Dimension finie

Algèbre linéaire, épisode 3

exercices

Le début

101 Jusqu'à (iii), c'est facile !...

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

(i) $\mathrm{Vect}\Big((1,2,3,4),(5,6,7,8),(9,10,11,12),(13,14,15,16)\Big)$

(ii) $\Big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \ \text{ et } \ y+3z+3t=0\Big\}$

(iii) $\mathrm{Vect}\Big(X^2+X+1,\ X^2+2X+4,\ X^2+3X+9\Big)$

(iv) $\Big\{P\in\mathbb{K}_4[X] \mid P(1)=P(2)=P(3)=P(4)\Big\}$

(v) $\mathrm{Vect}\Big(x\mapsto\cos(kx)\Big)_{k\in[\![0,n]\!]}$

102 Quizz

Donner la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué :

— des matrices diagonales
— des matrices triangulaires supérieures
— des matrices triangulaires inférieures
— des matrices symétriques
— des matrices antisymétriques
— des matrices de trace nulle

103 Non génératrice

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de vecteurs de E.
Montrer que la famille $\mathcal{F}=(v_i-v_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ n'est pas génératrice de E.

On pourra noter $x_i = v_i - v_1$, et montrer que chaque vecteur de la famille $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire de $x_2,\dots,x_n$.

104 Rang d'une famille

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles (finies) de vecteurs de E. Montrer :

$$\max\big(\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1),\mathrm{rg}(\mathcal{F}_2)\big) \ \leqslant\ \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1\vee\mathcal{F}_2)\ \leqslant\ \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1)+\mathrm{rg}(\mathcal{F}_2).$$

105 Un énoncé à prouver

Prouver l'énoncé suivant :

Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ (ici, E et F sont quelconques, non nécessairement de dimension finie).
Soit E' un sev de E de dimension finie.
Alors, $f(E')$ (l'image de E' par f) est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie et

$$\dim f(E') \ \leqslant\ \dim E'$$

Pouvez-vous exprimer $\dim E' - \dim f(E')$ en fonction de f et E' ?

106 Injectivité d'une application linéaire

Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie.
Montrer l'équivalence :

$$f \text{ injective} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, E' \text{ sev de } E,\quad \dim f(E') = \dim E'$$

Puis (ou bien « de manière simultanée » ?) :

$$f \text{ injective} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x_1,\dots,x_p\in E,\quad \mathrm{rg}\big(f(x_1),\dots,f(x_p)\big)=\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p)$$

L'équivalence précédente tient-elle si E n'est plus supposé de dimension finie ?

107 **Endomorphisme : inclusion versus égalité**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Soit V un sous-espace vectoriel de E.
Montrer :

$$V \subset f(V) \quad \Longrightarrow \quad f(V) = V$$

108 **Intersection avec un hyperplan**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit F un sous-espace vectoriel et H un hyperplan de E. Montrer que :

$$\dim(F \cap H) \ \geqslant \ \dim F - 1$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

109 **Intersection de deux hyperplans**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans *distincts* de E.
Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Polynômes, Matrices, Fonctions ...

110 **Taylor**

Soit $a \in \mathbb{K}$.
On considère la famille $\mathcal{F} = \Big(1,\, X - a,\, (X-a)^2,\, (X-a)^3, \ldots,\, (X-a)^n\Big)$.
Montrer le plus efficacement possible que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Au fait, comment avait-on procédé dans le passé pour montrer cela ?

111 **Chez les polynômes**

Soit $a \neq b \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Big((X-a)^k (X-b)^{n-k}\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

112 **Racine**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Déterminer une base de $H = \Big\{P \in \mathbb{K}_n[X] \;\Big|\; P(\alpha) = 0\Big\}$.

113 **Polynôme annulateur d'une matrice carrée**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

114 **Hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour une matrice $U \in E$, on introduit l'application

$$T_U : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(UM) \end{array}$$

1. Soit $U \in E$. Montrer que T_U est une forme linéaire, c'est-à-dire que $T_U \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme.

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \\ U & \longmapsto & T_U \end{array}$$

3. Soit H un hyperplan de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer qu'il existe $U \in E$ tel que $H = \{M \in E \mid \operatorname{tr}(UM) = 0\}$.

115 **Déphasage**

On considère

$$F = \Big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\mid\; \exists\, (A, \phi) \in \mathbb{R}^2,\; f : x \mapsto A\cos(x + \phi)\Big\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sev de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et donner sa dimension.

Endomorphisme abstrait

116 **Polynôme annulateur d'un endomorphisme en dimension finie**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
Montrer qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

117 **Un exo de khôlle ?**

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
On suppose que

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$$

Montrer que les deux sommes sont directes. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

118 **rang et composée**

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Ici, E n'est pas supposé de dimension finie.
   Montrer
   $$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$$
2. On suppose E de dimension finie. Montrer
   $$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g \iff E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$$
   et
   $$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$$

119 **rang et somme**

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. On suppose E de dimension finie.
   On suppose que $f + g$ bijectif et $g \circ f = 0$.
   Montrer que
   $$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$
2. On suppose E de dimension finie.
   Montrer
   $$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$$
3. On suppose E de dimension finie.
   Montrer
   $$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \implies \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E \end{cases}$$
4. Ici, E n'est pas supposé de dimension finie.
   Montrer
   $$\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) \impliedby \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$$
5. On suppose E de dimension finie.
   Montrer
   $$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \impliedby \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E \end{cases}$$

120 Un cas particulier du lemme des noyaux

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On suppose que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Justifier le plus efficacement possible l'inclusion $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

121 Endomorphisme nilpotent

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent càd tel qu'il existe une puissance $q \in \mathbb{N}$ telle que $f^q = 0$.
On note $p = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0 \right\}$. Un tel entier s'appelle l'indice de nilpotence de f.

1. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $\left(e, f(e), \ldots, f^{p-1}(e)\right)$ est libre.
2. Montrer que $f^n = 0$.

122 Endomorphisme nilpotent d'indice maximal

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ que l'on suppose nilpotent d'indice n, c'est-à-dire vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

1. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $\left(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e)\right)$ soit une base de E.
2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$.

123 Nilpotent d'indice $\leqslant 2$

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, u \leqslant \frac{n}{2}$.
2. Montrer que si $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$, alors n est pair.
   Réciproquement, si n est pair, construire un endomorphisme u tel que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$.

124 Retour des projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u + v = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.
Montrer que u et v sont des projecteurs vérifiant $u \circ v = v \circ u = 0$.

125 Rang 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

126 Somme du noyau et de l'image d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel quelconque (pas nécessairement de dimension finie). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ et $\mathrm{Im}\, f \supset \mathrm{Im}\, f^2$.
2. Montrer que
$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2 \iff \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$$
3. Montrer que
$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$$
4. On suppose E de dimension finie. Montrer que
$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2 \iff E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$$
   et
$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$$

127 Noyaux et images itérés

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie égale à n.

1. Montrer qu'il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}\, u^p = \mathrm{Ker}\, u^{p+1}$.

Dans la suite, on considère un tel indice p.

2. Montrer que :
$$\forall\, k \geqslant p, \quad \mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^p \text{ et } \mathrm{Im}\, u^k = \mathrm{Im}\, u^p.$$
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.

Applications linéaires

128 **Sous-additivité du rang**

Soit E, F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Démontrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0_F\}$ et $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E$.

129 **Construction d'une application linéaire à noyau et image fixés**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie.
Soit K un sous-espace vectoriel de E, et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de F.
Montrer qu'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Ker}\, u = K$ et $\mathrm{Im}\, u = V$ si et seulement si $\dim K + \dim V = \dim E$.
Une telle application linéaire est-elle unique ?

130 **Le rang d'une composée**

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. En appliquant la formule du rang à la restriction de v à $\mathrm{Im}\, u$, montrer que :
$$\mathrm{rg}\, u \;=\; \mathrm{rg}(v \circ u) \;+\; \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v).$$
2. En déduire que $\mathrm{rg}(v \circ u) \geqslant \mathrm{rg}\, v + \mathrm{rg}\, u - \dim F$.
3. Montrer que $\dim\big(\mathrm{Ker}(v \circ u)\big) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Ker}\, u)$.

