



# Dénombrement

exercices

Souvent, le dénombrement d'un ensemble fini fait largement appel à l'intuition. Aussi existe-t-il deux manières de rédiger une preuve. La première, assez ardue mais parfaitement rigoureuse, s'applique à revenir systématiquement à la définition d'un ensemble fini, via une bijection vers un ensemble de la forme  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (ou un ensemble fini de référence). La deuxième, beaucoup plus intuitive et rapide, consiste à prouver le résultat « avec les mains ». Cela demande de l'assurance, mais sur une copie de concours et a fortiori à l'oral, c'est plutôt cette manière qui est attendue. En matière de dénombrements, l'examinateur veut davantage juger de l'expérience et du sens pratique du candidat que de sa capacité à formaliser des preuves qui peuvent rapidement se révéler illisibles. Bien sûr, on ne saurait reprocher à un excellent candidat une formalisation impeccable. Mais il s'agit d'un exercice de haute virtuosité.

Frédéric Morlot

## La routine

**101**

**Facile !**

Le codage RGB d'une couleur consiste à indiquer par trois entiers entre 0 et 255 la quantité des trois couleurs primaires (rouge, vert, bleu) dont elle est constituée. Combien peut-on coder de couleurs différentes en RGB ?

**102**

**Pique, Cœur, Carreau, Trèfle**

Soit  $E = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$  un ensemble à 4 éléments.

- (i) Dénombrer les matrices de taille  $1 \times 4$  à coefficients dans  $E$ .
- (ii) Même question mais avec des coefficients tous distincts.
- (iii) Dénombrer les matrices de taille  $3 \times 1$  à coefficients dans  $E$ .
- (iv) Même question mais avec des coefficients tous distincts.
- (v) Dénombrer les matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $E$ .
- (vi) Dénombrer les matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $E$  qui possèdent exactement un  $\heartsuit$  par ligne.
- (vii) Dénombrer les matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $E$  qui possèdent exactement un  $\heartsuit$  par ligne et par colonne.

**103**

**Trois ensembles**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner le cardinal des ensembles suivants :

$$D_n = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j\} \quad F_n = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j\} \quad G_n = \{(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \mid i < j < k\}$$

**104**

**Union disjointe**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $u_{n,p}$  le cardinal de  $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n = p\}$ .

Soit  $n \geq 2$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^p u_{n-1,k}$$

**105**

**Dîner placé**

De combien de façons peut-on asseoir  $n$  personnes sur un canapé de  $n$  places ? Et autour d'une table ronde ? (seule l'identité de votre voisin de droite et de gauche compte).

**106**

**Dîner galant**

1. De combien de façons  $n$  filles et  $n$  garçons peuvent-ils s'asseoir sur un canapé de façon à alterner les sexes ?
2. De combien de façons  $n$  filles et  $n$  garçons peuvent-ils se placer autour d'une table de façon à alterner les sexes ?

**107****Tirages de plus grand numéro  $k$** 

Considérons une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- On effectue un tirage de  $p$  boules de manière simultanée.
  - Combien de tirages existe-t-il ?
  - Combien de tirages ont un plus grand numéro inférieur ou égal à  $k$  ?
  - Combien de tirages ont un plus grand numéro égal à  $k$  ?
- Mêmes questions avec un tirage de  $p$  boules de manière successive sans remise.
- Effectuer le rapport  $\frac{B}{A}$  dans les deux situations et commenter.

**108****Mains dans un jeu de 52**

Une main est un ensemble de 5 cartes prises dans un jeu de 52.

- Combien existe-t-il de mains différentes ?
- Combien de mains contenant au moins un  $\heartsuit$  ?
- Combien de mains contenant au plus un  $\clubsuit$  ?
- Combien de mains contenant uniquement des têtes ?
- Combien de mains ayant exactement 2 rois ?
- Combien de mains contenant exactement 1 paire ? (on ne compte pas les configurations contenant 3 ou 4 cartes identiques)
- Combien de mains ayant exactement 2 rois et 2  $\heartsuit$  ?

**109****Rangement d'une bibliothèque**

Une étagère comporte des livres *distincts* :  $m$  livres de mathématiques,  $p$  livres de physique et  $c$  livres de chimie. On pose  $N = m + p + c$ .

- Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère ?
- Même question en imposant un rangement par genre.
- Même question en imposant uniquement que les livres de maths soient groupés.

**110****Rangement de  $n$  boules dans  $n$  urnes**

On considère  $n$  boules numérotées et  $n$  urnes numérotées.

On lance simultanément toutes les boules dans les urnes.

- Combien existe-t-il de rangements ?
- Combien existe-t-il de rangements où chaque urne possède une boule ?
- Combien existe-t-il de rangements où 2 boules occupent une même urne, et les autres boules occupent  $n - 2$  urnes distinctes ?

**111****Rangement de  $p$  pantalons dans  $n$  tiroirs**

Dans ma chambre, j'ai une commode de  $n$  tiroirs (discernables par leur hauteur). Je souhaite ranger mes  $p$  pantalons tous de couleur différente dans cette commode.

- Combien existe-t-il de rangements ?
- Même question en imposant à ne pas mettre plus d'un pantalon par tiroir.

Supposons que les pantalons soient tous de la même couleur, donc indiscernables.

- Combien existe-t-il de façons pour les ranger sans mettre plus d'un pantalon par tiroir ?
- \*\* Combien y a-t-il de façons de placer  $p$  pantalons indiscernables dans  $n$  tiroirs discernables (par leur hauteur par exemple) ?
- Déterminer le cardinal de  $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n = p\}$ .  
On vient de déterminer le nombre de *Combinaisons avec répétition*.
- En déduire le cardinal de  $\{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \mid \beta_1 + \dots + \beta_n = p\}$ .

**112 Anagrammes**

1. Quel est le nombre d'anagrammes de PISTON ?
2. Quel est le nombre d'anagrammes de GENEVIEVE ?
3. Montrer que :

La nombre de mots sur l'alphabet  $\{L_1, \dots, L_s\}$  ayant

—  $k_1$  fois la lettre  $L_1$

—  $k_2$  fois la lettre  $L_2$

—  $\vdots$

—  $k_s$  fois la lettre  $L_s$

est, en posant  $n = k_1 + \dots + k_s$ ,

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-(k_1+k_2)}{k_3} \dots \binom{n-(k_1+\dots+k_{s-2})}{k_{s-1}} \binom{n-(k_1+\dots+k_{s-1})}{k_s}$$

Et qu'il vaut aussi

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$$

**113 Formule du multinôme**

Soit  $x_1, \dots, x_c$  des nombres réels (ou complexes).

L'objectif de cet exercice est de déterminer le coefficient inconnu (il s'agit d'un entier) dans la formule « cœur » suivante :

$$\heartsuit \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (x_1 + \dots + x_c)^N = \sum_{k_1 + \dots + k_c = N} \boxed{?} x_1^{k_1} \dots x_c^{k_c}$$

1. Ici  $c = 2$ . En utilisant l'égalité banale,

$$(x_1 + x_2)^N = \underbrace{(x_1 + x_2) \times \dots \times (x_1 + x_2)}_{N \text{ fois}}$$

donner une preuve combinatoire de l'égalité  $\heartsuit$  (qui est une égalité non banale, qui porte même un nom!).

2. Ici  $c$  est quelconque. Trouver le coefficient dans  $\heartsuit$ !

**Avec des parties...****114 Formule de Pascal généralisée**

En partitionnant judicieusement l'ensemble des parties à  $p$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , démontrer :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$$

On pourra s'aider de l'exercice 107 « tirage de plus grand numéro  $k$  ».

