Analyse asymptotique

Ici, I est un intervalle non trivial, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ est un réel qui est dans I ou bien une borne de I.
Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On suppose qu'elles sont définies sur I, ou bien sur $I \setminus \{a\}$.
Enfin, $n \in \mathbb{N}$.

I. Développement limité au voisinage d'un point

1 **Définition.** On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a (abrégé en $\mathrm{DL}_n(a)$) lorsqu'il existe $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

- **Se ramener en 0.** De manière équivalente $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$
- **Autre définition.** Si l'on veut une « vraie égalité » avec un quantificateur, voici la définition à adopter.

  On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a,
  lorsqu'il existe $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ et une fonction ε tels que

  $$\forall\, x \text{ au vois. de } a, \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \varepsilon(x)(x-a)^n \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

- **Exemple.** La fonction $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + 9x + 8x^2 + 7x^3 + x^3 \ln(1+x) \end{array}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$. WHY?

2 **Proposition (unicité).** Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors celui-ci est unique.
Autrement dit, s'il existe $c_0, \dots, c_n$ et $c_0', \dots, c_n' \in \mathbb{K}$ tels que

$$c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big) \underset{x\to a}{=} c_0' + c_1'(x-a) + \cdots + c_n'(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

alors $\quad \forall\, k \in [\![0,n]\!],\ c_k = c_k'$.

- **Vocabulaire.** Reprenons les notations de la définition. Lorsque f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ s'appelle **la** *partie régulière* du développement limité.

  On peut aussi considérer sa partie régulière comme polynôme formel : autrement dit, la partie régulière est le polynôme $\sum_{k=0}^{n} c_k (X-a)^k$.

3 **Proposition (des exemples).**

— La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, à savoir :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

— La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, à savoir :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

— La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, à savoir :

$$\mathrm{e}^{-1/x^2} \underset{x\to 0}{=} \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

Des propriétés

4 **Proposition (régularité).**

— **Ordre** 0. On a :

$$f \text{ admet un } \mathrm{DL}_0(a) \iff \begin{cases} f \text{ continue en } a & \text{si } a \in \mathcal{D}_f \\ f \text{ est prolongeable par continuité en } a & \text{sinon} \end{cases}$$

— **Ordre** 1. Lorsque $a \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1(a) \iff f \text{ dérivable en } a$$

Dans ce cas, le développement limité est

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^1\right)$$

La partie régulière fournit l'équation de la tangente en a.

5 **Attention.** L'existence d'un $\mathrm{DL}_n(a)$ n'entraîne PAS que f est n fois dérivable en a.
sol → 18

Par exemple, $f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

6 **Proposition (propriétés).**

— **Troncature.** Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors f admet un $\mathrm{DL}_p(a)$ pour tout $p \leqslant n$.
Dans ce cas, la partie régulière du $\mathrm{DL}_p(a)$ s'obtient en tronquant à l'ordre p la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$.

— **Terme prépondérant.** Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont la partie régulière n'est pas le polynôme nul :

$$f(x) = \underbrace{c_p}_{\neq 0}(x-a)^p + c_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} c_p(x-a)^p$$

Dans ce cas, le terme $c_p(x-a)^p$ est appelé *le terme prépondérant* du développement limité.
L'entier p est appelé *la valuation* du développement limité.

— **Partage de signe.** Soit f une fonction à valeurs *réelles*.
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ ayant un terme prépondérant $c_p(x-a)^p$, alors f possède le signe (strict) de $c_p(x-a)^p$ au voisinage de a.

— **Parité.** Soit f admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$.

— Si f est paire, alors sa partie régulière est un polynôme pair.
— Si f est impaire, alors sa partie régulière est un polynôme impair.

- **Attention.** Il existe des fonctions ayant un $\mathrm{DL}_n(0)$ sans terme prépondérant. Par exemple, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ en 0.
- **Exemple.** Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+9x+8x^2+7x^3+x^3\ln(1+x) \end{array}$
Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

7
preuve

Proposition (primitivation des DL).
Soit f une fonction dérivable telle que f' admette un $\mathrm{DL}_n(a)$, disons :

$$f'(x) \;=\; c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ donné par

$$f(x) \;=\; f(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

- **Constante de primitivation.** Attention au terme constant $f(a)$ qui apparaît.

- **Attention, on ne peut pas dériver des DL.** Si f est dérivable et admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors il n'est pas vrai que f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$.
  Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.
  Cette fonction f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$.
  Mais sa dérivée f' n'admet de DL à aucun ordre (WHY ?).

- **Lemme pour la preuve.**
  Soit φ une fonction dérivable telle que φ' admette un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme :
  $$\varphi'(x) \;=\; \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$
  Alors φ admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ donné par
  $$\varphi(x) \;=\; \varphi(0) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\big(x^{n+1}\big)$$

8

Proposition (des exemples).

