $n = 2$).
Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ de somme 1. On pose

$$A = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad G = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}, \quad H = \left(\lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2}\right)^{-1}, \quad Q = \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}$$

Montrer que $G \leqslant A$ puis $A \leqslant Q$ puis $H \leqslant A$ et enfin $H \leqslant G$.

V. Extremums locaux et point d'inflexion

23 **Définition (extremum local).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$ un point intérieur à I.

On dit que a est un extremum local de f lorsque
la quantité $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a.

Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ est d'un même côté que la droite (horizontale) d'équation $y = f(a)$

24 preuve **Lemme de l'extremum local en un point intérieur.** Pour f dérivable en $a \in \mathring{I}$, on a :

$$f \text{ admet un extremum local en } a \in \mathring{I} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(a) = 0$$

Attention la réciproque est fausse : penser à $f : x \mapsto x^3$ pour $a = 0$.

25 **Définition (point d'inflexion).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a point intérieur de I. On note $\mathbb{T}_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

On dit que a est un point d'inflexion de f lorsque
la quantité $f(x) - \mathbb{T}_a(x)$ change de signe au voisinage de a (passe de négatif à positif, ou le contraire)

Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ est traversée par sa tangente en a (au voisinage de a).

26 preuve **Lemme du point d'inflexion en un point intérieur.** Pour f deux fois dérivable en $a \in \mathring{I}$, on a :

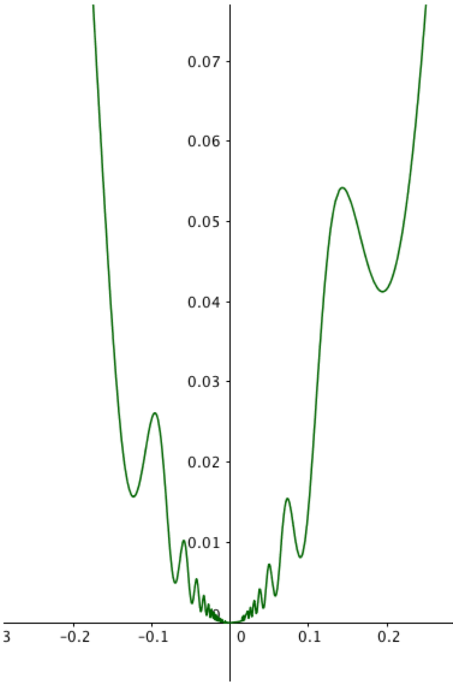
$$f \text{ admet un point d'inflexion en } a \in \mathring{I} \qquad \Longrightarrow \qquad f''(a) = 0$$

Attention la réciproque est fausse : penser à $f : x \mapsto x^4$ pour $a = 0$.

• On aurait tendance à penser que si une fonction admet un minimum local en a, alors f' est négative au voisinage gauche de a et positive au voisinage droit de a. Il n'en est rien.

Voici l'exemple d'une fonction dérivable ayant un minimum en $a = 0$ et dont la dérivée n'est pas négative à gauche de a et n'est pas positive à droite de a.

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$



Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable en 0 (WHY?) et

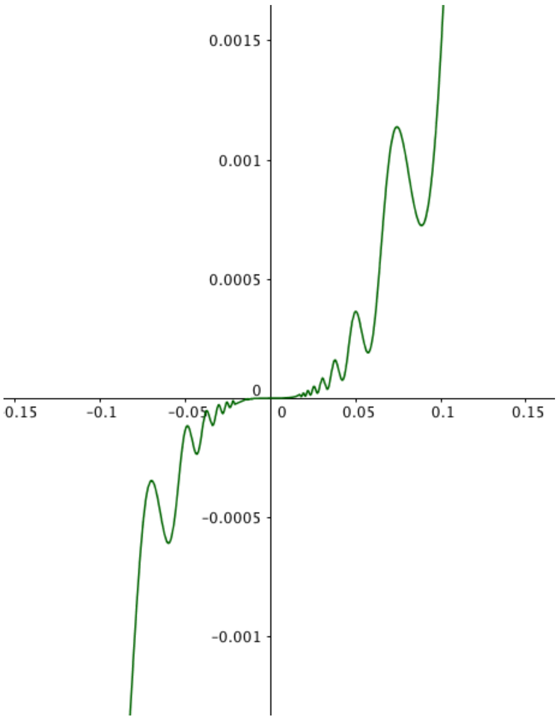
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 4x$$

Vous vérifierez que $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) \leqslant 0$ et $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \geqslant 0$, donc f' ne garde pas un signe constant au voisinage de 0^+.