**115 Parties de cardinal pair**

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \geq 1$ .

Déterminer le nombre de parties de  $E$  de cardinal pair.

**116 Deux calculs**

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(A) \quad \text{et en déduire} \quad \sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{card}(A \cap B)$$

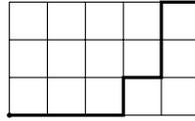
**117 Un autre joli calcul**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $S = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{x \in I} x$

**118 Grille**

On considère un graphe rectangulaire dont les sommets sont les éléments de  $\llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket$ , chaque sommet étant relié à ses voisins horizontaux et verticaux.

1. Compter le nombre de plus courts chemins joignant  $(0, 0)$  à  $(n, m)$ , dont un exemple est indiqué par la figure suivante.



2. En prenant  $m = n$  et en découpant le chemin en deux (les  $n^{\text{ers}}$  pas, puis les  $n$  derniers pas), donner une interprétation combinatoire de la formule  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .

**119 Couples de parties**

Soit  $\Omega$  un ensemble de cardinal  $n$ .

1. Combien y a-t-il de couples  $(A, B)$  de parties de  $\Omega$  tels que  $A \cup B = \Omega$  et  $A \cap B = \emptyset$ ?
2. Combien y a-t-il de couples  $(A, B)$  de parties de  $\Omega$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ ?
3. Soit  $B_0 \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Combien de parties  $A$  incluses dans  $B_0$ ?  
En déduire le nombre de couples  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  tels que  $A \subset B$ .
4. Combien y a-t-il de couples  $(A, B)$  de parties de  $\Omega$  tels que  $A \cup B = \Omega$ ?
5. Combien de triplets  $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$  tels que  $A \subset B \subset C$ ?

**120 Parties sans entiers consécutifs**

Combien y a-t-il de parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ne contenant pas d'entiers consécutifs?

Commencer par déterminer le nombre de parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ne contenant pas d'entiers consécutifs.

**121 Parties sans entiers consécutifs de cardinal fixé**

Soit  $n \geq 1$  et  $p \geq 0$  des entiers.

On note  $\mathcal{F}_n^p$  l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, n\}$  à  $p$  éléments ne contenant pas d'entiers consécutifs. On note  $K_n^p$  le cardinal de  $\mathcal{F}_n^p$ .

1. Déterminer  $K_n^p$  quand  $p > (n+1)/2$ .
2. Soit  $\{a_1, \dots, a_p\}$  un élément de  $\mathcal{F}_n^p$ .  
Quitte à renuméroter, on suppose que  $a_i < a_{i+1}$ .  
On pose  $b_k = a_k - (k-1)$ .  
Prouver que  $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_p \leq n - (p-1)$ .
3. Soit  $\mathcal{P}_{n-p+1}^p$  l'ensemble des parties à  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n-p+1\}$ . Construire une bijection de  $\mathcal{F}_n^p$  sur  $\mathcal{P}_{n-p+1}^p$ .
4. En déduire la valeur de  $K_n^p$ .
5. Au loto on tire 6 numéros successivement dans  $\{1, \dots, 49\}$ .  
Combien de tirages ne contiennent aucun entiers consécutifs?

**122 Listes croissantes**

Combien y a-t-il de  $p$ -listes croissantes (au sens large) de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ?

Pour cela, notons  $\mathcal{C}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)$  l'ensemble cherché.

Pour un ensemble  $E \subset \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{S}_p(E)$  l'ensemble des  $p$ -listes *strictement* croissantes de  $E$ .

Déterminer les ?? pour que  $\varphi : \mathcal{C}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) \rightarrow \mathcal{S}_p(\text{??})$  soit bien

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, \dots, x_p + p - 1)$$

définie, puis montrer que  $\varphi$  est bijective. Conclure.

## Autres...

### 123 Anniversaires

Dans ce groupe de TD, vous êtes 21 élèves. Avec moi, nous sommes 22. Je parie que deux d'entre nous (au moins) ont la même date d'anniversaire. Quelles sont mes chances de gagner? Et si je fais le même pari en classe entière?

### 124 Tiroirs

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des entiers non nécessairement distincts. En considérant les restes modulo  $n$  des sommes

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble non vide  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sum_{i \in I} a_i$  soit divisible par  $n$ .

### 125 Nombre de surjections

Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . On note  $S(n, p)$  le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal  $n$  dans un ensemble de cardinal  $p$ .

1. Calculer  $S(n, p)$  pour  $n < p$ , ainsi que  $S(n, n)$  et  $S(n, 1)$ .
2. Déterminer  $S(n, 2)$ .
3. Déterminer  $S(n+1, n)$ .
4. Démontrer que pour tout  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1))$$

5. En déduire que, pour tout  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$ .

*On pourra procéder par récurrence sur  $n$ .*

### 126 Équipes de rugby et trinômes

1. Considérons un groupe de  $N$  joueurs de rugby.  
On veut répartir ces joueurs en  $p$  équipes  $E_1, \dots, E_p$  numérotées donc discernables. De plus, pour tout  $i$ , on impose l'effectif de  $E_i$ , disons  $\text{card } E_i = n_i$ .  
Combien de configurations existe-t-il?  
Que devient le résultat lorsque pour tout  $i$ , on a  $n_i = n$ .
2. Considérons un groupe de  $N = np$  joueurs de rugby. On veut répartir ces joueurs en  $p$  équipes de même cardinal (de  $n$  joueurs donc!) et non numérotées.  
Combien de configurations existe-t-il?  
Pour répondre à cette question, on commencera par traiter le cas du groupe  $\{A, B, C, D, E, F\}$  à répartir en  $p = 3$  équipes de 2 joueurs.  
Remarque : une autre façon de poser cette question est la suivante. Considérons un ensemble  $\Omega$ . Quel est le nombre de partitions de  $\Omega$  en  $p$  parties de  $n$  éléments?
3. Dans une classe d'effectif  $3m$ , combien y a-t-il de façon de former des trinômes?  
Utiliser une calculatrice pour  $m = 14$ .

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .

On appelle *dérangement* de  $E$  toute permutation de  $E$  ne laissant aucun élément invariant, c'est-à-dire toute bijection  $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) \neq i$ .

On note  $d_n$  le nombre de dérangements d'un ensemble à  $n$  éléments.

1. Calculer  $d_1, d_2, d_3$ . On posera  $d_0 = 1$ .
2. Déterminer le nombre de permutations de  $E$  laissant exactement  $j$  éléments invariants.
3. En déduire la formule  $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$ .
4. Montrer que l'on a  $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$ .

Soit  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ . Un *dérangement* de  $E$  est une permutation de  $E$  ne laissant aucun élément invariant (ayant aucun point fixe), c'est-à-dire une bijection  $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) \neq i$ .

On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des dérangements de  $E$  et  $d_n$  son cardinal.

Pour  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $F_p$  l'ensemble des permutations ayant le numéro  $p$  pour point fixe.

1. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  
Décrire en français les permutations de  $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$ . Combien y en a-t-il?
2. Exprimer  $\mathcal{D}_n$  en fonction des  $F_i$ .
3. À l'aide de la formule du crible, montrer que

$$d_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j!$$

4. *Problème des chapeaux (Montmort, 1708)*  
Lors d'une soirée,  $n$  personnes laissent leur chapeau au vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard.  
Combien y a-t-il de distributions possibles?  
Et si on impose qu'aucune personne ne reprenne son propre chapeau à la sortie?

Tous les matins, vous choisissez entre Café et Thé, en cherchant à lutter contre la routine.