— La fonction tangente admet un $\mathrm{DL}_3(0)$, à savoir :

$$\tan x \;=\; x + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$$

— La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, à savoir :

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

— La fonction Arctan admet un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$, à savoir :

$$\mathrm{Arctan}(x) \;=\; x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1})$$

II. Formule de Taylor-Young

Le théorème en a

9 **Théorème (Formule de Taylor-Young).**
Soit $n \geqslant 1$.
On suppose que f est définie sur un intervalle non trivial I et que $a \in I$ (ainsi, f est définie en a).
$\boxed{\text{Si}}$ f est n fois dérivable sur I, $\boxed{\text{alors}}$ f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;+\; \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

ce qui s'écrit :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;+\; \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

- **Preuve.** Elle a lieu par récurrence sur n, en posant $\mathscr{H}_n$, l'assertion :

$$\text{« } \forall f \in \mathscr{D}^n(I,\mathbb{R}), \quad f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;+\; \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big) \text{ »}$$

- **Utilité.** La formule de Taylor-Young a d'abord un intérêt théorique, car elle garantit l'existence d'un développement limité.
Dans la pratique, elle n'est pas si utile que cela, car en général, il est rare que les dérivées successives soient faciles à calculer.

- **Définition (polynôme de Taylor d'une fonction).**
Dans le théorème, la fonction polynomiale qui intervient

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{n,a,f} : x \longmapsto\; & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\end{aligned}$$

est appelée « fonction polynomiale de Taylor de f d'ordre n en a », et est notée $\mathbb{T}_{n,a,f}$ (par Madame Tête).

En particulier,

$$\mathbb{T}_{0,a,f} : x \longmapsto f(a)$$

$$\mathbb{T}_{1,a,f} : x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\mathbb{T}_{2,a,f} : x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- **Reformulation.** La formule de Taylor-Young s'énonce alors

$$f(x) \;=\; \mathbb{T}_{n,a,f}(x) \;+\; \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\Big((x-a)^n\Big)$$

sous couvert que f soit n fois dérivable, bien sûr.

Formulaire en 0

Les fonctions usuelles suivantes étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et définie en 0, la formule de Taylor-Young nous assure qu'elles possèdent chacune un développement limité à tout ordre en 0, que l'on peut obtenir en déterminant les valeurs en 0 de leurs dérivées successives.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$$

Conseil. Apprenez bien le dernier terme (celui juste avant le o).

Commentaires.

- Les 4 premières formules s'obtiennent à partir de la formule :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

  qui provient de la formule **algébrique** (pas de dénominateur, donc pas de condition sur x) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad 1 - x^{n+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k$$

  Il n'y a donc pas de factorielles dans ces 4 premières formules.

- La formule pour exp se démontre avec Taylor-Young.
- Les formules ch et sh s'obtiennent à partir de celle de l'exponentielle en remarquant que ce sont les parties paires et impaires.
- Les formules pour cos et sin s'obtiennent avec Taylor-Young.
- Pour $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, appliquer Taylor-Young.
- Pour $x \mapsto \sqrt{1+x}$, prendre $\alpha = \frac{1}{2}$.

III. Opérations sur les développements limités

L'utilisation de la formule de **Taylor-Young** n'est pas en général la meilleure méthode pour calculer effectivement le développement limité d'une fonction f, car elle suppose l'existence des dérivées successives de f et nécessite leur calcul (souvent pénible).
Quant à la méthode de **primitivation**, elle est efficace lorsqu'elle peut s'appliquer, mais cela concerne des cas bien particuliers.
On préfère le plus souvent obtenir des développements limités par **opérations** (somme, produit, quotient ou encore composition) à partir des développements limités usuels en 0.

Translation

Lorsque l'on cherche le développement limité d'une fonction en un point a, on se ramène de manière quasi-systématique à effectuer un développement limité en 0, en considérant la fonction $h \mapsto f(a+h)$.

10 **Question.** Donner le $\mathrm{DL}_2(3)$ de $\sqrt{x}$.

Somme

11 sol → 19 **Question.**

— Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^x + \ln(1+x)$ admet $\mathrm{DL}_3(0)$ et le déterminer.

— Même question avec $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$.

- **Proposition.** Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors $f+g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et la partie régulière du DL de $f+g$ est la somme des parties régulières des DL de f et g.

  On a le même résultat pour une combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Produit

12 sol → 19 **Question.**

— Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et le déterminer.

— Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^x(1+x)^{1/3}$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et le déterminer.

- **Proposition.** Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors $f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

  Preuve. Supposons que f et g possèdent des développements limités qui s'écrivent :

  $$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n).$$

  On a alors :

  $$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + \underbrace{P(x)\mathrm{o}(x^n) + Q(x)\mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(x^{2n})}_{=\mathrm{o}(x^n)}.$$

  La preuve indique que la partie régulière du DL de $f \times g$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le produit des parties régulières des DL de f et g.

- **Puissance.** Soit $p \in \mathbb{N}$.
  On déduit de ce résultat que si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors il en est de même de f^p.
  La preuve se fait par récurrence sur p.

Optimisation des ordres

Lorsque l'on cherche le développement limité à l'ordre n d'une fonction de la forme $f \times g$, il peut sembler nécessaire d'effectuer les développements limités de f et g à l'ordre n.
En réalité, il arrive qu'il ne soit pas nécessaire de « pousser » les développements limités de f et g à l'ordre n, mais que l'on puisse se contenter d'un ordre plus petit. Commençons par un exemple.