131 **Un autre exo de khôlle**

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.
On suppose E de dimension finie.

1. Montrer
$$\dim \mathrm{Ker}(f+g) \;\leqslant\; \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) \;+\; \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g).$$

Considérer $f_{|\mathrm{Ker}(f+g)}$.

2. On suppose $\mathrm{rg}(f+g) = 1$ et $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, g$.
Montrer $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ ou $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$.

Hyperplans et formes linéaires

132 **Équation**

Soit $u_1 = (1, -2, 1)$ et $u_2 = (1, 2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer une équation de l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

133 **Tout sev est une intersection d'hyperplans**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ où $r \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe r hyperplans $H_1, \ldots, H_r$ de E tels que $F = \bigcap\limits_{i=1}^{r} H_i$.

Considérer une base de E adaptée à F.

134 **Intersection d'hyperplans**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On considère r hyperplans $H_1, \ldots, H_r$ de E. Montrer que :

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i \right) \geqslant \dim E - r.$$

Utiliser le rang de $u : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)) \end{array}$ avec $H_i = \mathrm{Ker}\, \varphi_i$.

135 **Une variation/généralisation du 134**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On considère r formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sur E.
Montrer l'équivalence :

$$\text{la famille } (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \text{ de } \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \text{ est libre} \iff \dim \left(\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\, \varphi_k \right) = \dim E - r.$$

Plus difficile

136 **Existence d'un inverse à droite pour une application linéaire surjective**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.

1. Rappeler le lemme qui précède la formule du rang dans le cours.
2. On suppose f surjective.
   Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ une application *linéaire* telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
3. L'hypothèse de dimension finie a-t-elle été utile ?
   Si E est de dimension quelconque, a-t-on nécessairement $g \circ f = \mathrm{id}_E$?

137 **Répondre à nouveau à la question 1 de l'exo précédent**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$ avec F de dimension finie.
Montrer l'équivalence :

$$\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v \iff \exists \varphi \in \mathcal{L}(F, G),\ v = \varphi \circ u$$

138 **Supplémentaire commun**

1. Soit F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   On suppose que F et G sont de dimension finie et que $\dim F = \dim G$.
   Montrer que si F et G sont distincts, alors il existe $x \in E \setminus (F \cup G)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F et G deux sev de E.
   Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun si et seulement s'ils ont même dimension.

   Le sens difficile pourra être fait par récurrence décroissante finie sur la dimension commune de F et G, en utilisant la première question.

Des petits problèmes

139 Un problème sur les matrices

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les ensembles :

$$L_\alpha = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \alpha \right\}$$

$$C_\alpha = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \alpha \right\}$$

ainsi que

$$L = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} L_\alpha \qquad\qquad C = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} C_\alpha$$

1. **Autour de L_0**
   (a) Montrer que L_0 est le noyau d'une certaine application linéaire faisant intervenir la colonne pleine de 1. Que peut-on en déduire ?
   (b) Montrer que L_0 est engendré par la famille de matrices $(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]}$
   (c) Montrer que L_0 est de dimension finie et déterminer sa dimension.
2. **Caractérisation de L_α**
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer l'équivalence $\quad M \in L_\alpha \iff M - \alpha I_n \in L_0$.
3. **À propos de L**
   (a) Montrer que L est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que $L = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus L_0$.
   (c) Déterminer la dimension de L.
4. (a) Soit $M = (m_{i,j}) \in L_0$.
   Montrer que $\quad M \in C_0 \iff \forall\, j \in [\![1, n-1]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0.$
   (b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$.
5. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\quad M \in L \cap C \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ M \in L_\alpha \cap C_\alpha$.
   (b) Déterminer la dimension de l'espace $L \cap C$.

140 L'opérateur de dérivation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note E_n l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto \mathrm{e}^x P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que E_n est un sev de $\mathcal{C}^\infty$.
   Montrer que E_n est de dimension finie et en donner une base.
2. Soit Δ l'opérateur de dérivation défini sur E_n par $\Delta : f \mapsto f'$.
   Montrer que Δ est un automorphisme de E_n.
3. Soit $g : x \mapsto \mathrm{e}^x x^n$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique fonction $h \in E_n$ telle que $\Delta^{n+1}(h) = g$ (on ne cherchera pas à expliciter h).
   (b) Déterminer, en fonction de h et de ses dérivées successives, les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty$ telles que
   $$D^{n+1}(f) = g, \qquad f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$$
   où D désigne l'opérateur de dérivation sur l'ensemble $\mathcal{C}^\infty$.
   On pourra raisonner par Analyse-Synthèse.
4. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$.
   Pour chaque λ, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{id})$.
5. Existe-t-il un nombre fini de scalaires, disons $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ tels que
   $$E_n = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda_k\, \mathrm{id})$$
   On pourra noter
   $$\mathrm{Sp}(\Delta) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda\, \mathrm{id}) \neq \{0\} \right\}$$

Dimension finie

Algèbre linéaire, épisode 3

corrigés

106

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective.

$\boxed{\Longleftarrow}$

2.

Notons $n = \dim E$ et ($\bigstar$) l'inégalité à montrer.
D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F \cap H) \;=\; \dim F + \underbrace{\dim H}_{n-1} - \dim(F+H)$$

Preuve de l'inégalité ($\bigstar$)

Grâce à la formule de Grassmann, pour montrer l'inégalité ($\bigstar$), il suffit (et en fait, il faut et il suffit) de montrer $n - \dim(F+H) \geqslant 0$.
On a $F + H \subset E$.
D'où $\dim(F+H) \leqslant n$.

Cas d'égalité de ($\bigstar$)

Grâce à la formule de Grassmann, le cas d'égalité dans ($\bigstar$) correspond [1] à $n - \dim(F+H) = 0$.
Comme $F + H \subset E$, on a l'équivalence $\quad \dim(F+H) = n \iff F + H = E$.
Il s'agit donc de caractériser les cas où on a $F + H = E$.
On a toujours (le fait que H soit un hyperplan n'intervient pas) :

$$H \;\subset\; F + H \;\subset\; E$$

Le cas d'égalité à gauche est (cf. preuve à venir) :

$$H = F + H \iff F \subset H$$

Donc le cas d'égalité à droite est $F + H = E \iff F \not\subset H$.

Preuve promise de l'équivalence.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $F \subset H$.
Alors $F + H \subset \underbrace{H + H}_{=H}$.
Par ailleurs, on a toujours $H \subset F + H$.
D'où $H = F + H$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $H = F + H$.
Comme on a toujours $F \subset F + H$, on en déduit avec l'hypothèse que $F \subset H$.

Bref. On a égalité dans ($\bigstar$) si et seulement si $F + H = E$, c'est-à-dire si et seulement si $F \not\subset H$.

Autre solution, en ayant deviné au préalable la disjonction de cas.

— Cas $F \subset H$.
Alors $F \cap H = F$.
On a donc $\dim(F \cap H) = \dim F$ qui est strictement supérieur à $\dim F - 1$.
On n'est pas dans le cas d'égalité.

— Cas $F \not\subset H$.
L'inclusion $H \subset F + H$ est donc stricte (WHY ?).
On a donc $H \subsetneq F + H \subset E$.
Comme H est un hyperplan, on en déduit $F + H = E$.
D'où $\dim(F+H) = n$.
La formule de Grassmann fournit alors (WHY ?) $\dim(F \cap H) = \dim F - 1$.
Donc on est dans le cas d'égalité.

1. Le verbe « correspondre » signifie que c'est une équivalence.

• D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(H_1 \cap H_2) \;=\; \underbrace{\dim H_1}_{n-1} \;+\; \underbrace{\dim H_2}_{n-1} \;-\; \dim(H_1 + H_2)$$

• On a

$$H_1 \quad \overset{\star}{\subset} \quad H_1 + H_2 \quad \subset \quad E$$

En prenant les dimensions :

$$n - 1 \;\leqslant\; \dim(H_1 + H_2) \;\leqslant\; n$$

Donc $\dim(H_1 + H_2)$ vaut $n - 1$ ou n.