Combien y a-t-il de manières de choisir votre boisson pour  $n$  petits déjeuners consécutifs :

- (i) sans aucune contrainte?
- (ii) en étant sûr d'avoir bu au moins une fois chaque boisson?
- (iii) en étant sûr d'avoir bu aussi souvent une boisson que l'autre?
- (iv) en ne prenant jamais la même boisson deux jours de suite?
- (v) en ne prenant jamais de café deux jours de suite?
- (vi) en ne prenant jamais la même boisson trois jours de suite?

# Dénombrement

corrigés

Soit  $E = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$  un ensemble à 4 éléments.

- (i) Dénombrer les matrices de taille  $1 \times 4$  à coefficients dans  $E$ .

Se donner une telle matrice revient à

- choisir le 1<sup>er</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 2<sup>ème</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 3<sup>ème</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 4<sup>ème</sup> coefficient : 4 choix

soit  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$  possibilités.

- (ii) Même question mais avec des coefficients tous distincts.

Se donner une telle matrice revient à

- choisir le 1<sup>er</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 2<sup>ème</sup> coefficient : 3 choix
- choisir le 3<sup>ème</sup> coefficient : 2 choix
- choisir le 4<sup>ème</sup> coefficient : 1 choix

soit  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$  possibilités.

- (iii) Dénombrer les matrices de taille  $3 \times 1$  à coefficients dans  $E$ .

Se donner une telle matrice revient à

- choisir le 1<sup>er</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 2<sup>ème</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 3<sup>ème</sup> coefficient : 4 choix

soit  $4 \times 4 \times 4 = 4^3$  possibilités.

- (iv) Même question mais avec des coefficients tous distincts.

Se donner une telle matrice revient à

- choisir le 1<sup>er</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 2<sup>ème</sup> coefficient : 3 choix
- choisir le 3<sup>ème</sup> coefficient : 2 choix

soit  $4 \times 3 \times 2$  (encore égal à  $4!$ ) possibilités.

- (v) Dénombrer les matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $E$ .

• Construction en ligne.

Se donner une telle matrice revient à

- choisir les coefficients de la 1<sup>ère</sup> ligne :  $4^n$  choix
- choisir les coefficients de la 2<sup>ème</sup> ligne :  $4^n$  choix
- $\vdots$
- choisir les coefficients de la  $n^{\text{ème}}$  ligne :  $4^n$  choix

soit  $(4^n)^n$  possibilités.

• Construction coefficient par coefficient.

Se donner une telle matrice revient à

- choisir le 1<sup>er</sup> coefficient : 4 choix
- choisir le 2<sup>ème</sup> coefficient : 4 choix
- $\vdots$
- choisir le  $n^2$ -ème coefficient : 4 choix

soit  $4^{n^2}$  possibilités.

- (vi) Dénombrer les matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $E$  qui possèdent exactement un  $\heartsuit$  par ligne.

• Construction en ligne.

Se donner une telle matrice revient à

- choisir les coefficients de la 1<sup>ère</sup> ligne :  $n3^{n-1}$  choix
- En effet, cela revient à

- ★ choisir la place du cœur :  $n$  choix
- ★ choisir les autres coefficients en nombre de  $n - 1$ , avec 3 choix pour chacun de ces coeffs :  $3^{n-1}$  choix
- choisir les coefficients de la 2<sup>ème</sup> ligne :  $n3^{n-1}$  choix
- $\vdots$
- choisir les coefficients de la  $n^{\text{ème}}$  ligne :  $n3^{n-1}$  choix

soit  $(n3^{n-1})^n$  possibilités.

• Construction différente

Se donner une telle matrice revient à

— choisir la place des cœurs :  $n^n$  choix

En effet, cela revient à

★ choisir la place du cœur sur la 1<sup>ère</sup> ligne :  $n$  choix

★ choisir la place du cœur sur la 2<sup>ème</sup> ligne :  $n$  choix

★  $\vdots$

★ choisir la place du cœur sur la  $n^{\text{ème}}$  ligne :  $n$  choix

— choisir les autres coefficients en nombre de  $n^2 - n$  avec 3 choix pour chacun de ces coeffs :  $3^{n^2-n}$  choix.

soit  $n^n 3^{n^2-n}$  possibilités.

(vii) Dénombrer les matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $E$  qui possèdent exactement un  $\heartsuit$  par ligne et par colonne.

• Construction en ligne.

Se donner une telle matrice revient à

— choisir les coefficients de la 1<sup>ère</sup> ligne :  $n3^{n-1}$  choix

En effet, cela revient à

★ choisir la place du cœur :  $n$  choix

★ choisir les autres coefficients en nombre de  $n - 1$ , avec 3 choix pour chacun de ces coeffs :  $3^{n-1}$  choix

— choisir les coefficients de la 2<sup>ème</sup> ligne :  $(n - 1)3^{n-1}$  choix

En effet, cela revient à

★ choisir la place du cœur :  $n - 1$  choix

★ choisir les autres coefficients en nombre de  $n - 1$ , avec 3 choix pour chacun de ces coeffs :  $3^{n-1}$  choix

—  $\vdots$

— choisir les coefficients de la  $(n - 1)^{\text{ème}}$  ligne :  $2 \times 3^{n-1}$  choix

— choisir les coefficients de la  $n^{\text{ème}}$  ligne :  $1 \times 3^{n-1}$  choix

soit  $(n3^{n-1}) \times ((n - 1)3^{n-1}) \times \dots \times (2 \times 3^{n-1}) \times (1 \times 3^{n-1})$  possibilités.

• Construction différente

Se donner une telle matrice revient à

— choisir la place des cœurs :  $n!$  choix

En effet, cela revient à

★ choisir la place du cœur sur la 1<sup>ère</sup> ligne :  $n$  choix

★ choisir la place du cœur sur la 2<sup>ème</sup> ligne :  $n - 1$  choix

★  $\vdots$

★ choisir la place du cœur sur la  $n^{\text{ème}}$  ligne : 1 choix

— choisir les autres coefficients en nombre de  $n^2 - n$  avec 3 choix pour chacun de ces coeffs :  $3^{n^2-n}$  choix.

soit  $n! \times 3^{n^2-n}$  possibilités.

$$\text{Cardinal de } D_n = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j \right\}$$

### 1) Preuve par principe d'addition

On va découper  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  en deux catégories mutuellement exclusives.

Un couple  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  possède ses deux composantes identiques, ou bien ses deux composantes différentes.

Notons  $I_n = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i = j \right\}$ .

On a alors l'égalité

$$\llbracket 1, n \rrbracket^2 = I_n \sqcup D_n$$

En passant au cardinal, on a alors

$$n^2 = \text{card } I_n + \text{card } D_n$$

soit  $\text{card } D_n = n^2 - n$ .

Pour justifier le cardinal de  $I_n$ , on peut faire la preuve suivante.

Se donner un élément  $(i, j)$  de  $I_n$  revient à

- choisir  $i$  :  $n$  choix
- une fois ce choix fait, choisir  $j$  : 1 choix

soit  $n \times 1 = n$  possibilités, par principe multiplicatif.

### 2) Preuve par principe multiplicatif

Se donner un élément  $(i, j)$  de  $D_n$  revient à

- choisir  $i$  :  $n$  choix
- une fois ce choix fait, choisir  $j$  :  $n - 1$  choix

soit  $n(n - 1)$  possibilités, par principe multiplicatif.