- Examinons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x \ln(1+x)$.
  - **Méthode non optimale.** Si l'on écrit les $\mathrm{DL}_2(0)$ des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$:
  $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$
  alors en effectuant le produit, puis en développant et simplifiant, on obtient le résultat :
  $$\mathrm{e}^x \ln(1+x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) = x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).$$
  Cependant, dans le calcul précédent, on constate que, compte tenu du fait que l'on souhaite obtenir un développement à l'ordre 2, on a écrit un terme inutile. Il s'agit du terme $\frac{x^2}{2}$ apparaissant dans le premier facteur :
  $$\left(1 + x + \boxed{\frac{x^2}{2}} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right).$$
  En effet, lors du développement de l'expression, ce terme donne naissance aux trois nouveaux termes $\frac{x^3}{2}$, $-\frac{x^4}{4}$ et $\frac{x^2}{2}\mathrm{o}(x^2)$, qui sont tous négligeables devant x^2.
  - **Optimisation du calcul.** En fait, ici, on peut se contenter d'écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ pour mener à bien le calcul. En effet, lorsque l'on écrit :
  $$\mathrm{e}^x \ln(1+x) = \left(1 + x + \mathrm{o}(x)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right),$$
  les deux termes qui limitent la précision du calcul sont :
    - le $\mathrm{o}(x)$ du premier facteur, qui va être multiplié, « au minimum », par x, et donc qui va donner un terme en $\mathrm{o}(x^2)$;
    - le $\mathrm{o}(x^2)$ du deuxième facteur (qui va être multiplié, « au minimum », par 1).

  On obtient donc bien la précision en $\mathrm{o}(x^2)$ souhaitée :
  $$\begin{aligned}\mathrm{e}^x \ln(1+x) &= x + \left(-\frac{x^2}{2} + x^2\right) + \mathrm{o}(x^2) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).\end{aligned}$$

Remarque. Il faut bien comprendre que, dans l'exemple précédent, c'est l'absence de terme constant dans le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ qui permet de se contenter d'un ordre 1 pour le développement limité de l'autre facteur $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
En effet, en développant le produit, chaque terme du développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, et donc en particulier le terme $\mathrm{o}(x)$, est multiplié par des termes polynomiaux dont l'exposant vaut au moins 1, ce qui entraîne ce « gain » d'un degré de précision.

13 **Question.**
sol → 20

- Montrer que $f : x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1)\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_6(0)$ et le déterminer.
- Montrer que $f : x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1)(1 - \cos x)(x - \sin x)$ admet un $\mathrm{DL}_7(0)$ et le déterminer.

Quotient

• Quand le dénominateur tend vers 1

14 sol → 21 **Question.** Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-\ln(1+x)}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et le déterminer.

• Quand le dénominateur tend vers $\ell \neq 0$

La transformation suivante peut être utile :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{\ell}g(x)\right)}.$$

15 sol → 21 **Question.** Montrer que $x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et le déterminer.

16 **Question.** Montrer que $\dfrac{1}{\cos}$ admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et le déterminer.
En déduire que la fonction tangente admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et le déterminer (connaissez-vous une autre méthode pour y arriver ?).

• Quand le dénominateur tend vers 0

Pour déterminer le DL d'un quotient (s'il existe), on factorise les DL des numérateur et dénominateur par leur terme prépondérant pour se ramener à la situation précédente.
Il se peut que la fonction $\dfrac{f}{g}$ ne possède pas de DL.

17 sol → 23 **Question.** Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{\ln(1+x)}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et le déterminer.
Vous remarquerez que f n'est pas définie en 0 (ce qui n'est pas gênant pour autant).

Composition

- **Exemple.** Effectuons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\sin x)$.
  On a
$$\ln(1+t) \;=\; t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^4),$$
  Comme $\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a :
$$\ln(1+\sin x) \;=\; \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(\sin^4 x).$$
  Examinons chaque terme de droite à gauche, c'est-à-dire "à rebours". Il y a 5 termes.
  - Comme $\sin x \sim x$, en élevant à une puissance fixe, on a $\sin^4 x \sim x^4$.
    Donc le $\mathrm{o}(\sin^4 x)$ est un $\mathrm{o}(x^4)$.
  - Comme $\sin^4 x \sim x^4$, on a $\sin^4 x = x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.
  - Comme $\sin^3 x \sim x^3$ et par imparité de $\sin^3 x$, on a $\sin^3 x = x^3 + \mathrm{o}(x^4)$.
  - Comme $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$, on a $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4)$.
  - Enfin, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$.

  D'où
$$\ln(1+\sin x) \;=\; \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \mathrm{o}(x^4)\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 + \mathrm{o}(x^4)\right) + \mathrm{o}(x^4)$$
  ce qui, en simplifiant, donne :
$$\ln(1+\sin x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathrm{o}(x^4).$$

18 sol → 24 **Question.** Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$.

19 sol → 24 **Question.** Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$.