Supposons un instant que $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$.
On aurait alors une égalité dans l'inclusion $\star$ à gauche (WHY ?), càd $H_1 = H_1 + H_2$.
En reprenant le même raisonnement et en échangeant les rôles de H_1 et H_2, on aurait aussi $H_2 = H_1 + H_2$.
Donc on aurait $H_1 = H_2$ (par transitivité de l'égalité).
Mais ceci est contraire à l'hypothèse faite dans l'énoncé.

Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$.

Reprenons l'égalité de Grassmann.
On a alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) \;=\; (n-1) + (n-1) - n \;=\; n - 2$$

Considérons la famille $(I, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
C'est une famille de cardinal n^2+1 de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension n^2.
Cette famille est donc liée.
Il existe donc une relation de liaison non triviale entre les éléments de cette famille, c'est-à-dire entre des puissances de A.

Précisément, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ différent de l'uplet nul tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0$.

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$.
Ce polynôme n'est pas nul car les λ_k sont non tous nuls et vérifie $P(A) = 0$.

Autre solution.
Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

Cette application est linéaire.
De plus, elle ne peut pas être injective car $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie alors que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie (nous ne l'avons pas démontré, mais je vous invite à essayer de montrer qu'un espace de dimension infinie ne peut pas s'injecter dans un espace de dimension finie).
Comme elle n'est pas injective, son noyau n'est pas réduit au vecteur nul, et alors …(je vous laisse terminer).

Variation des deux solutions précédentes.
Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_A : & \mathbb{K}_{n^2}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

Cette application est linéaire.
De plus, elle ne peut pas être injective car sinon au aurait $\underbrace{\dim \mathbb{K}_{n^2}[X]}_{n^2+1} \leqslant \underbrace{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}_{n^2}$.
Comme elle n'est pas injective, son noyau n'est pas réduit au vecteur nul, et alors …(je vous laisse terminer).

Remarque. On vient de montrer qu'une matrice carrée de taille n admet au moins un polynôme annulateur (ici, de degré $\leqslant n^2$).
Vous apprendrez en Spé que la matrice A possède un polynôme annulateur unitaire de degré n. C'est le théorème de Cayley-Hamilton.
En taille 2, on a déjà vu passer le théorème de Cayley-Hamilton.
En effet, pour une matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, on a la relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$.
Donc le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ est un un polynôme annulateur de A.
Et au passage, on constate que $a + d = \operatorname{tr} A$ et $ad - bc = \det A$.

1. Soit $M, N \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
   On a
$$\begin{aligned} T_U(\lambda M + \mu N) &= \operatorname{tr}\Big(U(\lambda M + \mu N)\Big) \\ &= \operatorname{tr}(\lambda UM + \mu UN) \\ &= \lambda \operatorname{tr}(UM) + \mu \operatorname{tr}(UN) \\ &= \lambda T_U(M) + \mu T_U(N) \end{aligned}$$
   Donc T_U est une forme linéaire.
2. Montrons que l'application suivante est un isomorphisme.
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \\ U & \longmapsto & T_U \end{array}$$
   - ⋆ Montrons que φ est linéaire.
     Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $U, V \in E$.
     Montrons que $\varphi(\lambda U + \mu V) = \lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V)$.
     Pour montrer cette égalité de formes linéaires, il suffit de montrer l'égalité
$$\forall\, M \in E, \quad \Big(\varphi(\lambda U + \mu V)\Big)(M) = \Big(\lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V)\Big)(M)$$
     Fixons $M \in E$. On a
$$\begin{aligned} \Big(\varphi(\lambda U + \mu V)\Big)(M) &= T_{\lambda U + \mu V}(M) \\ &= \operatorname{tr}\big((\lambda U + \mu V)M\big) \\ &= \lambda \operatorname{tr}(UM) + \mu \operatorname{tr}(VM) \\ &= \lambda\varphi(U)(M) + \mu\varphi(V)(M) \\ &= \Big(\lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V)\Big)(M) \end{aligned}$$
   - ⋆ Montrons que φ est injective en montrant que son noyau est réduit à la matrice nulle.
     Soit $U \in \operatorname{Ker}\varphi$.
     Ainsi $\varphi(U) = T_U$ est la forme linéaire nulle. Donc
$$\forall\, M \in E,\ T_U(M) = 0 \qquad \text{c'est-à-dire } \operatorname{tr}(UM) = 0$$
     On particularise aux matrices élémentaires $E_{i,j}$. Ainsi, pour tous i, j, on a $\operatorname{tr}(UE_{i,j}) = 0$.
     Calculons cette trace. En écrivant $U = \sum_{k,\ell} u_{k,\ell} E_{k,\ell}$, le produit $UE_{i,j}$ vaut $\sum_k u_{k,i} E_{k,j}$.
     Ainsi,
$$UE_{ij} = u_{1i}E_{1j} + u_{2i}\ E_{2j} + \cdots + u_{ji}E_{jj} + \cdots + u_{ni}E_{nj}$$
     Donc $\operatorname{tr}(UE_{ij})$ vaut u_{ji}.
     Donc $\operatorname{tr}(UE_{i,j})$ vaut $u_{j,i}$.
     On a donc
$$\forall\, i, j, \quad u_{j,i} = 0$$
     Donc la matrice U est nulle
     On a donc montré que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.
   - ⋆ On a $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. En effet, on rappelle que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \dim F$.
     Et ici, $F = \mathbb{K}$ est de dimension 1.

   Bilan. L'application φ est linéaire, injective, entre deux espaces de même dimension, donc est un isomorphisme.

Rappels et petites choses à connaître.

La matrice AE_{ij} intervient souvent en maths !

C'est la matrice n'ayant que des colonnes nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, qui vaut la $i^{\text{ème}}$ colonne de A. Ainsi,

$$\forall \ell \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{Col}_\ell(AE_{ij}) \ = \ \begin{cases} \mathrm{Col}_i(A) & \text{si } \ell = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la preuve : faire un dessin,

ou bien écrire $A = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} E_{k,\ell}$ et le produit $AE_{i,j}$ vaut alors $\sum_k a_{k,i} E_{k,j}$.

Pour ce dernier calcul, on a utilisé la bonne vieille formule : *le produit de deux matrices élémentaires, c'est la matrice « δ du milieu, E des extrémités »*

$$E_{pq}\, E_{rs} \ = \ \delta_{qr} E_{ps}$$

Dit encore autrement, c'est « la-relation-de-Chasles-généralisée » :

— si $q \neq r$, la relation de Chasles ne peut pas s'appliquer, et alors, ça fait 0

— si $q = r$, la relation de Chasles s'applique et cela vaut E_{ps}

Calcul automatique de $\mathrm{tr}(AE_{ij})$

On peut également mener un calcul dit « automatique » (= sans réfléchir) pour calculer cette trace. Allons-y.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AE_{ij}) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{coeff}_{kk}(AE_{ij}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{coeff}_{k\ell}(A)\, \underbrace{\mathrm{coeff}_{\ell k}(E_{ij})}_{\delta_{\ell i}\delta_{kj}} \right) \\ &= \sum_{\substack{k=j \\ \ell=i}} \mathrm{coeff}_{k\ell}(A) \times 1 \times 1 \ + \sum_{(k,\ell)\neq(i,j)} \mathrm{coeff}_{k\ell}(A) \times \underbrace{\delta_{\ell i}\delta_{kj}}_{=0} \\ &= \mathrm{coeff}_{ji}(A) \end{aligned}$$

A la deuxième ligne, on a utilisé la formule bien connue

$$\mathrm{coeff}_{pq}(AB) \ = \ \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{coeff}_{p\ell}(A)\mathrm{coeff}_{\ell q}(B)$$

3. Soit H un hyperplan de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons qu'il existe $U \in E$ tel que $H = \{M \in E \mid \mathrm{tr}(UM) = 0\}$.

D'une part, H est le noyau d'une forme linéaire (non nulle) sur E, en tant qu'hyperplan de E. Disons $H = \mathrm{Ker}\, f$.

D'autre part, $\{M \in E \mid \mathrm{tr}(UM) = 0\}$ est exactement $\mathrm{Ker}\, T_U$.

Il s'agit donc de montrer que f s'écrit T_U pour une certaine matrice U.

Ceci résulte de la surjectivité de φ.