• On aurait tendance à penser que si une fonction admet un point d'inflexion en a, alors f'' est d'un certain signe au voisinage gauche de a et de l'autre signe au voisinage droit de a. Il n'en est rien.

Voici l'exemple d'une fonction f deux fois dérivable ayant un point d'inflexion en $a = 0$ (la courbe est en-dessous puis au dessus de la tangente en a), mais pourtant f'' n'est pas négative à gauche de a et n'est pas positive à droite de a.

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$



$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2\right)$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f''(x) = -4\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2\right) - \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vous vérifierez que $f''\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) \leqslant 0$ et $f''\left(\dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \geqslant 0$,

donc f'' ne garde pas un signe constant au voisinage de 0^+.

Convexité

preuve et éléments de correction

2

Analyse cachée, synthèse visible.
• Soit $x \in [a, b]$. Posons $t = \dfrac{x-a}{b-a}$. Montrons que $t \in [0, 1]$.
Par exemple, par équivalences successives. On a en fait $t \in [0,1] \iff x \in [a, b]$.
• Soit x de la forme $(1-t)a + tb$ avec $t \in [0, 1]$.
Alors $x = a + t(b-a)$ (une seule occurrence de x).
D'où $x \in [a, b]$.

3

On peut faire une preuve par récurrence « à la Jensen ».
On peut aussi considérer un indice m et M tels que $x_m = \min x_i$ et $x_M = \max x_i$.
On a donc $x_m \leqslant x_i \leqslant x_M$. On multiplie par λ_i et on somme.
On obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in [x_m, x_M] \qquad \text{segment qui est inclus dans } I$$

4

i) L'équation de la droite (AB) est $y = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha$.
D'où $y_0 = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}(x_0-a)+\alpha$.
Or $x_0 = a + t_0(b-a)$ d'où le résultat.

ii) On applique le point précédent en remarquant que x s'écrit $x = a + t(b-a)$ avec $t = \mu$.
Ainsi, l'ordonnée cherchée vaut $a + \mu(b-a) = \lambda\alpha + \mu\beta$.

iii) C'est un cas particulier du cas précédent.
On trouve que l'ordonnée est $\lambda f(a) + \mu f(b)$.

10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{H}_n$.
Montrons $\mathscr{H}_{n+1}$.
On fixe $y_1, \ldots, y_{n+1} \in I$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ positifs de somme 1.
On a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i + \mu_{n+1} y_{n+1}\right)$$

Cas où $\mu_{n+1} = 1$. C'est facile.
Sinon, on pose $\lambda_i = \dfrac{\mu_i}{1-\mu_{n+1}}$.
On commence par utiliser la définition de la convexité, puis on utilise $\mathscr{H}_n$.

12

Par convexité de f, on a :

$$\forall x, y \in I \setminus \{a\}, \qquad x < a < y \implies \tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$$

Ou encore

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \quad \forall y \in I \cap]a, +\infty[, \quad \tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$$

On va passer à la limite (sur x, puis sur y) mais avant il faut justifier que les limites existent et sont finies.

• Montrons que f est dérivable à gauche en a.
Cela revient à montrer que la limite en a de la fonction $(\tau_a)_{|I\cap]-\infty,a[}$ existe et est finie.
Prenons un y dans $I\cap]a,+\infty[$ (il existe, car a est intérieur à I) que l'on fixe une fois pour toutes.
On a donc

$$\forall\, x\in I\cap]-\infty,a[,\quad \tau_a(x)\leqslant \tau_a(y)$$

La fonction τ_a restreinte à $I\cap]-\infty,a[$ est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, cette fonction $(\tau_a)_{|I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en a (qui est l'extrémité droite de $I\cap]-\infty,a[$) : cette limite est finie car la fonction $(\tau_a)_{|I\cap]-\infty,a[}$ est majorée par $\tau_a(y)$.
Donc la limite de la fonction $(\tau_a)_{|I\cap]-\infty,a[}$ en a existe et est finie.
Cela signifie exactement que la fonction f est dérivable à gauche en a.

• On montre de même que f est dérivable à droite en a.