À méditer. Voici quelques techniques pouvant aider…

- Pour une fonction de la forme $x \mapsto \ln\big(f(x)\big)$, et dans le cas où la fonction f possède une limite finie ℓ strictement positive, on peut écrire :
$$\ln\big(f(x)\big) \;=\; \ln\left(\ell\left(\frac{f(x)}{\ell}\right)\right) \;=\; \ln \ell + \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{\ell} - 1\right)\right),$$
  pour se ramener à utiliser DL(0) de $\ln(1+t)$.
- Pour une fonction de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$, et dans le cas où la fonction f possède une limite finie ℓ, on peut écrire :
$$\mathrm{e}^{f(x)} \;=\; \mathrm{e}^{\ell + f(x) - \ell} \;=\; \mathrm{e}^{\ell}\,\mathrm{e}^{f(x)-\ell}$$
  pour se ramener à utiliser le DL(0) de e^t.
- Pour une fonction de la forme $x \mapsto \big(u(x)\big)^{v(x)}$, il ne faut surtout pas essayer d'utiliser le développement limité usuel de $t \mapsto (1+t)^\alpha$, qui nécessite que α soit constant et ne dépende pas de x, mais écrire :
$$\big(u(x)\big)^{v(x)} \;=\; \mathrm{e}^{v(x)\ln\left(u(x)\right)},$$
  pour se ramener à une fonction de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$.

IV. Applications des DL

Recherche de limites et d'équivalents

- **Exemple.** Déterminons un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x) - \operatorname{sh}(2x)$.
Effectuons le développement limité de f à un ordre suffisant pour que la partie régulière soit non nulle. Ici, l'ordre 3 suffit puisque les DL des fonctions sin et sh diffèrent à partir de l'ordre 3 :

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(2x) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Par différence, on a donc

$$f(x) = -\frac{8}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{puis} \qquad f(x) \sim -\frac{8}{3}x^3.$$

20 sol → 25 **Question.** Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\dfrac{\sin(2x) - \operatorname{sh}(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2}$.

21 sol → 25 **Question.** Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{3\sin x - x\cos x - 2x}{\sin^5 x}$.

22 sol → 25 **Question.** Déterminer un équivalent de la suite de terme général : $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{n(n+1)}{1+n^2}$.

Étude de l'allure d'une courbe au voisinage d'un point

- **Explication.** Un DL peut permettre de déterminer l'allure de la courbe représentative d'une fonction dérivable au voisinage d'un point a.

  — L'existence d'une tangente non verticale au point d'abscisse a du graphe d'une fonction f est équivalente à la dérivabilité de f en a, c'est-à-dire à l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 1 en a.

  — Dans ce cas, l'étude du signe de $f(x) - f(a) - (x-a)\,f'(a)$ permet de préciser la position de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente. On sait qu'il suffit d'obtenir un équivalent de cette quantité pour en connaître le signe au voisinage du point a.

  — Si, en a, on dispose d'un développement limité à un ordre $p \geqslant 2$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_p(x-a)^p + \mathrm{o}\big((x-a)^p\big) \quad \text{avec} \quad c_p \neq 0,$$

  alors le graphe de f admet la droite d'équation $y = c_0 + c_1(x-a)$ pour tangente. De plus, au voisinage de a, la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $c_p(x-a)^p$.

- **Exemple.** Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1-x}$. On a vu que :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

Au voisinage de 0, son graphe est donc tangent à la droite d'équation $y = 1 + 2x$ et la courbe est au dessus de sa tangente car :

$$f(x) - (1+2x) = \frac{5}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{donc} \qquad f(x) - (1+2x) \sim \frac{5}{2}x^2.$$

23 sol → 26 **Question.** Au voisinage de 0, étudier la position de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ par rapport à sa tangente.
Même question avec $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

Étude d'extrema

24 **Lemme de l'extremum local.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a \text{ est un point intérieur à } I \\ f \text{ possède un extremum local en } a \in \mathring{I} \\ f \text{ possède le } \mathrm{DL}_1(a) : \quad f(x) \ = \ \alpha \ + \ \beta(x-a) \ + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = 0$$

On sait que cette condition de nullité de la dérivée n'est pas suffisante pour avoir un extremum.

Un DL à un ordre supérieur peut permettre de montrer que l'on a effectivement affaire à un extremum local.

25 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
$\boxed{\text{Si}}$ f admet un $\mathrm{DL}_2(a)$ de la forme :

$$f(x) \ = \ f(a) \ + \ 0 \ + \gamma\,(x-a)^2 \ + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^2\big) \quad \text{avec } \gamma \neq 0$$

$\boxed{\text{alors}}$:

— si $\gamma > 0$, la fonction f possède un minimum local en a ;

— si $\gamma < 0$, la fonction f possède un maximum local en a.

26 **Corollaire direct.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

$\boxed{\text{Si}}$ f est deux fois dérivable sur I avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$,
$\boxed{\text{alors}}$:

— si $f''(a) > 0$, la fonction f possède un minimum local en a ;

— si $f''(a) < 0$, la fonction f possède un maximum local en a.

Recherche d'asymptotes

- **Exemple.** Étudions, au voisinage de $+\infty$, la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

  — On a $\dfrac{x^3}{x-1} \sim x^2$, d'où $f(x) \sim \sqrt{x^2} = x$ (on a $\sqrt{x^2} = x$ au voisinage de $+\infty$).
  Bref, $\boxed{f(x) \sim x}$.
  Cela donne en particulier $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

  — Précisons le comportement de $\frac{f(x)}{x}$.
  Pour $x > 1$, on a (toujours en utilisant $x = \sqrt{x^2}$) :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

  Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,t + \frac{3}{8}\,t^2 + \mathrm{o}(t^2)$$

  d'où au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

  Donc

$$f(x) = \underbrace{x + \frac{1}{2}}_{(1)} + \underbrace{\frac{3}{8}\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}_{(2)}.$$

  Dans la dernière relation, le terme (1) est affine, et le terme (2) tend vers 0 en $+\infty$.
  Plus précisément, on dispose de l'équivalent suivant au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{3}{8}\frac{1}{x}$$

  qui met en évidence qu'au voisinage de $+\infty$:

  — la courbe représentative de f se rapproche de la droite Δ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$; cette droite est donc une asymptote à la courbe ;

  — la courbe représentative de f est située (pour x assez grand) au-dessus de la droite Δ, car $\frac{3}{8}\frac{1}{x}$ est positif.