### 3) Preuve par un calcul

$$\begin{aligned} \text{card } D_n &= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} 1 \\ &= \sum_{i < j} 1 + \sum_{i > j} 1 \\ &= 2 \sum_{i < j} 1 \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\ &= 2 \sum_{j=1}^n (j-1) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= 2 \frac{(n-1)n}{2} \\ &= (n-1)n \end{aligned}$$

4) La même preuve que la première (avec le principe d'addition), mais par un calcul

$$\begin{aligned}\text{card } D_n &= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} 1 \\ &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} 1 - \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 \\ i=j}} 1 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^i 1 \\ &= \sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n 1 \\ &= n \sum_{i=1}^n 1 - n \\ &= n^2 - n\end{aligned}$$

$$\text{Cardinal de } F_n = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j \right\}$$

### 1) Preuve astucieuse en utilisant ce qui précède

On va découper l'ensemble  $D_n$  précédent, en deux catégories mutuellement exclusives.

Un couple  $(i, j)$  de  $D_n$  (donc tel que  $i \neq j$ ) possède sa première composante strictement inférieure à la deuxième (c'est-à-dire  $i < j$ ), ou bien le contraire.

En notant  $F'_n = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i > j \right\}$ , on a donc :

$$D_n = F_n \sqcup F'_n$$

En passant au cardinal, on a

$$\text{card } D_n = \text{card } F_n + \text{card } F'_n$$

Les ensembles  $F_n$  et  $F'_n$  sont en bijection<sup>1</sup> donc on même cardinal. Ainsi  $\text{card } D_n = 2 \text{ card } F_n$ .  
D'où

$$\text{card } F_n = \frac{1}{2} \text{card } D_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

### 2) Preuve par un calcul

$$\begin{aligned} \text{card } F_n &= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i < j}} 1 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\ &= \sum_{j=1}^n (j-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

---

1. Considérer l'application  $F_n \rightarrow F'_n, (k, \ell) \mapsto (\ell, k)$ .

### 3) Preuve fausse, par principe multiplicatif

Se donner un élément  $(i, j)$  de  $F_n$  revient à

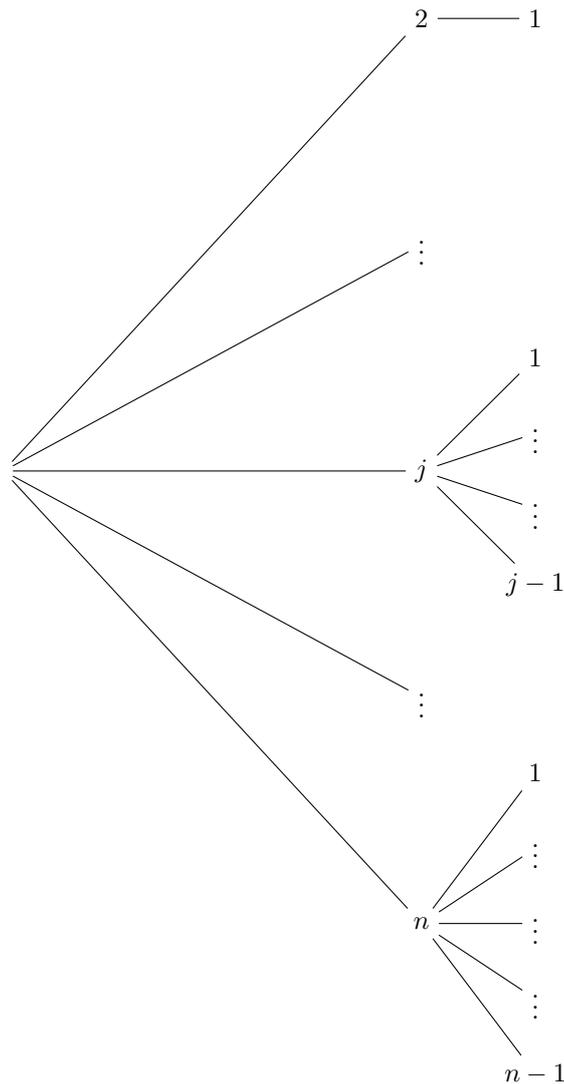
- choisir  $j$  :  $n$  choix
- une fois ce choix fait, choisir  $i$  :  $j - 1$  choix

soit  $n(j - 1)$  possibilités, par principe multiplicatif.



Le résultat est pour le moins étrange car il dépend de la variable muette  $j$ . Donc le raisonnement utilisé est faux! Pourtant, on se dit que l'on est dans les conditions d'application du principe multiplicatif tel qu'il est énoncé. Mais il n'en est rien. La deuxième opération doit avoir un cardinal indépendant du choix (je n'ai pas dit « du nombre de choix ») fait dans la première opération, ce qui n'est visiblement pas le cas ici.

On peut redresser le raisonnement en proposant l'arbre suivant :



Il y a donc  $\sum_{j=2}^n (j - 1)$  possibilités, soit  $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n - 1)n}{2}$ .

#### 4) Preuve juste, formalisant celle faite avec l'arbre précédent

On va découper  $F_n$  en  $n$  catégories mutuellement exclusives.

Un couple  $(i, j)$  de  $F_n$  (donc tel que  $i < j$ ) possède sa deuxième composante égale à 1 ou 2 égale à 2 ou  $\dots$  ou égale à  $n$ .

Notons  $F_n(j)$  le sous-ensemble de  $F_n$  constitué des couples de  $F_n$  ayant leur deuxième composante égale à  $j$

$$F_n(j) = \{(k, \ell) \in F_n \mid \ell = j\} = \{(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid k < \ell \text{ et } \ell = j\}$$

$$\text{On a alors } F_n = \bigsqcup_{j=1}^n F_n(j)$$

$$\text{Ainsi } \text{card } F_n = \sum_{j=1}^n \text{card } F_n(j).$$

Déterminons le cardinal de  $F_n(j)$ , pour  $j$  fixé.

On constate que  $F_n(j)$  s'écrit  $\{(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid k < j\}$  ou encore  $\{(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket\}$  donc est en bijection avec  $\llbracket 1, j-1 \rrbracket$  : son cardinal vaut donc  $j-1$ .

$$\text{D'où } \text{card } F_n = \sum_{j=1}^n (j-1) \text{ soit } \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}.$$

#### 5) Preuve expéditive pour plus tard

Se donner un couple  $(i, j)$  avec  $i < j$  revient à choisir deux éléments dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Il y a donc  $\binom{n}{2}$  choix possibles, c'est-à-dire  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

---

2. En fait, le cas où  $j = 1$  ne fournit aucun couple !

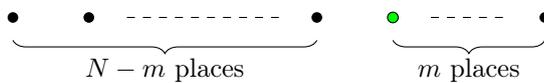
1. Un rangement des  $N$  livres revient à :
- choisir la place du 1<sup>er</sup> livre :  $N$  choix
  - choisir la place du 2<sup>ème</sup> livre :  $N - 1$  choix
  - $\vdots$
  - choisir la place du  $N^{\text{ème}}$  livre : 1 choix
- D'où  $N \times (N - 1) \times \dots \times 1 = N!$  rangements.

On peut aussi raconter la chose « à l'envers » :

- Un rangement des  $N$  livres revient à :
- choisir le livre de la 1<sup>ère</sup> place :  $N$  choix
  - choisir le livre de la 2<sup>ème</sup> place :  $N - 1$  choix
  - $\vdots$
  - choisir le livre de la  $N^{\text{ème}}$  place : 1 choix
- D'où  $N \times (N - 1) \times \dots \times 1 = N!$  rangements.

2. Se donner un rangement par genre revient à :
- choisir l'ordre des 3 genres :  $3!$  choix
  - choisir la place des  $m$  livres de maths :  $m!$  choix
  - choisir la place des  $p$  livres de physique :  $p!$  choix
  - choisir la place des  $c$  livres de chimie :  $c!$  choix
- D'où  $3! m! p! c!$  tels rangements.