• On a donc montré que f est dérivable à gauche et à droite en a. Reprenons alors l'inégalité :

$$\forall\, x\in I\cap]-\infty,a[,\quad \forall\, y\in I\cap]a,+\infty[,\quad \tau_a(x)\leqslant \tau_a(y)$$

En passant à la limite sur x dans un premier temps (on fixe donc y et on fait varier x), on obtient

$$\forall\, y\in I\cap]a,+\infty[,\quad f'_g(a)\leqslant \tau_a(y)$$

En passant à la limite sur y (et à ce stade, x a disparu), on obtient

$$f'_g(a)\leqslant f'_d(a)$$

13

Ici, f est dérivable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f convexe sur I.
Montrons que f' est croissante sur I.
Soit $a<b$ dans I. Montrons que $f'(a)\leqslant f'(b)$.
En fait, on va montrer :

$$f'(a)\;\leqslant\;\tau_a(b)\qquad\text{et}\qquad \tau_b(a)\;\leqslant\;f'(b).$$

• Comme f est convexe, la fonction τ_a est croissante, donc :

$$\forall\, t\in]a,b],\quad \tau_a(t)\leqslant\tau_a(b)$$

Par passage à la limite en a (licite car f est dérivable en a), on a $f'(a)\leqslant\tau_a(b)$.
• De même, par croissance de τ_b, on a

$$\forall\, t\in[a,b[,\quad \tau_b(a)\leqslant\tau_b(t)$$

Par passage à la limite en b (licite car f est dérivable en b), on a $\tau_b(a)\leqslant f'(b)$.

Bilan. On en déduit que

$$f'(a)\;\leqslant\;\tau_a(b)=\tau_b(a)\;\leqslant\;f'(b).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f' croissante et montrons que f est convexe sur I.
Fixons $a < b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$.
Étudions $\varphi : x \mapsto \lambda f(x) - (1-\lambda) f(b) - f\big(\lambda x + (1-\lambda) b\big)$ sur le segment $[a,b]$
Cette fonction φ est dérivable de dérivée $\varphi' : x \mapsto \lambda\Big(f'(x) - f'(\lambda x + (1-\lambda) b)\Big)$.
On a $\forall\, x \in [a,b]$, $\varphi'(x) \leqslant 0$ (car f' est croissante et $x \leqslant \lambda x + (1-\lambda) b$).
Donc φ est décroissante sur $[a,b]$.
Or $\varphi(b) = 0$.
L'inégalité $a < b$ implique $\varphi(a) \geqslant \varphi(b)$, c'est-à-dire $\varphi(a) \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

15

Preuve 1. On utilise ici seulement la dérivabilité en a.
Supposons f est convexe sur I.
Montrons que $\quad \forall\, a \in I,\ \forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.
Fixons $a \in I$ et $x \in I$.
On a l'équivalence :

$$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f'(a) \geqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \tau_a(x) & \text{si } x < a \\[2mm] f(a) - f(a) \geqslant f'(a)(a-a) & \text{si } x = a \\[2mm] f'(a) \leqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \tau_a(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

▷ Le cas $x < a$.
Comme f est convexe, la fonction τ_a est croissante, et elle tend vers $f'(a)$ en a, on a donc par théorème de la limite monotone :

$$\tau_a(x) \;\leqslant\; f'(a)$$

▷ Le cas $x > a$. Idem
▷ Le cas $x = a$ est évident : l'inégalité à montrer est une égalité triviale.

Preuve 2. On utilise ici la dérivabilité sur I ou plus faiblement sur $\mathring{I}$
Étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.

16

Faire la preuve pour le log de manière indépendante de l'exponentielle.

Faire proprement la preuve pour le sinus.
D'abord, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad |\sin x| \leqslant |x|$.
En utilisant que $\mathbb{R}^+ = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty[$.
Puis sur $\mathbb{R}^-$. Le faire proprement en prenant un $t \in \mathbb{R}^-$ et en posant $x = -t$ de sorte que $x \in \mathbb{R}^+$.
Il faut penser à dire aux élèves que si on a $g \leqslant d$ sur $\mathbb{R}^+$ avec g et d paire, alors $g \leqslant d$ sur $\mathbb{R}^-$.
Ce qui se décline souvent avec $|\widetilde{g}| \leqslant |\widetilde{d}|$ et $\widetilde{g}$ et $\widetilde{d}$ impaires.

18

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x \ln x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ par opération (en particulier 2 fois dérivable) et on a :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = x^x(1+\ln x) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = x^x\Big((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\Big)$$

Il est clair que f'' est positive sur $]0,+\infty[$, donc f est convexe sur $]0,+\infty[$.

Allure de $\mathscr{C}_f$. Dresser un tableau de variations de f (avec étude du signe de f'). Venir me voir s'il y a une difficulté.