  — La droite Δ est appelée *asymptote oblique en* $+\infty$ au graphe de la fonction f.

  — La relation suivante :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

  est appelée *développement asymptotique* de f au voisinage de l'infini à la précision $\frac{1}{x}$.

- **Remarque importante sur cet exemple.** En fait, on peut faire tout d'un seul coup, en posant $t = \frac{1}{x}$ et en constatant que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, et bien t est lui au voisinage de 0.

  On fixe x très grand. On pose $t = \frac{1}{x}$. On a :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{t^3}}{\frac{1}{t}-1}} \overset{\text{WHY}}{=} \frac{1}{t}\,\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

  Ensuite, on réalise un DA de cet expression en t au voisinage de 0, puis on revient avec la variable x en $+\infty$.

V. Développements asymptotiques

Un développement **limité** au voisinage d'un $\boxed{\text{réel}}$ a peut être vu comme un développement suivant les puissance entières *positives* de $x-a$.
Parfois, il arrive que l'on obtienne un développement faisant intervenir une gamme de fonctions plus large que les fonctions puissances entières $x \mapsto x^k$ utilisées lors de développements limités. On dit que l'on a un développement **asymptotique** à la précision …

Exemples

- **Exemple 1.** La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ est définie sur $[0,+\infty[$.
  Admet-elle un DL_n en 0 pour $n \geqslant 1$?

  Malgré la réponse négative, on peut quand même dire des choses.
  On peut fournir l'égalité (d'où sort-elle ? La prouver)

  $$f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{3} + \mathrm{o}\left(x^{3/2}\right).$$

  C'est un DA de f en 0 à la précision $x^{3/2} = x\sqrt{x}$.

- **Exemple 2.** Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. On a vu qu'au voisinage de $+\infty$, on a

  $$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

  C'est un DA de f en $+\infty$ à la précision x^{-1}.

- **Exemple 3.** Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$.
  Comme au voisinage de 0, on a $\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}(x^5)$, on en déduit (WHY ?) :

  $$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

  C'est un DA de u_n à la précision n^{-2}.
  Ce DA précise un comportement local, ici de $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, par « approximations successives » :
  - le premier terme donne un équivalent $u_n \sim \frac{1}{n}$;
  - le deuxième terme, qui est négligeable devant le premier, précise la différence entre u_n et son équivalent : $u_n - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{3n^3}$
  - de même, le terme suivant précise encore les choses : $u_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} \sim \frac{1}{5n^5}$.

27 sol → 26 **Question.**
Soit $f : x \mapsto (\mathrm{e}\,x)^x$.
La fonction f possède-t-elle un développement limité en 0 ?
Donner un développement asymptotique de f en 0 à la précision $x^2 \ln^2 x$.

28 sol → 27 **Question.** Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln^2(1+x)}{\sin^3 x}}$.
La fonction f possède-t-elle un développement limité en 0 ?
Donner un développement asymptotique de f en 0 à la précision $x\sqrt{x}$.

Formule de Stirling

29 **Formule de Stirling (admise et hors programme de Sup).** On a

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

30 **Question.** Déterminer un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

Développement asymptotique d'une réciproque

Considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x^2)\ln(1+x)$.
Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc elle est nulle en 0 et $f'(0) = 1$.
Comme $f'(0) > 0$ et que f' est continue, on en déduit que f' est à valeurs strictement positives au voisinage de 0.
Donc f définit une bijection d'un intervalle de la forme $[-\alpha, \alpha]$ sur son image J, pour un certain réel $\alpha > 0$ et sa réciproque g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Par la formule de Taylor-Young, la fonction g admet donc un DL à tout ordre en 0.
Comme on a $g(0) = 0$ et $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$ (puisque les dérivées de deux bijections réciproques en les points correspondants sont inverses l'une de l'autre), le $\mathrm{DL}_3(0)$ de g est de la forme :

$$g(y) \;=\; y + a\,y^2 + b\,y^3 + \underset{y\to 0}{\mathrm{o}}(y^3)$$

Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

On peut alors calculer un DL de la composée $g \circ f$.
Sachant que $f(x) \sim x$, on a $\mathrm{o}\big(f(x)^3\big) = \mathrm{o}(x^3)$ et donc :

$$\begin{aligned} g\big(f(x)\big) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)\right) + a\left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)^2 + b\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &= x + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(b - a + \frac{4}{3}\right)x^3 + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

Puisque l'on a $g\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, on en déduit, par unicité du DL :

$$a - \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad b - a + \frac{4}{3} = 0.$$

Cela donne donc $a = \frac{1}{2}$ puis $b = a - \frac{4}{3} = -\frac{5}{6}$ et finalement :

$$g(y) \;=\; y + \frac{y^2}{2} - \frac{5}{6}y^3 + \mathrm{o}(y^3).$$

Analyse asymptotique

preuve et éléments de correction

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, par opérations.
Mais ce qui est intéressant, c'est le comportement au voisinage de 0.