3. Se donner un rangement par genre revient à :
- choisir la place du 1<sup>er</sup> livre de maths :  $N - m + 1$  choix
- Explication :



Le place verte est en  $(N - m + 1)^{\text{ème}}$  position : c'est la dernière position que peut occuper le premier livre de la série des livres de maths de la série.

Le premier livre de la série des livres de maths peut occuper la 1<sup>ère</sup> position, la 2<sup>ème</sup> position, etc. ou la  $(N - m + 1)^{\text{ème}}$  position.

- choisir la place des  $m$  livres de maths :  $m!$  choix
- choisir la place des  $N - m$  livres restants :  $(N - m)!$  choix

D'où  $(N - m + 1) m! (N - m)!$  tels rangements.

Ce qui s'écrit encore  $m! (N - m + 1)! = m! (p + c + 1)!$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $\mathcal{P}_p^{[k]}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  l'ensemble des parties à  $p$  éléments ayant  $k$  comme plus grand élément.

On a l'égalité suivante (qui dit qu'une partie possède un plus grand élément ah-ah, compris entre 1 et  $n$ )

$$\spadesuit \quad \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) = \bigsqcup_{k=1}^n \mathcal{P}_p^{[k]}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

On peut remarquer que pour les  $k$  strictement plus petits que  $p$ , on a  $\mathcal{P}_p^{[k]}(\llbracket 1, n \rrbracket) = \emptyset$ , et on peut donc commencer la réunion à  $k = p$  si l'on veut.

D'après l'exercice 107, on a (cela prend en charge les cas extrêmes pour lesquels  $k < p$ )

$$\text{card } \mathcal{P}_p^{[k]}(\llbracket 1, n \rrbracket) = \binom{k-1}{p-1}$$

En passant au cardinal la relation  $\spadesuit$ , on a

$$\text{card} \left( \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) \right) = \sum_{k=p}^n \text{card} \left( \mathcal{P}_p^{[k]}(\llbracket 1, n \rrbracket) \right)$$

d'où

$$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$$

Notons  $\mathcal{P}^{\text{pair}}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal pair.

### Première preuve, preuve par le calcul

On partitionne suivant le cardinal :

$$\mathcal{P}^{\text{pair}}(E) = \bigsqcup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \mathcal{P}_k^{\text{pair}}(E)$$

D'où

$$\text{card } \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) = \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{2j} = \text{WHY} = 2^{n-1}$$

### Deuxième preuve, preuve en utilisant un argument de récurrence

Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $u_n$  le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à  $n$  éléments. Sans perte de généralités, on peut raisonner avec l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Soit  $n \geq 1$ . On va établir une relation de récurrence entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .

On a

$$\mathcal{P}^{\text{pair}}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) = \mathcal{P}^{\text{pair}}(\llbracket 1, n \rrbracket) \sqcup \text{truc-en-bijection-avec-}\mathcal{P}^{\text{impair}}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

où truc-en-bijection-avec- $\mathcal{P}^{\text{impair}}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  est l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  de cardinal pair contenant  $n+1$  (qui est bien en bijection avec ce qui est annoncé : pour une partie de cardinal pair contenant  $n+1$ , lui associer la partie obtenue en lui retirant  $n+1$  : c'est donc une partie de cardinal impair de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ).

On a donc  $u_{n+1} = u_n + v_n$  en notant  $v_n$  ce que l'on imagine.

Or  $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) = \mathcal{P}^{\text{pair}}(\llbracket 1, n \rrbracket) \sqcup \mathcal{P}^{\text{impair}}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  d'où  $2^n = u_n + v_n$ .

Bilan :  $u_{n+1} = 2^n$ . Ceci étant vrai pour tout  $n \geq 1$ . On a donc pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = 2^{n-1}$ .

Cette formule étant également vraie pour  $n = 1$ .

### Troisième preuve, preuve formelle

On fixe  $x_0$  un élément privilégié de  $E$  (il existe car  $E$  est non vide).

On considère

$$\begin{array}{lcl} \psi : \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\text{impair}}(E) & \text{et} & \psi' : \mathcal{P}^{\text{impair}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A \cup \{x_0\} & \text{si } x_0 \notin A \\ A \setminus \{x_0\} & \text{si } x_0 \in A \end{cases} & & B & \longmapsto & \begin{cases} B \cup \{x_0\} & \text{si } x_0 \notin B \\ B \setminus \{x_0\} & \text{si } x_0 \in B \end{cases} \end{array}$$

On a  $\psi \circ \psi' = \text{id}$  et  $\psi' \circ \psi = \text{id}$ .

On en déduit que  $\mathcal{P}^{\text{pair}}(E)$  et  $\mathcal{P}^{\text{impair}}(E)$  sont en bijection donc  $\text{card } \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) = \text{card } \mathcal{P}^{\text{impair}}(E)$ .

Or  $E = \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) \sqcup \mathcal{P}^{\text{impair}}(E)$  donc

$$\text{card } E = \text{card } \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) + \text{card } \mathcal{P}^{\text{impair}}(E)$$

On en déduit que  $\text{card } E = 2 \text{card } \mathcal{P}^{\text{pair}}(E)$ , donc  $2^n = 2 \text{card } \mathcal{P}^{\text{pair}}(E)$ , d'où

$$\text{card } \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) = 2^{n-1}$$

**Remarque.** Si  $E$  est de cardinal impair, alors on obtient une bijection très simple entre l'ensemble des parties de cardinal pair et l'ensemble des parties de cardinal impair en considérant

$$\begin{array}{lcl} \varphi : \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\text{impair}}(E) & \text{et} & \varphi' : \mathcal{P}^{\text{impair}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\text{pair}}(E) \\ A & \longmapsto & E \setminus A & & B & \longmapsto & E \setminus B \end{array}$$

On partitionne  $\mathcal{P}(E)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(E)$$

Autrement dit,

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{truc} = \sum_{k=0}^n \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \text{truc}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(A) &= \sum_{k=0}^n \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \underbrace{\text{card}(A)}_{=k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left( k \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} 1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( k \text{card } \mathcal{P}_k(E) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

**Autre solution, utiliser une technique à la Gauss.**

En remarquant que  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  est bijective (d'application réciproque elle-même), on en

$$B \mapsto \bar{B}$$

déduit que :

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(A) = \sum_{B \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(\bar{B})$$

Calculons 2 fois la somme cherchée :

$$2S = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(A) + \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(\bar{A})$$

D'où

$$2S = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \underbrace{\left( \text{card}(A) + \text{card}(\bar{A}) \right)}_{\text{card } E}$$

D'où

$$2S = n \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} 1 = n2^n$$

En divisant par 2, on trouve  $S = n2^{n-1}$ .

- Idée de Emmanuel Delsinne ou de Gauss : calculer  $2S$  et faire un changement d'indice « symétrique » dans la deuxième somme.

Précisément, le changement d'indice est  $I = \bar{J}$  (c'est licite!).

Pour alléger, posons  $y_I = \sum_{x \in I} x$ . On a  $y_I + y_{\bar{I}} = \sum_{x \in I} x + \sum_{x \in \bar{I}} x = \sum_{x \in I \sqcup \bar{I}} x = \sum_{x \in \llbracket 1, n \rrbracket} x = \sum_{k=1}^n k = y_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ .

On a

$$2S = \sum_{I \in \mathcal{P}} y_I + \sum_{J \in \mathcal{P}} y_J = \sum_{I \in \mathcal{P}} y_I + \sum_{I \in \mathcal{P}} y_{\bar{I}} = \sum_{I \in \mathcal{P}} (y_I + y_{\bar{I}}) = \sum_{I \in \mathcal{P}} y_{\llbracket 1, n \rrbracket} = 2^n y_{\llbracket 1, n \rrbracket}$$

D'où  $S = 2^{n-1} y_{\llbracket 1, n \rrbracket} = 2^{n-2} n(n+1)$

- Autre façon : développer la somme à la main, et voir qu'il s'agit de sommer 1 autant de fois qu'il y a de parties qui contiennent 1, etc. Cette façon de faire correspond à l'interversion des deux sommes.

Actuellement, on somme sur les couples  $(I, x)$  avec  $I$  parcourant toutes les parties et  $x \in I$ .

En intervertissant les deux sommes, on somme sur les couples  $(x, I)$  avec  $x$  parcourant  $1 \dots n$  et  $I$  contenant  $x$ .

Bref, on a

$$S = \sum_{x=1}^n \sum_{I \ni x} x = \sum_{x=1}^n \left( x \sum_{I \ni x} 1 \right) = \sum_{x=1}^n x 2^{n-1} = 2^{n-1} \sum_{k=1}^n k$$

Au cours de cette preuve, on a utilisé que le nombre de parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  contenant un certain  $x$  vaut  $2^{n-1}$ . Voyez-vous pourquoi? Être d'abord capable de comprendre ce résultat pour  $x = n$ . Ensuite, vous pouvez lire la preuve qui vient.

Notons  $\mathcal{P}^{[x]}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  l'ensemble des parties contenant  $x$ .

Cet ensemble est en bijection avec  $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\})$ .

En effet, les applications suivantes sont bien définies (WHY?) et sont réciproques l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{[x]}(\llbracket 1, n \rrbracket) &\longrightarrow \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}) & \text{et} & & \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}) &\longrightarrow \mathcal{P}^{[x]}(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ I &\longmapsto I \setminus \{x\} & & & J &\longmapsto J \sqcup \{x\} \end{aligned}$$

- Autre façon : par récurrence (cf. page suivante).

$$Mq \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{I \in \mathcal{P}([1, n])} \sum_{x \in I} x = n(n+1)2^{n-2}$$

Joseph Rouast (2023-2024) propose une preuve par récurrence.

Notons  $S_n$  la somme double.

- Pour  $n=1$ , la somme double vaut 1  
et à droite, cela vaut  $1 \cdot (1+1) 2^{1-2} = 1$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tq  $Mq \quad S_n = n(n+1)2^{n-2}$ .

Commençons par remarquer qu'une partie  $J$  de  $\mathcal{P}([1, n+1])$

est de deux types :

\* ou bien,  $J$  contient  $n+1$  et s'écrit alors

$$J = I \cup \{n+1\} \quad \text{où } I \in \mathcal{P}([1, n])$$

\* ou bien,  $J$  ne contient pas  $n+1$  et alors

$$J \in \mathcal{P}([1, n])$$

Ainsi

$$\mathcal{P}([1, n+1]) = \left\{ I \cup \{n+1\} \right\}_{I \in \mathcal{P}([1, n])} \cup \mathcal{P}([1, n])$$

On en déduit que

$$S_{n+1} = \sum_{I \in \mathcal{P}([1, n+1])} \sum_{x \in I \setminus \{n+1\}} x + \sum_{I \in \mathcal{P}([1, n+1])} \sum_{x \in I} 2$$

$$= \sum_{I \dots} \left( \sum_{x \in I} x + (n+1) \right) + S_n$$

$$= 2S_n + \underbrace{\sum_{I \dots} (n+1)}_{(n+1)2^n}$$

$$= 2n(n+1)2^{n-2} + (n+1)2^n$$

$$= \underline{n} (n+1) 2^{n-1} + (n+1) 2^{\underline{n}}$$

$$= (n+1) 2^{n-1} \left[ \underline{n} + \underline{2} \right]$$

$$= (n+1)(n+2) 2^{n-1}.$$

∴  $\text{gi } \mathcal{H}_{n+1}$

1. Montrons que, si  $p > (n + 1)/2$ , alors  $\mathcal{F}_n^p = \emptyset$ , donc  $K_n^p = 0$ .

Montrons la contraposée. Autrement dit, si  $\mathcal{F}_n^p$  est non vide, alors  $2p - 1 \leq n$ .

Comme  $\mathcal{F}_n^p$  est supposé non vide, on peut considérer  $\{x_1, \dots, x_p\}$  une partie à  $p$  éléments sans entiers consécutifs de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Quitte à renuméroter, on peut supposer que  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ .

Comme  $x_{k-1}$  et  $x_k$  ne sont pas consécutifs, on a :

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & x_1 \\ x_1 + 2 & \leq & x_2 \\ & \vdots & \\ x_{k-1} + 2 & \leq & x_k \\ & \vdots & \\ x_{p-1} + 2 & \leq & x_p \end{array}$$

Par somme et télescopie, on obtient

$$1 + 2(p - 1) \leq x_p$$

Comme  $x_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $x_p \leq n$ .

Par transitivité, on obtient  $2p - 1 \leq n$ .

On vient de montrer

$$\mathcal{F}_n^p \neq \emptyset \implies 2p - 1 \leq n$$

Par contraposée :

$$2p - 1 > n \implies \mathcal{F}_n^p = \emptyset$$

d'où

$$p > \frac{n + 1}{2} \implies K_n^p = 0$$

2. Soit  $\{a_1, \dots, a_p\}$  un élément de  $\mathcal{F}_n^p$ .

Quitte à renuméroter, on suppose que  $a_i < a_{i+1}$ .

On pose  $b_k = a_k - (k - 1)$ .

Prouver que  $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_p \leq n - (p - 1)$ .

à taper

3. Construisons une bijection de  $\mathcal{F}_n^p$  sur  $\mathcal{P}_{n-p+1}^p$ .

• L'application suivante

$$\begin{aligned} f : \quad \mathcal{F}_n^p &\longrightarrow \mathcal{P}_{n-p+1}^p \\ \{a_1, \dots, a_p\} &\longmapsto \{a_1, a_2 - 1, \dots, a_k - (k - 1), \dots, a_p - (p - 1)\} \end{aligned}$$

est bien définie. Il faut pour cela s'assurer que  $\{a_1, a_2 - 1, \dots, a_k - (k - 1), \dots, a_p - (p - 1)\}$  est une partie de cardinal  $p$ . C'est bien le cas car les  $a_k - (k - 1)$  sont distincts. En effet, on a

$$a_1 < a_2 - 1 < \dots < a_k - (k - 1) < \dots < a_p - (p - 1)$$

• Considérons également l'application :

$$\begin{aligned} g : \quad \mathcal{P}_{n-p+1}^p &\longrightarrow \mathcal{F}_n^p \\ \{b_1, \dots, b_p\} &\longmapsto \{b_1, b_2 + 1, \dots, b_k + (k - 1), \dots, b_p + (p - 1)\} \end{aligned}$$

Cette application est bien définie.

Il faut pour cela s'assurer que, si  $\{b_1, \dots, b_p\}$  est une partie de cardinal  $p$  de  $\llbracket 1, n - p + 1 \rrbracket$ , alors

$\{b_1, b_2 + 1, \dots, b_k + (k - 1), \dots, b_p + (p - 1)\}$  est une partie

— de cardinal  $p$

— de  $\llbracket 1, n \rrbracket$

— sans entiers consécutifs

Ces trois vérifications sont laissées au lecteur.