117

D'après Grassmann et les hypothèses, on a

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) &= \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)\\ &= \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim E\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) &= \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g)\\ &= \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim E\end{aligned}$$

donc en sommant et en utilisant à nouveau le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \ + \ \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \ = \ 0$$

C'est une somme d'entiers naturels, d'où :

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \ = \ 0 \qquad \text{et} \qquad \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \ = \ 0$$

D'où

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_E\}$$

Bilan : les sommes sont directes.

Remarque. Voici l'exemple de Joseph Rouast.
Posons $E = \mathbb{K}[X]$.
Considérons

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \operatorname{coeff}_{X^k}(P) X^k \ = \ P'(0)X + P(0) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P - P(0) \end{array}$$

On a $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_1[X]$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^k)_{k \geqslant 2}$.
On a $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(X^k)_{k \geqslant 1}$ et $\operatorname{Ker} g = \mathbb{K}_0[X]$.
Zut, cela ne fonctionne pas.
Prenons donc $f : P \mapsto P(0)$. Autrement dit, $f + g = \mathrm{id}_E$.
On a donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_0[X]$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^k)_{k \geqslant 1}$.
Zut, cela ne fonctionne toujours pas. Donc l'exemple de Joseph est un mauvais exemple !

Contre-exemple. Prenons l'endomorphisme f de dérivation $P \mapsto P'$ et g l'endomorphisme nul.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
   Montrons que $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.
   $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est automatique.
   $\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$.
   Considérons $g(x)$. Ce vecteur est dans $\mathrm{Im}\, g$, donc dans $\mathrm{Im}(g \circ f)$ par hypothèse.
   D'où $g(x)$ s'écrit $(g \circ f)(t)$ pour un certain $t \in E$.
   On a
   $$x = \underbrace{f(t)}_{\in \mathrm{Im}\, f} + \underbrace{\big(x - f(t)\big)}_{\in \mathrm{Ker}\, g}$$
   Donc $x \in \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.
   Montrons $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
   $\boxed{\subset}$ Cette inclusion est automatique.
   $\boxed{\supset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}\, g$.
   Alors y s'écrit $g(x)$ pour un certain $x \in E$.
   D'après l'hypothèse, ce x peut s'écrire $x_I + x_K$ avec $(x_I, x_K) \in \mathrm{Im}\, f \times \mathrm{Ker}\, g$.
   Alors $y = g(x) = g(x_I) + \underbrace{g(x_K)}_{=0}$.
   Comme $x_I \in \mathrm{Im}\, f$, ce vecteur x_I peut s'écrire $f(t)$ avec $t \in E$.
   Ainsi, $y = g(f(t))$. Donc $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.

2. • Montrons l'équivalence
   $$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g \iff E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$$
   $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$.
   On a toujours $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
   Par hypothèse, ces deux sev de E ont même dimension.
   Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc l'égalité $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
   Puis, d'après 1, on a $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.
   D'après 1, on a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
   Appliquons l'opérateur dim (licite, car ce sont des espaces vectoriels de dimension finie, en tant que sev d'un ev de dim finie).
   On obtient $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.

   • Montrons l'équivalence
   $$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f \iff \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$$
   Tout d'abord, l'hypothèse $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$ équivaut à $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.
   WHY, ce n'est pas (du tout) évident.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$
   Une élève en colle me fait remarquer qu'en prenant l'image réciproque par f de cette égalité, on a $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$. Joli coup !
   Puis, on applique dim et on utilise le théorème du rang.

   $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$.
   Je vous laisse montrer que cette hypothèse implique que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.
   Puis on montre facilement que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.

1. On a $g \circ f = 0$ d'où $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
   D'où $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} g = \dim E - \operatorname{rg}(g)$ d'après le théorème du rang.
   D'où $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant \dim E$.

   Par hypothèse, $f + g$ est bijectif, donc surjectif, d'où $\operatorname{Im}(f + g) = E$.
   En appliquant dim, on obtient $\dim E = \operatorname{rg}(f + g)$.
   Par sous-additivité du rang, on obtient $\dim E \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

   Bilan : $\dim E = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$
2.
3.
4.
5. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.
   • On a toujours l'inclusion
   $$\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$
   En appliquant la dimension (et Grassmann à droite) :
   $$\operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$
   On utilise l'hypothèse, et on obtient $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leqslant 0$.
   D'où $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$

   • On a toujours l'inclusion
   $$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \quad \subset \quad \operatorname{Ker}(f + g)$$
   En passant à la dimension (on utilise à gauche Grassmann) :
   $$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) \quad \leqslant \quad \dim \operatorname{Ker}(f + g)$$
   Que l'on réécrit (en mettant à gauche tous les $\dim \operatorname{Ker}(\bullet)$)
   $$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim \operatorname{Ker}(f + g) \quad \leqslant \quad \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g)$$
   À gauche, la formule du rang s'applique et en utilisant l'hypothèse $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \operatorname{rg}(f + g)$, on obtient à gauche $\dim E$.
   On a donc $\dim E \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g)$.
   D'où l'égalité $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ (WHY ?).

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.
   Montrons $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ (ce qui impliquera l'égalité sur les rangs).
   Prouvons $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(f + g)$. L'autre inclusion $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ est toujours vraie
   Soit $y \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
   Ecrivons y sous la forme $f(a) + g(b)$.
   Comme $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$, on peut écrire $a = a_f + a_g$ avec $a_f \in \operatorname{Ker} f$ et $a_g \in \operatorname{Ker} g$.
   On a alors $f(a) = f(a_g)$.
   De la même façon, avec des notations que l'on imagine, on a $g(b) = g(b_f)$.
   Ce qui est magique, c'est que $y = (f + g)(a_g + b_f)$ (vérifiez-le !).
   Ainsi $y \in \operatorname{Im}(f + g)$.

1. De manière générale, on a $f^3 - \mathrm{id}_E = (f^2 + f + \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E)$ (c'est l'identité de Bernoulli avec f et id_E qui commutent).
   Par hypothèse, on a $f^3 - \mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$, d'où
   $$(f^2 + f + \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E) \; = \; 0_{\mathcal{L}(E)}$$
   On en déduit que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.
2. Montrons que $I = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ et $K = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E en montrant que
   $$\begin{cases} I \cap K & = & \{0_E\} \\ \dim E & = & \dim I + \dim K \end{cases}$$
   — Appliquons le théorème du rang à l'endomorphisme $f - \mathrm{id}_E$ de E (qui est bien de dimension finie). On obtient :
   $$\dim E \; = \; \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \; + \; \dim \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$$
   d'où l'égalité $\dim E = \dim I + \dim K$.
   — Montrons que $I \cap K = \{0_E\}$.
   Soit $x \in I \cap K$.
   D'après la question précédente, on a $I \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.
   On a donc
   $$\begin{cases} x \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E) \\ x \in K = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \end{cases}$$
   c'est-à-dire
   $$\begin{cases} (f^2 + f + \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \\ (f - \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \end{cases}$$
   d'où
   $$\begin{cases} (f^2 + f + \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \\ f(x) = x \end{cases}$$
   En exploitant la deuxième égalité, la première égalité fournit $3x = 0_E$, d'où $x = 0_E$.

Remarque très générale, qui est censée expliquer le « fournit »
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E quelconque.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Pour un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ c'est-à-dire tel que $f(x) = \lambda x$, alors on a $f^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

— On suppose que l'on dispose d'un polynôme annulateur de f. Pour faire simple supposons que ce polynôme est de degré $\leqslant 2$, disons $af^2 + bf + c\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Alors pour ce même x, on a les deux égalités de E suivantes :
$$\begin{cases} (af^2 + bf + c\,\mathrm{id}_E)(x) = 0_E \\ f(x) = \lambda x \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} af^2(x) + bf(x) + c\,\mathrm{id}_E(x) = 0_E \\ f(x) = \lambda x \end{cases}$$
D'où $(a\lambda^2 + b\lambda + c) \cdot x = 0_E$.

1. Par définition de p, on a $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Donc il existe $e \in E$ tel que $f^{p-1}(e) \neq 0_E$.
Pour ce vecteur e, montrons que la famille $\big(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e)\big)$ est libre.