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (WHY ?) et on a

$$f' : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Justification du WHY.
Ici, on peut voir que le théorème de la limite de la dérivée ne fournit aucune conclusion.
Il faut donc revenir à la définition et à l'étude du taux d'accroissement en 0.
On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Ainsi f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

• La fonction f n'est pas 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce n'est pas une évidence).

La fonction f' n'est pas continue en 0, ce qui prouve qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.
La limite du deuxième terme, à savoir $3x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, existe et est finie.
Mais la limite du premier terme, à savoir $-2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$, n'existe pas (WHY ?).

Ainsi, la limite $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Donc f' n'est pas continue en 0.

Justification du WHY.
Soit $\varphi : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la limite de φ en 0 existe.
Notons-la L (c'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).
Considérons la suite u définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$
On a

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \varphi(x) \xrightarrow[x \to 0]{} L \end{cases} \quad \text{d'où par composition } \varphi(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$$

Donc la suite $\big(\varphi(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite L.

Or un calcul de $\varphi(u_n)$ fournit :

$$\varphi(u_n) = \cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)^2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Ainsi, la suite $\big(\varphi(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
D'où la contradiction.

7

En deux étapes

— On commence par démontrer un cas particulier du lemme à savoir $a=0$ et $c_0=\cdots=c_n=0$.
Preuve du lemme. On suppose $\varphi'(x)=\mathrm{o}(x^n)$ et on veut montrer que $\varphi(x)=\varphi(0)+\mathrm{o}(x^{n+1})$.
On veut montrer que $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\mathrm{o}(x^n)$.
D'après le TAF, il existe $c_x\in\,]\overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{0,x}[$ tel que $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(c_x)$ avec $|c_x|\leqslant|x|$.
Comme $\varphi'(t)=\mathrm{o}(t^n)$, on a $\varphi'(c_x)=\mathrm{o}(c_x^n)$ (car $c_x\xrightarrow[x\to 0]{}0$).
On a $c_x=\mathrm{O}(x)$, d'où $c_x^n=\mathrm{O}(x^n)$. D'où $\varphi'(c_x)=\mathrm{o}(x^n)$.
À la main. On a $\frac{\varphi'(c_x)}{x^n}=\frac{\varphi'(c_x)}{c_x^n}\left(\frac{c_x}{x}\right)^n$. D'où $\frac{\varphi'(c_x)}{x^n}\xrightarrow[x\to 0]{}0$, c'est-à-dire $\varphi'(c_x)=\mathrm{o}(x^n)$.

— Revenons au cas général et reformulons l'énoncé « avec le paramétrage en h ».
Posons $\varphi: h\longmapsto f(a+h)-\left(f(a)+c_0h+c_1\dfrac{h^2}{2}+c_2\dfrac{h^3}{3}+\cdots+c_n\dfrac{h^{n+1}}{n+1}\right)$
Il s'agit de montrer que $\varphi(h)=\mathrm{o}(h^{n+1})$.
Cette fonction φ est dérivable. On a $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(h)\ =\ f'(a+h)-\left(c_0+c_1h+c_2h^2+\cdots+c_nh^n\right)$.
Par hypothèse, $\varphi'(h)=\mathrm{o}(h^n)$.
D'après le lemme, on en déduit que $\varphi(h)=\mathrm{o}(h^{n+1})$.

11

— La fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^x+\ln(1+x)$ est la somme de deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_3(0)$, donc admet un $\mathrm{DL}_3(0)$.
On a :
$$\mathrm{e}^x\ =\ 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)\quad\text{et}\quad \ln(1+x)\ =\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3).$$
Par somme :
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x+\ln(1+x)\ &=\ (1+0)+(1+1)x+\left(\tfrac12-\tfrac12\right)x^2+\left(\tfrac16+\tfrac13\right)x^3+\mathrm{o}(x^3)\\ &=\ 1+2x+\tfrac{x^3}{2}+\mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

— La fonction $x\longmapsto \frac{1}{1-x}-\mathrm{e}^x$ est une combinaison linéaire de deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_3(0)$, donc admet un $\mathrm{DL}_3(0)$.
On a
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3)\quad\text{et}\quad \mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3).$$
Par différence :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-\mathrm{e}^x\ &=\ (1-1)+(1-1)x+\left(1-\frac12\right)x^2+\left(1-\frac16\right)x^3+\mathrm{o}(x^3)\\ &=\ \frac12x^2+\frac56x^3+\mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

12

— La fonction f est le produit des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$, qui admettent des $\mathrm{DL}_3(0)$. Par produit, f admet donc un $\mathrm{DL}_3(0)$.