• Un petit calcul montre que  $f \circ g = \text{id}$  et  $g \circ f = \text{id}$ . Ainsi,  $f$  est bijective.

4. Comme les ensembles  $\mathcal{F}_n^p$  et  $\mathcal{P}_{n-p+1}^p$  sont en bijection, on a :

$$\text{card } \mathcal{F}_n^p = \text{card } \mathcal{P}_{n-p+1}^p$$

D'où, en passant au cardinal,

$$K_n^p = \binom{n-p+1}{p}$$

5. Au loto, il y a  $\binom{49-6+1}{6} = \binom{44}{6} = 7059052$  tirages qui ne contiennent aucun entiers consécutifs.

Dans la division euclidienne d'un entier par  $n$ , les restes possibles sont dans  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ , ensemble de cardinal  $n$ .

Distinguons deux cas.

— Si l'une de ces sommes  $s_k$  est divisible par  $n$ , c'est fini. Prendre  $I = \llbracket 1, k \rrbracket$ .

— Sinon leurs restes modulo  $n$  sont dans  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ , ensemble de cardinal  $n - 1$ .

Résumons, il y a  $n$  sommes et  $n - 1$  restes.

D'après le principe des tiroirs, il existe deux entiers  $p < q$  tels que  $s_p$  et  $s_q$  aient même reste modulo  $n$ .

Leur différence  $s_q - s_p$  est divisible par  $n$ .

Or la différence vaut  $s_q - s_p = a_{p+1} + \dots + a_q$ , donc en posant  $I = \llbracket p + 1, q \rrbracket$ , on obtient le résultat.

1. Quand  $n < p$ , il n'y a pas de surjection d'un ensemble de cardinal  $n$  dans un ensemble de cardinal  $p$ , donc  $S(n, p) = 0$ .  
 Quand  $p = n$ , les surjections sont exactement les bijections, donc  $S(n, n) = n!$ .  
 Quand  $p = 1$ , il n'y a qu'une seule application et elle est surjective! Donc  $S(n, p) = 1$ .
2. On peut compter toutes les applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  (il y en a  $2^n$ ) et retirer celles qui ne sont pas surjectives (il y en a 2 : celle qui envoie tout le monde sur 1 et celle qui envoie tout le monde sur 2).  
 Donc  $S(n, 2) = 2^n - 2$ .

**Attention.** Voici un raisonnement qui paraît convainquant, mais qui est faux!

Se donner une application surjective de  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  dans  $F = \{a, b\}$  revient à :

- choisir un antécédent pour  $a$  :  $n$  choix
- choisir un antécédent pour  $b$  :  $n - 1$  choix
- choisir « comme on veut » les images des éléments de  $E$  restants : c'est-à-dire se donner une application d'un ensemble à  $n - 2$  éléments dans un ensemble à deux éléments :  $2^{n-2}$  choix.

Donc  $S(n, 2) = n(n - 1)2^{n-2}$ .

Question : est-ce que ce résultat fonctionne pour  $n = 2$ ? Zut, oui, il fonctionne, mais c'est du pot!

Voyez-vous où est l'erreur de raisonnement?

Une réponse. Vous allez compter beaucoup trop de fois l'application  $(a, b, b, \dots, b)$  :

- une fois en disant « un antécédent de  $a$  est  $x_1$ , un antécédent de  $b$  est  $x_2$  et on envoie le reste sur  $b$  »,
- une fois en disant « un antécédent de  $a$  est  $x_1$ , un antécédent de  $b$  est  $x_3$  et on envoie le reste sur  $b$  »,
- $\vdots$
- une fois en disant « un antécédent de  $a$  est  $x_1$ , un antécédent de  $b$  est  $x_n$  et on envoie le reste sur  $b$  ».

3. Posons  $E$  un ensemble de cardinal  $n + 1$  et  $F$  un ensemble de cardinal  $n$  et dénombrons les applications surjectives de  $E$  dans  $F$ .

Se donner une telle surjection revient à

- choisir l'élément de  $F$  qui sera atteint deux fois :  $n$  choix
- choisir ses deux antécédents :  $\binom{n+1}{2}$  choix
- choisir les images des  $n - 1$  autres éléments de  $E$  :  $(n - 1)!$  choix

D'où  $n \binom{n+1}{2} (n - 1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$  choix.

Bref,  $S(n + 1, n) = \frac{n(n+1)!}{2}$ .

Si vous avez donné la réponse fautive  $S(n + 1, n) = n(n + 1)!$ , essayez de comprendre d'où provient le facteur 2 qu'il vous manque!

4. Fixons  $E_n$  un ensemble de cardinal  $n$  et  $F_p$  un ensemble de cardinal  $p$  et dénombrons les applications surjectives  $f : E_n \rightarrow F_p$ .

Parmi les éléments de  $E_n$ , nous allons privilégier un d'entre eux, que nous notons  $x_0$ .

Ainsi,  $E_n$  se partitionne de la façon suivante  $(E_n \setminus \{x_0\}) \sqcup \{x_0\}$ .

Se donner une surjection de  $E_n$  vers  $F_p$  revient à

- choisir l'image de  $x_0$  parmi les éléments de  $F_p$  :  $p$  choix
- puis :
  - choisir une surjection de  $E_n \setminus \{x_0\}$  vers  $F_p$  :  $S(n - 1, p)$  choix

OU BIEN

- choisir une surjection de  $E_n \setminus \{x_0\}$  vers  $F_p \setminus \{f(x_0)\}$  :  $S(n - 1, p - 1)$  choix

**Remarque.** On me signale, à juste raison, que l'on n'a pas défini  $S(n, 0)$  et que cet élément peut potentiellement intervenir (penser à  $p = 1$ ; on a alors  $p - 1 = 0$ ). Question : combien d'application d'un ensemble à  $n \geq 1$  élément dans un ensemble à 0 élément? Réponse 0.

A fortiori, on a  $S(n, 0) = 0$ .

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\mathcal{H}_n$  la propriété :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

• Initialisation [ $n = 1$ ].

Pour  $p = 1$ , le résultat est clair.

Pour  $p > 1$ , on a  $S(1, p) = 0$  et le membre droit vaut

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k &= \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} k \underbrace{\binom{p}{k}}_{p \binom{p-1}{k-1}} \\ &= p \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} \\ &= p \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-1-i} \binom{p-1}{i} \\ &= p(1-1)^{p-1} \\ &\stackrel{p \geq 1}{=} 0 \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{H}_1$ .

• Hérité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{H}_n$ . Montrons  $\mathcal{H}_{n+1}$ .

Pour  $p = 1$ , le résultat est clair.

Soit  $p > 1$ .

$$\begin{aligned} S(n, p) &= p \left( S(n-1, p) + S(n-1, p-1) \right) \\ &= p \left( \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \binom{p-1}{k} k^{n-1} + \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^{n-1} \right) && \text{d'après } \mathcal{H}_{n-1} \text{ à deux reprises} \\ &= p \left( \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} \underbrace{\left[ \binom{p}{k} - \binom{p-1}{k} \right]}_{\binom{p-1}{k-1}} k^{n-1} + p^{n-1} \right) && \text{d'après la formule de Pascal} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} p \underbrace{\binom{p-1}{k-1}}_{k \binom{p}{k}} k^{n-1} && \text{d'après la formule du pion/capitaine} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{H}_{n+1}$ .

- 1.
- 2.
3. Notons  $\mathcal{B}(E)$  l'ensemble des permutations de  $E$  (la lettre  $\mathcal{B}$  est choisi comme allusion au mot **B**ijection).

Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , notons  $\mathcal{B}_j(E)$  l'ensemble des permutations de  $E$  ayant  $j$  éléments invariants.