Par l'absurde, en partant par la gauche

Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

On veut montrer que tous les λ_k sont nuls.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un λ_k non nul.
Prenons l'indice i le plus **petit** pour lequel λ_i est non nul, autrement dit posons

$$i \;=\; \min \Big\{ k \in [\![0, p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0 \Big\}$$

(c'est licite car l'ensemble en question est une partie de $\mathbb{N}$ non vide).
On a donc :

$$\lambda_i f^i(e) + \lambda_{i+1} f^{i+1}(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Appliquons f^{p-1-i}. On a alors

$$\lambda_i f^{p-1}(e) + \lambda_{i+1} f^p(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2-i}(e) = 0_E$$

Comme, pour tout $k \geqslant p$, on a $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_i f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_i qui est nul. Contradiction, car $\lambda_i \neq 0$.

Par récurrence « sur les scalaires »

Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

On veut montrer que tous les λ_k sont nuls.
Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$: « $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$ ».

— Appliquons f^{p-1} à l'égalité initiale.
Comme, pour tout $i \geqslant p$, on a $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_0 f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_0 qui est nul.
D'où $\mathcal{H}_0$.

— Soit $k \in [\![0, p-2]\!]$ tel que $\mathcal{H}_k$. Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.
D'après $\mathcal{H}_k$, on a donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0$.
En reportant dans l'égalité, on obtient

$$\lambda_{k+1} f^{k+1}(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Appliquons $f^{p-1-(k+1)}$.
Comme, pour tout $i \geqslant p$, on a $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_{k+1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_{k+1} qui est nul.
On a donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = 0$, d'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

BILAN. On a montré $\quad \forall\, k \in [\![0, p-1]\!],\ \mathcal{H}_k$.
En particulier, $\mathcal{H}_{p-1}$ est vraie. Donc tous les λ_i sont nuls !

Par récurrence (descendante) « sur la famille »

Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, notons $\mathcal{H}_k$: « la famille $\big(f^k(e), \dots, f^{p-1}(e)\big)$ » est libre.

— Montrons $\mathcal{H}_{p-1}$.
La famille $(f^{p-1}(e))$ est libre car elle est constituée d'un vecteur non nul.

— Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Supposons $\mathcal{H}_k$. Montrons $\mathcal{H}_{k-1}$.
Fixons $\lambda_{k-1}, \cdots, \lambda_{p-1}$ tel que

$$\clubsuit \qquad \lambda_{k-1} f^{k-1}(e) + \lambda_k f^k(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Appliquons $f^{p-1-(k-1)}$.
Comme, pour tout $i \geqslant p$, on a $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_{k-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_{k-1} qui est nul.
Reportons dans l'égalité $\clubsuit$.
On obtient

$$\lambda_k f^k(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

D'après $\mathcal{H}_k$, la famille $\big(f^k(e), \dots, f^{p-1}(e)\big)$ est libre, donc tous les scalaires sont nuls :

$$\lambda_k = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$$

Résumons. On a montré la nullité de tous les scalaires dans l'égalité $\clubsuit$.
Cela signifie que la famille $\big(f^{k-1}(e), \dots, f^{p-1}(e)\big)$ » est libre, d'où $\mathcal{H}_{k-1}$.

Par récurrence (montante) « sur la famille »

Pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, notons $\mathcal{P}_j$: « la famille $\big(f^{p-1-j}(e), \dots, f^{p-1}(e)\big)$ » est libre.
A vous de continuer.

2. Montrons tout d'abord que $p \leqslant n$.
Le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace.
La famille $\big(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e)\big)$ de cardinal p étant une famille libre de de E, de dimension n, on en déduit $p \leqslant n$.
Ainsi, on peut écrire n sous la forme d'une somme de deux entiers *naturels*, à savoir p et $n-p$.
Donc $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ f^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

124

Solution d'un élève, efficace (amélioré par mes soins !)
Montrons que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ ce qui montrera que $u \circ v = 0$.
En fait, on va montrer que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$.

Pour cela, raisonnons par inclusion et égalité des dimensions en montrant que $\begin{cases} \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im} v \\ \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} v) \end{cases}$

Il suffit de montrer que (WHY ?) $\begin{cases} \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im} v \\ \dim(\operatorname{Ker} u) \geqslant \dim(\operatorname{Im} v) \end{cases}$

— Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
Comme $\mathrm{id}_E = u + v$, on a $x = u(x) + v(x)$.
Par hypothèse $x \in \operatorname{Ker} u$, donc $x = v(x)$, donc $x \in \operatorname{Im} v$.

— D'après le théorème du rang appliqué à u, on a $n = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$.
L'hypothèse $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant n$ se réécrit donc $\operatorname{rg}(v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$.

Ma solution initiale (presque trop compliquée !)
On a toujours

$$\operatorname{Im}(u+v) \ \subset \ \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \ \subset E$$

Comme $u + v = \mathrm{id}$, on a $\operatorname{Im}(u + v) = E$, d'où égalité partout. Ainsi,

$$E \ = \ \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$$

Par ailleurs, l'hypothèse dit que $\dim E = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v)$, donc $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont en somme directe (on peut penser à Grassmann).
Ainsi,

$$E \ = \ \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$$

Montrons que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ ce qui montrera que $v \circ u = 0$.
Soit $x \in \operatorname{Im} u$ que l'on écrit en utilisant $u + v = \mathrm{id}$ de deux manières :

$$x + 0 = u(x) + v(x)$$

Comme la somme est directe, on en déduit que $x = u(x)$ et $0 = v(x)$. Bref, $x \in \operatorname{Ker} v$.
Bilan : $v \circ u = 0$. Puis, comme $u + v = \mathrm{id}$, on obtient $(\mathrm{id} - u) \circ u = 0$, d'où $u^2 = u$.

Comme u et v jouent des rôles symétriques, on en déduit $u \circ v = 0$ et $v^2 = v$.

Remarque pour moi.
Les hypothèses $u + v = \mathrm{Id}_E$ et $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant n$ impliquent $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant \operatorname{rg}(u + v)$.
Comme on a toujours $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$, on en déduit qu'il y a égalité.
Et quand on a un peu de métier, on sait que l'égalité $\operatorname{rg}(u + v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ force l'égalité $\operatorname{Im}(u + v) = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$ (ce n'est pas complètement évident !).

125

Par hypothèse, f est de rang 1.
Donc l'image de f admet une base de cardinal 1 : on peut donc trouver $v \in E$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v)$.
Comme $f(v) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v)$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Ce λ étant fixé, montrons maintenant que $\quad \forall\, x \in E,\ f^2(x) = \lambda f(x)$.
Soit $x \in E$.
Comme $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v)$, il existe μ_x tel que $f(x) = \mu_x v$.
D'où $f^2(x) = f(f(x)) = f(\mu_x v) = \mu_x f(v) = \mu_x \lambda v = \lambda \underbrace{\mu_x v}_{f(x)}$.

On a montré $\forall\, x \in E,\ f^2(x) = \lambda f(x)$ (égalité de E).
D'où l'égalité d'endomorphismes $f^2 = \lambda f$ (égalité de $\mathcal{L}(E)$).

1. Montrons que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} f$.
   Alors $f(x) = 0_E$.
   En appliquant f, on trouve $f(f(x)) = f(0_E)$.
   Comme f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_E$.
   Ainsi, $f^2(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$.