On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3).$$

Par produit :

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)$$

ce qui donne, en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x + x) + \left(\tfrac{x^2}{2} + x^2 + x^2\right) + \left(\tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^3}{2} + x^3 + x^3\right) + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 + 2x + \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{8}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

— On a

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{et} \quad (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathrm{o}(x^2).$$

Par produit :

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathrm{o}(x^2)\right)$$

ce qui donne, en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \left(\tfrac{1}{3} + 1\right)x + \left(-\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\right)x^2 + \mathrm{o}(x^2) \\ &= 1 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{13}{18}x^2 + \mathrm{o}(x^2). \end{aligned}$$

13

Prévision des ordres. Les premiers termes non nuls dans les développements limités en 0 des fonctions $x \mapsto 1 - \cos x$, $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto x - \sin x$ sont respectivement $\frac{x^2}{2}$, x et $\frac{x^3}{6}$, dont les exposants valent respectivement 2, 1 et 3.

On anticipe que pour obtenir le développement limité de f à l'ordre 7 souhaité, il suffit de faire des développements limités :

- à l'ordre 3 $(= 7 - 1 - 3)$ de $x \mapsto 1 - \cos x$;
- à l'ordre 2 $(= 7 - 2 - 3)$ de $x \mapsto e^x - 1$;
- à l'ordre 4 $(= 7 - 1 - 2)$ de $x \mapsto x - \sin x$.

Calcul effectif. Écrivons et factorisons les développements limités annoncés :

$$1 - \cos x = x^2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{o}(x)\right) \qquad e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right) \qquad x - \sin x = x^3\left(\frac{1}{6} + \mathrm{o}(x)\right)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6\left(\frac{1}{2} + \mathrm{o}(x)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right)\left(\frac{1}{6} + \mathrm{o}(x)\right) \\ &= x^6\left(\frac{1}{12} + \frac{x}{24} + \mathrm{o}(x)\right) \\ &= \frac{x^6}{12} + \frac{x^7}{24} + \mathrm{o}(x^7). \end{aligned}$$

Prévision des ordres.

Le premier terme non nul dans le développement limité en 0 de $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ est $\frac{x^3}{3}$, dont l'exposant vaut 3.

De même, le premier terme non nul dans le développement limité en 0 de la fonction $x\mapsto \cos x-1$ est $-\frac{x^2}{2}$, dont l'exposant vaut 2.

Écrivons donc :

$$f(x)=\left(\frac{x^3}{3}+\cdots+\mathrm{o}(x^p)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\cdots+\mathrm{o}(x^q)\right)=\cdots+\mathrm{o}(q+3)+\mathrm{o}(p+2).$$

Donc, pour obtenir le développement de f à l'ordre 6, il suffit d'avoir $p+2=q+3=6$, c'est-à-dire de faire les développements limités :

- de la fonction $x\mapsto \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ à l'ordre $p=6-2=4$,
- de la fonction $x\mapsto \cos x-1$ à l'ordre $q=6-3=3$.

Calcul effectif. On a :

$$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}(x^4)\quad\text{et}\quad \cos x-1=-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)$$

ce qui s'écrit, après factorisation :

$$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}=x^3\Big(\frac{1}{3}-\frac{x}{4}+\mathrm{o}(x)\Big)\quad\text{et}\quad \cos x-1=x^2\Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{o}(x)\Big)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}f(x)&=x^5\Big(\frac{1}{3}-\frac{x}{4}+\mathrm{o}(x)\Big)\Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{o}(x)\Big)\\&=x^5\Big(-\frac{1}{6}+\frac{x}{8}+\mathrm{o}(x)\Big)\\&=-\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{8}+\mathrm{o}(x^6).\end{aligned}$$

14

La fonction $x\mapsto \ln(1+x)$ tend vers 0 en 0, et possède un $\mathrm{DL}_3(0)$.

La fonction f possède donc un $\mathrm{DL}_3(0)$ qui a même partie régulière que celui de la fonction :

$$x\mapsto 1+\ln(1+x)+\ln(1+x)^2+\ln(1+x)^3.$$

On a :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)=x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)\right),$$

puis :

$$\ln(1+x)^2=x^2\big(1-x+\mathrm{o}(x)\big)=x^2-x^3+\mathrm{o}(x^3)\qquad\text{et}\qquad \ln(1+x)^3=x^3+\mathrm{o}(x^3).$$

d'où

$$\begin{aligned}f(x)&=1+x+\Big(-\tfrac{x^2}{2}+x^2\Big)+\Big(\tfrac{x^3}{3}-x^3+x^3\Big)+\mathrm{o}(x^3)\\&=1+x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

15

Le dénominateur $1+e^x$ tend vers 2 quand x tend vers 0.
Écrivons :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1+e^x}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\left(1-\frac{1+e^x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1-e^x}{2}\right)}.$$

Posons $u : x \mapsto \dfrac{1-e^x}{2}$ de sorte que

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-u(x)}.$$

On a $\begin{cases} u \text{ admet un } \mathrm{DL}_3(0) \\ u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \end{cases}$

Donc, d'après la proposition précédente, la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ de même partie régulière que celui de la fonction $1+u+u^2+u^3$.
On a

$$u(x) = -\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

Puis, après calculs :

$$u(x)^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+o(x^3) \qquad \text{et} \qquad u(x)^3 = -\frac{x^3}{8}+o(x^3).$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1-u(x)} &= 1-\tfrac{x}{2}+\left(-\tfrac{x^2}{4}+\tfrac{x^2}{4}\right)+\left(-\tfrac{x^3}{12}+\tfrac{x^3}{4}-\tfrac{x^3}{8}\right)+o(x^3) \\ &= 1-\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^3}{24}+o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+o(x^3).$$

• Comme le premier terme non nul dans le développement limité en 0 de sh est de degré 1, on peut se contenter d'effectuer un développement de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ à l'ordre 4 $(=5-1)$.