Une permutation ayant un nombre bien déterminé d'éléments invariants, on a l'égalité suivante (qui est une partition de  $\mathcal{B}(E)$ ) :

$$\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}_0(E) \sqcup \mathcal{B}_1(E) \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_n(E)$$

En passant au cardinal, on a

$$\underbrace{\text{card } \mathcal{B}(E)}_{n!} = \sum_{j=0}^n \underbrace{\text{card } (\mathcal{B}_j(E))}_{\binom{n}{j} d_{n-j}}$$

Avec le changement de variable  $k = n - j$  et la symétrie du coefficient binomial, on obtient

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$

4. C'est la formule d'inversion de Pascal!  
Plusieurs preuves possibles : récurrence sur  $n$ . Somme double. Représentation matricielle d'une certaine application linéaire.

- (i) Chaque matin, on dispose de deux possibilités : thé ou café.  
D'après le principe de multiplication, il y a donc  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$  « historiques » possibles. Plus mathématiquement, un historique de  $n$  petits-déjeuners correspond à un mot de longueur  $n$  sur l'alphabet à 2 lettres  $\{C, T\}$ , donc il y en a  $2^n$ .
- (ii) On va procéder par soustraction.  
Les seuls historiques interdits par la contrainte « avoir bu au moins une fois chaque boisson » sont ceux entièrement composés de café ou de thé, c'est-à-dire les mots  $CC \dots C$  et  $TT \dots T$ .  
Il n'y a donc que deux historiques interdits par la contrainte donc, par principe de soustraction,  $2^n - 2$  historiques respectant ladite contrainte.
- (iii) Pour avoir bu aussi souvent un boisson que l'autre, il faut déjà que le nombre  $n$  de jours soit pair. Dans le cas contraire, il y aura donc 0 historiques respectant la contrainte.  
Si  $n$  est pair, on est en train de compter les mots de longueur  $n$  sur l'alphabet à 2 lettres  $\{C, T\}$  avec  $n/2$  occurrences de C et de T. Autrement dit, on dénombre les anagrammes de

$$\underbrace{CC \dots C}_{n/2 \text{ lettres}} \underbrace{TT \dots T}_{n/2 \text{ lettres}}.$$

Pour construire une telle anagramme, on peut commencer par choisir les emplacements de la lettre C (c'est-à-dire les jours où l'on boit du café) : il y a  $\binom{n}{n/2}$  possibilités. Les autres jours sont alors consacrés au thé.

*In fine*, le nombre d'historiques respectant la contrainte de l'énoncé est

$$\begin{cases} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (iv) Si l'on ne prend jamais la même boisson deux fois de suite, le choix de la première boisson détermine entièrement la suite de l'historique.  
Il n'y a ainsi que deux historiques possibles :

$$CTCTCTCT \dots \quad \text{et} \quad TCTCTCTC \dots$$

- (v) Si l'on cherche une idée, on peut toujours dénombrer les possibilités pour les petites valeurs de  $n$ . Notons  $P_n$  le nombre de possibilités pour un historique de  $n$  jours.

**Cas**  $n = 1$ .

- C;
- T.

Donc  $P_1 = 2$ .

**Cas**  $n = 2$ .

- CT;
- TC;
- TT.

Donc  $P_2 = 3$ .

**Cas**  $n = 3$ .

- CTC;
- CTT;
- TCT;
- TTC;
- TTT.

Donc  $P_3 = 5$ .

**Cas**  $n = 4$ .

- CTCT;
- CTTC;
- CTTT;
- TCTC;

- TCTT ;
- TTCT ;
- TTTC ;
- TTTT.

Donc  $P_3 = 8$ .

Il est possible de remarquer sur ces exemples un aspect récurrent. On peut par exemple remarquer que la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  semble être constituée de nombres de Fibonacci, ou à tout le moins qu'elle vérifie la relation de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$ .

Il est en fait même possible de remarquer quelque chose de plus précis : à chaque étape, il y a plus d'historiques commençant par T que par C, et ceux commençant par T sont exactement formés d'un T précédant la liste des possibilités à l'étape précédente. Par exemple, les cinq mots CTC, CTT, TCT, TTC et TTT fournissent les cinq possibilités TCTC, TCTT, TTCT, TTTC et TTTT commençant par un T.

Nous pouvons montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Il y a deux types d'historiques de longueur  $n + 2$  sans CC.

— Ceux commençant par T.

Dans ce cas, la suite de l'historique est un historique sans CC de longueur  $n + 1$ .

Réciproquement, si on ajoute un T en première position à un historique sans CC de longueur  $n + 1$ , on obtient un historique sans CC de longueur  $n + 2$ .

Il y a ainsi  $P_{n+1}$  historiques sans CC de longueur  $n + 2$  commençant par T.

— Ceux commençant par C.

Comme on ne peut pas commencer par CC, la deuxième lettre est alors un T.

Dans ce cas, la suite de l'historique est un historique sans CC de longueur  $n$ .

Réciproquement, si on ajoute un CT au début d'un historique sans CC de longueur  $n$ , on obtient un historique sans CC de longueur  $n + 2$ .

Il y a ainsi  $P_n$  historiques sans CC de longueur  $n + 2$  commençant par C.

Par principe d'addition, il y a donc  $P_{n+1} + P_n$  historiques sans CC de longueur  $n + 2$ , ce qui montre bien  $P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$ .

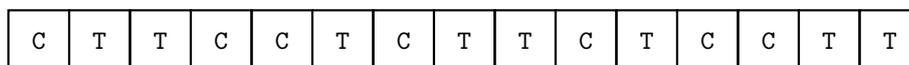
Si l'on se souvient que la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

(premières valeurs :  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$ , etc.), le fait que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et que  $P_1 = F_3$  et  $P_2 = F_4$  montre facilement (par récurrence double) que  $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = F_{n+2}$ .

Il y a donc  $F_{n+2}$  historiques de longueur  $n$  sans CC.

(vi) Imaginons qu'on enregistre notre historique sur une frise. Un historique respectant la contrainte ressemble à



c'est-à-dire qu'il s'obtient en posant à la suite des « carreaux » 

C
---

 et 

T
---

 ainsi que des « dominos » 

C	C
---	---

 et 

T	T
---	---

, en alternant les C et les T.

Or, pour obtenir une telle frise,

— on peut d'abord en choisir la « forme » des pièces, par exemple



— puis choisir la première boisson.

La contrainte (qui force à alterner les carreaux/dominos C et T) détermine alors entièrement l'historique (dans notre exemple, si l'on commence par C, le reste est entièrement déterminé).

Par principe de multiplication, le nombre d'historiques vérifiant la contrainte est exactement le double du nombre  $Q_n$  de manières de remplir un rectangle  $1 \times n$  en utilisant des carreaux  $1 \times 1$  et des dominos  $1 \times 2$ .

Or, on peut vérifier facilement que  $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = F_{n+1}$ . En effet, il est facile de voir que le nombre  $Q_n$  de remplissages vérifie la relation de récurrence  $Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$  : pour remplir un rectangle de longueur  $n + 2$ , on peut soit commencer par un carreau (auquel cas il restera un rectangle de longueur  $n + 1$  à remplir, et donc  $Q_{n+1}$  possibilités), soit par un domino (auquel cas il restera un rectangle de longueur  $n$  et donc  $Q_n$  possibilités). On conclut alors en remarquant que  $Q_1 = 1 = F_2$  et  $Q_2 = 2 = F_3$ .

*In fine*, le nombre d'historiques sans CCC ni TTT est  $2F_{n+1}$ .