   Montrons que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
   Soit $y \in \operatorname{Im} f^2$.
   Ainsi y s'écrit $f^2(x)$ pour un certain x, alors y s'écrit $f(t)$ pour un certain t (à savoir $t = f(x)$).
   Donc $y \in \operatorname{Im} f$.
2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ (en fait on est en train de supposer que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$).
   Montrons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
   Il suffit de montrer l'inclusion $\subset$.
   Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Alors on a deux informations :
   $$y \text{ s'écrit } f(x) \text{ pour } x \in E \qquad \text{et} \qquad f(y) = 0_E$$
   Mettons ensemble ces deux informations.
   On a donc $f(f(x)) = 0_E$, d'où $f^2(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$.
   Or par hypothèse, $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, donc $x \in \operatorname{Ker} f$.
   D'où $f(x) = 0_E$. Or $y = f(x)$. Donc $y = 0_E$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
   Montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   Il suffit de montrer l'inclusion $\supset$, car l'autre inclusion est toujours vraie d'après la question 1.
   Soit donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$.
   On a alors $f(f(x)) = 0_E$.
   Ainsi $f(x) \in \operatorname{Ker} f$.
   Or $f(x) \in \operatorname{Im} f$ par construction.
   On a donc
   $$f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$$
   Par hypothèse $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, donc $f(x) = 0_E$, ce qui signifie que $x \in \operatorname{Ker} f$.
3. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ (on suppose donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$, car l'autre inclusion est toujours vraie).
   Montrons que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
   Soit $x \in E$ que l'on cherche à écrire comme $\underbrace{y}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{z}_{\in \operatorname{Ker} f}$.
   Considérons le vecteur $f(x)$ (c'est un peu la seule chose que l'on puisse faire d'intelligent pour provoquer l'utilisation de l'hypothèse).
   C'est un élément de $\operatorname{Im} f$, donc d'après l'hypothèse, de $\operatorname{Im} f^2$.
   Bref, $f(x) \in \operatorname{Im} f^2$. Donc il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$.
   Posons $y = f(a)$. C'est un élément de $\operatorname{Im} f$.
   Posons $z = x - f(a)$. C'est un élément de $\operatorname{Ker} f$, en effet :
   $$f(z) \; = \; f\big(x - f(a)\big) \; = \; f(x) - f^2(a) \overset{\text{def de } a}{=} 0_E$$
   De plus, $x = y + z$ (n'est-ce pas ?).
   On a bien réalisé le contrat.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
   Montrons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
   Comme l'inclusion $\supset$ est toujours vraie, il ne reste plus qu'à montrer $\subset$.
   Soit $w \in \operatorname{Im} f$. Donc il existe $x \in E$ tel que $w = f(x)$.
   D'après l'hypothèse, il existe $y \in \operatorname{Im} f$ et $z \in \operatorname{Ker} f$ tel que
   $$x = y + z$$
   En appliquant f à cette égalité, on obtient $f(x) = f(y) + 0_E$, donc $w = f(y)$.
   Comme $y \in \operatorname{Im} f$, on a $f(y) \in \operatorname{Im} f^2$ (est-ce bien clair pour vous ?).
   On récupère $w \in \operatorname{Im} f^2$, ce qu'il fallait montrer.

4. Les implications $\boxed{\Longleftarrow}$ sont vraies d'après les questions précédentes (WHY ?).
Occupons-nous des implications $\Longrightarrow$.

• Supposons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
Montrons que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Pour cela, montrons que (WHY ?)

$$\begin{cases} (\mathrm{i}) \quad \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ \text{et} \\ (\mathrm{ii}) \quad \dim E = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) \end{cases}$$

L'égalité (i) résulte de la question 2.
L'égalité (ii) résulte du théorème du rang.

• Supposons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
Montrons que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Pour cela, montrons que (WHY ?)

$$\begin{cases} (\mathrm{i}) \quad E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \\ \text{et} \\ (\mathrm{ii}) \quad \dim E = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) \end{cases}$$

L'égalité (i) résulte de la question 3.
L'égalité (ii) résulte du théorème du rang.

1. Notons $d_k = \dim \operatorname{Ker} u^k$.
   Comme pour tout k, on a $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$, il suffit de montrer (WHY ?) qu'il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $d_p = d_{p+1}$.
   Les entiers d_k appartiennent à $[\![0, n]\!]$.
   Considérons $d_0, d_1, \ldots, d_{n+1}$: ils sont au nombre de $n + 2$.
   D'après le principe des tiroirs, il existe nécessairement deux d_k égaux.
   On a donc montré qu'il existe $i \neq j \in [\![0, n]\!]$ tels que $d_i = d_j$.
   Comme par ailleurs on a
   $$d_0 \leqslant d_1 \leqslant \cdots d_i \leqslant \cdots \leqslant d_j \leqslant \cdots \leqslant d_n$$
   il y a des égalités partout entre d_i et d_j, d'où $d_i = d_{i+1}$.
2. • Montrons d'abord que $\forall\, k \geqslant p,\ \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
   Soit $k \geqslant p$.
   L'inclusion $\subset$ est évidente.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
   Montrons que $x \in \operatorname{Ker} u^k$.
   On va exploiter à fond l'égalité d'entiers *naturels*
   $$k + 1 = (p + 1) + (k - p) \qquad \text{puis} \qquad k = (p) + (k - p)$$
   On a $u^{k+1}(x) = 0$.
   D'où $u^{p+1}\big(u^{k-p}(x)\big) = 0$, d'où $u^{k-p}(x) \in \operatorname{Ker} u^{p+1}$.
   Or $\operatorname{Ker} u^{p+1} = \operatorname{Ker} u^p$, donc $u^{k-p}(x) \in \operatorname{Ker} u^p$.
   D'où $u^p\big(u^{k-p}(x)\big) = 0$,
   D'où $u^k(x) = 0$.
   D'où $x \in \operatorname{Ker} u^k$.

   • On montre ensuite par récurrence que $\quad \forall\, k \geqslant p,\ \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^p$.

   • Montrons $\quad \forall\, k \geqslant p,\ \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^p$.
   Soit $k \geqslant p$.
   On a toujours $\operatorname{Im} u^p \subset \operatorname{Im} u^k$.
   Par ailleurs, $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^k$, donc par le théorème du rang, on a $\dim\big(\operatorname{Im} u^p\big) = \dim\big(\operatorname{Im} u^k\big)$.
   Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^k$.
3. D'après le théorème du rang appliqué à u^p, on a l'égalité
   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u^p + \dim \operatorname{Im} u^p$$
   Il reste à montrer que la somme de $\operatorname{Ker} u^p$ et $\operatorname{Im} u^p$ est directe.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} u^p \cap \operatorname{Im} u^p$.
   Ainsi, $\begin{cases} u^p(x) = 0 \\ x \text{ s'écrit } u^p(t) \end{cases}$ Ainsi, $u^{2p}(t) = 0$, d'où $t \in \operatorname{Ker} u^{2p}$.
   Or d'après la question 1, on a $\operatorname{Ker} u^{2p} = \operatorname{Ker} u^p$, d'où $t \in \operatorname{Ker} u^p$, d'où $u^p(t) = 0$, d'où $x = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Le sens direct est facile avec le théorème du rang (licite, car E est de dimension finie).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\dim K + \dim V = \dim E$.

Première rédaction (avec des bases).
Considérons $\mathcal{B}_K = (e_1, \ldots, e_k)$ une base de K (on a donc noté k la dimension de K).
D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ de E (ces deux phrases reviennent à dire « considérons une base de E adaptée à K »).
Considérons également $\mathcal{B}_V = (v_{k+1}, \ldots, v_n)$ une base de V (on a utilisé l'hypothèse sur les dimensions, pour dire que $\dim V = n - k$).

Considérons l'unique application linéaire $u : E \to F$ définie par $\quad \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k \\ v_i & \text{si } i \geqslant k+1 \end{cases}$

Il reste à vérifier que $\operatorname{Ker} u = K$ et $\operatorname{Im} u = V$.
Il est astucieux de commencer la faire la vérification du fait que $\operatorname{Im} u = V$, pour ensuite montrer que $\operatorname{Ker} u = K$.

— On a
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u &= \operatorname{Vect}(u(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]} \\ &= \operatorname{Vect}(u(e_i))_{i \in [\![k+1,n]\!]} \\ &= \operatorname{Vect}(v_i)_{i \in [\![k+1,n]\!]} \\ &= V \end{aligned}$$
En particulier, $\operatorname{rg} u = \dim V$

— On a l'inclusion $K \subset \operatorname{Ker} u$ (car $K = \operatorname{Vect}\Big((e_i)_{i \in [\![1,k]\!]}\Big)$ et $e_i \in \operatorname{Ker} u$ pour ces indices i).
De plus, on a l'égalité des dimensions. En effet, d'une part $\dim K = k$ par notation, et d'autre part, on a d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} u = n - \operatorname{rg} u$, d'où $\dim \operatorname{Ker} u = n - \dim V = k$.

On peut bien sûr vérifier à la main l'égalité $K = \operatorname{Ker} u$.
Reste à assurer l'inclusion $\boxed{\supset}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$, c'est-à-dire $x \in E$ et $u(x) = 0$.
Si on écrit x sur la base $\mathcal{B}_E$, disons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et que l'on applique u, on obtient $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} x_i v_i = 0$.
Comme la famille $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ est libre, on en déduit la nullité de tous les x_i pour $i \geqslant k+1$.
Ainsi, $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_d)$, c'est-à-dire $x \in K$.