19

La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'' : x \longmapsto 2(2x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2}$$

On en déduit le tableau de signe de f'' (à faire).
Les points d'annulation sont en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Allure de $\mathscr{C}_f$. Il est peut-être prudent d'obtenir les variations.
On étudie le signe de f'. À vous.
On remarque que f est paire, donc il suffit de faire l'étude sur $\mathbb{R}^+$.

• Traitons la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ sur $]0, +\infty[$.

20

1. Prouvons que $\qquad \forall x \in [1, \mathrm{e}], \quad \ln x \geqslant \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$.
   Fixons $x \in [1, \mathrm{e}]$. Alors x est combinaison convexe de 1 et e.
   En effet, x s'écrit $\lambda \times 1 + \mu \times \mathrm{e}$ avec $\lambda = \dfrac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}-1}$ et $\mu = \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$ positifs de somme 1.
   La fonction ln est concave, d'où

   $$\ln(\lambda 1 + \mu \mathrm{e}) \geqslant \lambda \ln(1) + \mu \ln(\mathrm{e})$$

   c'est-à-dire $\ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$.

2. Montrons que $\qquad \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$.
   Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors x est combinaison convexe de 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
   En effet, x s'écrit $\lambda \times 0 + \mu \times \frac{\pi}{2}$ avec $\lambda = \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\frac{\pi}{2}}$ et $\mu = \dfrac{x-0}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}x$ positifs de somme 1.
   La fonction sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'où

   $$\sin(\lambda 0 + \mu \frac{\pi}{2}) \geqslant \lambda \sin(0) + \mu \sin(\frac{\pi}{2})$$

   c'est-à-dire $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$.

21

Si a ou b est nul, alors l'inégalité est évidente. Sinon, la fonction ln étant concave, on a :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \ln(ab).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit l'inégalité de Young.

22

• Montrons que $G \leqslant A$.
Par concavité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, on a (car λ_1 et λ_2 sont positifs de somme 1),

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \;\geqslant\; \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \;\geqslant\; \exp\left(\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2\right)$$

Le membre droit vaut $\mathrm{e}^{\lambda_1 \ln x_1} \mathrm{e}^{\lambda_2 \ln x_2}$ c'est-à-dire $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}$.
Bilan :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \;\geqslant\; x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \qquad \text{ce qui s'écrit encore} \qquad A \geqslant G$$

• Montrons que $A \leqslant Q$.
Par convexité de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ (ici on ne l'utilise que sur $]0,+\infty[$), on a

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2 \;\leqslant\; \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

Par croissance de la fonction racine-carrée, on a

$$\sqrt{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2} \;\leqslant\; \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}$$

Comme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geqslant 0$, on obtient

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \;\leqslant\; \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}$$

• Montrons que $H \leqslant A$.
Par convexité de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on a

$$\frac{1}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \;\leqslant\; \lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2}$$

Par décroissance de la fonction inverse, on obtient

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \;\geqslant\; \left(\lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2}\right)^{-1}$$

c'est-à-dire $A \geqslant H$.

• Montrons que $H \leqslant G$.
On a les équivalences

$$\begin{aligned}
H \leqslant G &\iff \frac{1}{H} \geqslant \frac{1}{G} \\
&\iff \lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2} \geqslant \frac{1}{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}} \\
&\iff \lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2} \geqslant \left(\frac{1}{x_1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{1}{x_2}\right)^{\lambda_2}
\end{aligned}$$

On a montré que la moyenne arithmétique pondérée est supérieure à la moyenne géométrique pondérée.
Appliquons cette inégalité aux réels $\dfrac{1}{x_1}$ et $\dfrac{1}{x_2}$.
On obtient alors

$$\lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2} \geqslant \left(\frac{1}{x_1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{1}{x_2}\right)^{\lambda_2}$$

D'où $H \leqslant G$.

24

Par contraposée. Supposons que $f'(a) \neq 0$.
On a (WHY?) :

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

Ainsi, $f(x) - f(a)$ est du signe de $f'(a)(x-a)$, qui est une quantité qui change de signe au voisinage de a.

On a donc NON $\Big($ la quantité $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a $\Big)$.

26

Preuve : attendre le DL2.
Et singer la preuve faite précédemment
Par contraposée. Supposons que $f''(a) \neq 0$.
On a (WHY?) :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x \to a}{\sim} \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Ainsi, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du signe de $f''(a)(x-a)^2$, qui est une quantité qui ne change pas de signe au voisinage de a.

On a donc NON $\Big($ la quantité $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a $\Big)$.