Deuxième solution (avec la notion de supplémentaire).
On considère un supplémentaire de K dans E (ça existe !), notons-le S.
On a alors $\dim E = \dim K + \dim S$.
D'après l'hypothèse, on en déduit que $\dim V = \dim S$.
On peut donc trouver un isomorphisme φ de S vers V.
Considérons maintenant l'unique application linéaire $u : E \to F$ définie par ses retrictions à K et S (cela suffit car $E = K \oplus S$) :
$$u_{|K} = 0_{\mathcal{L}(K,F)} \qquad \text{et} \qquad u_{|S} = \varphi$$
(il y a un léger abus de notation dans la dernière égalité, WHY ?).
Reste à montrer que $\operatorname{Ker} u = K$ et $\operatorname{Im} u = V$.

1. Notons w la restriction de v à l'image de u, autrement dit $w : \begin{array}{rcl} \operatorname{Im} u & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & v(y) \end{array}$

   Cette application est linéaire (car v l'est), et vérifie

   — $\operatorname{Im} w = v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im}(v \circ u)$, d'où $\operatorname{rg}(w) = \operatorname{rg}(v \circ u)$

   — $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v$

   Le théorème du rang appliqué à w fournit alors

$$\dim(\operatorname{Im} u) \;=\; \dim(\operatorname{Ker} w) \;+\; \operatorname{rg} w$$

   D'où

$$\operatorname{rg} u \;=\; \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v) \;+\; \operatorname{rg}(v \circ u)$$

2. D'après la question précédente et une inclusion que vous devinerez, on a

$$\operatorname{rg} u \;=\; \underbrace{\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v)}_{\leqslant \dim \operatorname{Ker} v} \;+\; \operatorname{rg}(v \circ u)$$

   D'après le théorème du rang appliqué à v :

$$\operatorname{rg} u \;=\; \underbrace{\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v)}_{\dim F - \operatorname{rg} v} \;+\; \operatorname{rg}(v \circ u)$$

   D'où

$$\operatorname{rg} u \;\leqslant\; \dim F \;-\; \operatorname{rg} v \;+\; \operatorname{rg}(v \circ u)$$

3. La formule du rang appliquée à u, v et $v \circ u$ fournit :

$$\operatorname{rg}(u) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} u) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(v) = \dim F - \dim(\operatorname{Ker} v)$$

   et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim E - \dim\big(\operatorname{Ker}(v \circ u)\big)$.
   En reportant dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(v \circ u)\big) \;\leqslant\; \dim(\operatorname{Ker} v) \;+\; \dim(\operatorname{Ker} u).$$

132

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Comme la famille (u_1, u_2) est libre, on a l'équivalence :

$$v \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (u_1, u_2, v) \text{ liée}$$

Cette dernière condition équivaut à dire que la famille des trois vecteurs colonnes (U_1, U_2, V) est liée, c'est-à-dire que le système homogène ayant pour matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{bmatrix}$ possède une solution non triviale.
En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, on ne change pas l'ensemble des solutions du système.
On se ramène au système triangulaire de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 4 & y + 2x \\ 0 & 0 & -4x - y + 2z \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \iff -4x - y + 2z = 0$$

Remarque. On peut vérifier (cela ne coûte rien) que les coordonnées de u_1, à savoir $(1, -2, 1)$, satisfont l'équation précédente. Idem pour u_2.

Remarque. Avec l'outil « déterminant » (patienter jusqu'en Mai), on a directement l'équivalence :

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(u_1, u_2, v) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

133

Grâce au théorème de la base incomplète, on peut considérer une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dont les $n - r$ derniers vecteurs forment une base de F (*i.e.* $F = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$).

On peut caractériser l'appartenance à F pour un vecteur $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$:

$$x \in F \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_r = 0 \end{cases}$$

Pour tout k, on pose $H_k = \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \mid x_k = 0 \right\}$ de sorte que l'équivalence précédente se réécrit :

$$x \in F \quad\iff\quad x \in \bigcap_{k=1}^{r} H_k$$

Donc $F = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} H_k$.

Or, on remarque que H_k est un hyperplan de E (WHY ?).

D'où F est l'intersection de r hyperplans de E.

134

Comme H_i est un hyperplan, il existe une forme linéaire φ telle que $\operatorname{Ker}\varphi = H_i$.

Considérons $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ x & \longmapsto & \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)\big) \end{array}$.

L'application u est linéaire (car les φ sont linéaires).

Le noyau de u est $H_1 \cap \cdots \cap H_r$ (WHY ?).

Or l'espace de départ de u, à savoir E, est de dimension finie. Le théorème du rang appliqué à u fournit donc :

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_r) \;=\; \dim(E) - \operatorname{rg}(u) \;\geqslant\; n - r$$

La dernière égalité provient du fait que $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim \mathbb{K}^r = r$ (le rang d'une application linéaire est toujours inférieur à la dimension de l'espace d'arrivée).

135

Considérons l'application linéaire $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ x & \longmapsto & \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)\big) \end{array}$ avec $H_i = \operatorname{Ker} \varphi_i$.

On a clairement $\operatorname{Ker} \Phi = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_k$.

D'après le théorème du rang, on a l'équivalence

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi = \dim E - r \iff \operatorname{rg} \Phi = r$$

d'où

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_k \right) = \dim E - r \iff \Phi \text{ surjective}$$

On doit donc montrer l'équivalence :

$$\text{la famille } (\varphi_1, \dots, \varphi_r) \text{ de } \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \text{ est libre} \iff \Phi \text{ surjective}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons Φ surjective.
Montrons que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est libre.
Soit $\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que ...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons Φ non surjective.
Montrons que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est liée.

1. (a) Notons U la matrice colonne dont tous les éléments valent 1. On a alors

$$M \in L_0 \iff MU = 0$$

Donc L_0 est le noyau de l'application $\varphi : M \mapsto MU$, qui est clairement linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Donc L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $M \in L_0$.
On a alors $\forall\, i, m_{i,n} = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} m_{i,j}$.
Ainsi, en utilisant la décomposition de M dans la base des $E_{i,j}$, on a

$$M = \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$$

d'où

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n})$$

D'où

$$M \in \mathrm{Vect}\Big(E_{i,j} - E_{i,n}\Big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$$

D'où l'inclusion

$$L_0 \subset \mathrm{Vect}\Big(E_{i,j} - E_{i,n}\Big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$$

Les matrices $E_{i,j} - E_{i,n}$ sont dans L_0, d'où

$$L_0 \supset \mathrm{Vect}\Big(E_{i,j} - E_{i,n}\Big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$$

(c) Comme L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que L_0 est de dimension finie.
D'après la question précédente, la famille $(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$ est génératrice de L_0.
Montrons que c'est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $(m_{i,j})$ une famille de scalaires telle que

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]} m_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n}) = 0$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}E_{i,j} \;-\; \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}\Big)E_{i,n} \;=\; 0$$

Ainsi (WHY), on a pour tout (i,j), $m_{i,j} = 0$.

Bilan. Cette famille est une base de L_0. Elle contient $n(n-1)$ vecteurs, donc

$$\dim L_0 = n(n-1)$$

2. On a les équivalences

$$\begin{aligned} M \in L_\alpha &\iff MU = \alpha U \\ &\iff (M - \alpha I_n)U = 0 \\ &\iff M - \alpha I_n \in L_0 \end{aligned}$$

3. (a) Attention à ne pas dire que L est la réunion de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour en déduire que c'est un espace vectoriel.
Il faut ici revenir à la définition.

— La matrice nulle est dans L (par exemple appartient à L_0).

— Montrons que L est stable par combinaison linéaire.

— Soit $M, M' \in L$. Alors on peut trouver $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tels que $M \in L_\alpha$ et $M' \in L_{\alpha'}$.
On a donc $MU = \alpha U$ et $M'U = \alpha' U$.
On en déduit que $(M + M')U = (\alpha + \alpha')U$, donc $M + M' \in L_{\alpha+\alpha'}$.
Donc $M + M' \in L$.

— Soit $M \in L$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M \in L_\alpha$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on montre que $\lambda M \in L_{\lambda\alpha}$, donc $\lambda M \in L$.

(b) • Montrons d'abord $L = \mathrm{Vect}(I_n) + L_0$. On a

$$\begin{aligned} M \in L &\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ M \in L_\alpha \\ &\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ M - \alpha I_n \in L_0 \\ &\iff M \in \mathrm{Vect}(I_n) + L_0 \end{aligned}$$

• On a $L_0 \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{0\}$ (WHY ?)

Bilan. On a $L = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus L_0$.

(c) D'après la question précédente, on a $\dim L = \dim \mathrm{Vect}(I_n) + \dim L_0$.
On a donc :

$$\dim L \;=\; 1 + n(n-1)$$

4. (a) Soit $M \in L_0$.
Montrons

$$M \in C_0 \iff \forall\, j \in [\![1, n-1]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$$

L'implication $\implies$ est évidente.

Pour l'autre implication : supposons que la somme des coefficients des $n-1$ premières colonnes est nulle.

Comme $M \in L_0$, la somme des éléments de chaque ligne est nulle, donc la somme de tous les coefficients est nulle.

On en déduit que la somme des coefficients de la dernière colonne est nulle, donc $M \in C_0$.

(b) En utilisant un raisonnement analogue au précédent, ou en transposant, on montre que C_0 est un espace vectoriel.

Ainsi, $L_0 \cap C_0$ est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel.

Un élément de $L_0 \cap C_0$ est parfaitement déterminé par son bloc $(n-1, n-1)$ situé en haut à gauche.

Il est donc combinaison linéaire des matrices $E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}$ (pour ajuster la nullité par ligne et par colonne, ainsi que pour la dernière ligne et la dernière colonne).

Ainsi, la famille $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$ est une famille génératrice de $L_0 \cap C_0$.

De plus, elle est libre (WHY ?).

C'est donc une base de $L_0 \cap C_0$. Ainsi :

$$\dim L_0 \cap C_0 \;=\; (n-1)^2$$

5. (a) On raisonne par double implication.

($\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe un réel α tel que $M \in L_\alpha \cap C_\alpha$, alors $M \in L \cap C$.
($\Longrightarrow$) On suppose que $M \in L \cap C$.
Alors, il existe $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tels que $M \in L_\alpha$ et $M \in C_{\alpha'}$.
Ainsi, pour tous i, j, on a

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \alpha \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \alpha'$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = n\alpha = n\alpha'$.
D'où $\alpha = \alpha'$.
Donc $M \in L_\alpha \cap C_\alpha$.

(b) On montre facilement l'équivalence $\quad M \in L \cap C \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ M - \alpha I_n \in L_0 \cap C_0$.
On en déduit $L \cap C = \text{Vect}(I_n)\ +\ L_0 \cap C_0$.
Comme la somme est directe (WHY ?), on en déduit $L \cap C = \text{Vect}(I_n)\ \oplus\ L_0 \cap C_0$.
Donc $\dim(L \cap C) = \dim \text{Vect}(I_n) + \dim(L_0 \cap C_0)$

$$\dim(L \cap C)\ =\ 1 + (n-1)^2$$

On note E_n l'ev des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto e^x P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. On pose $f_k : x \mapsto e^x x^k$.
   Cette fonction f_k est dans $\mathcal{C}^\infty$.
   Par définition, on a
   $$E_n = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$$
   Ainsi E_n admet une famille génératrice finie, donc est de dimension finie.
   De plus, on montre que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre (à faire sur une copie de pale).
   Bilan :
   $$\dim E_n = n + 1$$

   Autre preuve.
   On peut exhiber un isomorphisme entre E_n et $\mathbb{R}_n[X]$:
   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^x P(x) \end{array}$$
   Je vous laisse montrer que cette application est linéaire et est bijective.
   Ainsi, E_n et $\mathbb{R}_n[X]$ sont isomorphes donc ont même dimension. Ainsi, $\dim E_n = n + 1$.
2. • Il est clair que Δ est linéaire.
   • Pour $f : x \mapsto e^x P(x) \in E_n$, la fonction $\Delta(f)$ est définie par $x \mapsto e^x\,(P + P')(x)$.
   Comme $P + P' \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $\Delta(f)$ est dans E_n.

   Bilan. Δ est un endomorphisme de E_n.

   • Montrons maintenant que Δ est bijectif.
   Comme E_n est de dimension finie, il suffit de montrer que Δ est injectif.
   Montrons pour cela que $\mathrm{Ker}\,\Delta = \{0\}$.
   Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\Delta$.
   Alors $f \in E_n$ et $\Delta(f) = 0$.
   Écrivons f sous la forme $x \mapsto e^x P(x)$.
   Alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x\,(P + P')(x) = 0$$
   Comme $e^x \neq 0$, on a $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (P + P')(x) = 0,$
   d'où (WHY ?) $P + P' = 0$.
   Donc $P = -P'$. En considérant le degré, on obtient $P = 0$.
   Donc $f = 0$.
3. (a) Comme Δ est un automorphisme, alors Δ^{n+1} aussi.
   Donc g admet un unique antécédent par Δ^{n+1}.

   (b) **Analyse.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $D^{n+1}(f) = g$ et $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$.
   Par définition de h, qui est dans E_n donc dans $\mathcal{C}^\infty$, on a $\Delta^{n+1}(h) = D^{n+1}(h) = g$, d'où
   $$D^{n+1}(f) = D^{n+1}(h)$$
   Ainsi $D^{n+1}(f - h) = 0$.
   Dit autrement, $f - h$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée $(n+1)$-ème est nulle.
   Ainsi (WHY ?), $f - h$ est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n$.
   Il existe donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
   $$f : x \;\mapsto\; h(x) + P(x)$$
   D'après la formule de Taylor, on a
   $$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$
   Or $P = f - h$, donc $P^{(k)} = f^{(k)} - h^{(k)}$, et donc par hypothèse faite sur f, on a $P^{(k)}(0) = -h^{(k)}(0)$.

Bilan de l'analyse. La fonction f est de la forme

$$f : x \longmapsto h(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{-h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Synthèse. Considérons f la fonction

$$f : x \longmapsto h(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{-h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

que l'on peut voir comme $h + Q$ avec Q une fonction polynomiale de degré $\leqslant n$.
On a

— f est de classe $\mathcal{C}^\infty$

— $D^{n+1}(f) = D^{n+1}(h) + D^{n+1}(Q) = g + 0 = g$

— $f^{(k)}(0) = h^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0) = h^{(k)}(0) - h^{(k)}(0) = 0$

4. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$.
Analyse.
Soit λ tel que $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$.
Alors il existe $f \in E_n$ **non nulle** telle que $\Delta(f) = \lambda f$.
On écrit f sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x P(x)$.
L'égalité $f' = \lambda f$ s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \Big(P(x) + P'(x)\Big) = \lambda \mathrm{e}^x P(x)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P + P')(x) = \lambda P(x)$$

Les polynômes $P + P'$ et λP coïncident sur un ensemble infini, donc ils sont égaux.
D'où $P' = (\lambda - 1)P$.
On a alors nécessairement $\lambda = 1$ (WHY ?).
En effet, si $\lambda - 1 \neq 0$, on aurait, $\deg P' = \deg P$, ce qui impose $P = 0$.
D'où $f = 0$, d'où la contradiction.
Synthèse.
Réciproquement, vérifions que $\mathrm{Ker}(\Delta - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.
La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est non nulle et dans $\mathrm{Ker}(\Delta - \mathrm{id})$.

Bilan. L'ensemble des λ cherchés est $\{1\}$.

5. Montrons que ce n'est pas le cas.
Raisonnons par l'absurde.
On aurait alors nécessairement

$$E_n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta)} \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{id})$$

D'après la question précédente, on a $\mathrm{Sp}(\Delta) = \{1\}$, d'où

$$E_n = \mathrm{Ker}(\Delta - \mathrm{id})$$

Or $\mathrm{Ker}(\Delta - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(f_0)$ où $f_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
Donc E_n serait égal à $\mathrm{Vect}(f_0)$, d'où la contradiction.