On a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{1-\left(1-\mathrm{ch}(x)\right)}$,
Posons $u : x \mapsto 1-\mathrm{ch}\,x$ de sorte que :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{1-u(x)}$$

On a $\begin{cases} u \text{ admet un } \mathrm{DL}_4(0) \\ u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \end{cases}$

Donc, d'après la proposition précédente, la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ admet un $\mathrm{DL}_4(0)$ de même partie régulière que celui de la fonction $1+u+u^2+u^3+u^4$.
Mais ici, comme

$$u(x) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4) = O(x^2)$$

on en déduit que $u(x)^2 = O(x^4)$ et il suffit donc de s'arrêter à l'ordre 2.
On a précisément $u(x)^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^4)$, on obtient :

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1+u(x)+u(x)^2+o\left(u(x)^2\right) = 1-\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)x^4+o(x^4).$$

En utilisant le développement limité à l'ordre 5 en 0 de sh, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x) \times \tfrac{1}{\operatorname{ch}(x)} &= \left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\right)\left(1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\right) \\
&= x + \left(-\tfrac{x^3}{2} + \tfrac{x^3}{6}\right) + \left(\tfrac{5x^5}{24} - \tfrac{x^5}{12} + \tfrac{x^5}{120}\right) + \mathrm{o}(x^5) \\
&= x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^5).
\end{aligned}$$

Remarque. Pour obtenir ce développement limité de th, on aurait pu remarquer que $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$ et, en partant de l'équivalent $\operatorname{th}^2 x \underset{x \to 0}{\sim} x^2$, procéder par primitivation pour obtenir un développement limité d'abord à l'ordre 3 et ensuite à l'ordre 5.

17

On cherche, s'il existe, le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
Partons des développements limités des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ aux ordres 4 et 3 respectivement (ce choix des ordres sera expliqué dans la remarque située après cet exemple).
On a :

$$\mathrm{e}^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

ou, en factorisant par le terme prépondérant :

$$\mathrm{e}^x - 1 - x = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right).$$

Cela donne l'égalité suivante :

$$f(x) = x \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)}\cdot$$

Après calculs, on obtient :

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)$$

puis, en calculant le produit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{x}{6} + \tfrac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)\right) \\
&= x\left(\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{x}{4} + \tfrac{x}{6}\right) + \left(-\tfrac{x^2}{24} + \tfrac{x^2}{12} + \tfrac{x^2}{24}\right) + \mathrm{o}(x^2)\right) \\
&= x\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5x}{12} + \tfrac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)\right) = \tfrac{x}{2} + \tfrac{5x^2}{12} + \tfrac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^3),
\end{aligned}$$

ce qui est le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
Remarque. Dans cet exemple, pour savoir quels ordres choisir pour les développements limités des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$, il faut essayer d'anticiper le calcul.
La factorisation par les termes prépondérants donne :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots\right)}{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)} = x \times \underbrace{\left[\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots\right)}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \cdots\right)}\right]}_{g(x)}\cdot$$

Pour obtenir le développement à l'ordre 3 de f souhaité, il faut donc effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la quantité $g(x)$ entre crochets. Cela nécessite un développement limité à l'ordre 2 du numérateur et du dénominateur de $g(x)$. Or, ceux-ci proviennent respectivement :

- de la factorisation par x^2 du développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$;
- de la factorisation par x du développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Cela explique les choix d'un ordre 4 pour le développement limité de $x \mapsto e^x - 1 - x$ et d'un ordre 3 pour le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$.
Une mauvaise anticipation du calcul, et donc un choix un peu farfelu des ordres auxquels effectuer les développements limités, peut mener à deux situations.

— **Première situation.** Les ordres n'ont pas été choisis assez grands, et ne permettent pas d'obtenir la précision finale souhaitée. Dans ce cas, il faut recommencer en les choisissant mieux.

— **Deuxième situation.** Les ordres ont été choisis trop grands. Dans ce cas, on voit apparaître, lors du calcul, des termes inutiles qui disparaissent. Cette situation ne présente donc pas de gravité, si ce n'est qu'il est toujours dommage de faire des calculs plus compliqués que nécessaire !

18

Afin de pouvoir tirer parti d'un DL de $\ln(1+t)$, il est nécessaire de substituer à t une quantité qui tend vers 0. Ici, il s'agit de transformer l'expression $\ln(1+e^x)$ de façon à voir apparaître une quantité de la forme $\ln\big(1+h(x)\big)$ avec $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Pour cela, écrivons :

$$\ln(1+e^x) \;=\; \ln\left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{e^x}{2}\right)\right) \;=\; \ln 2 + \ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right).$$

En posant $h : x \mapsto \frac{e^x-1}{2}$, on a donc :

$$\ln(1+e^x) \;=\; \ln 2 \;+\; \ln\big(1+h(x)\big).$$

On a $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (plus précisément, on a $h(x) \sim \frac{x}{2}$).
On peut donc partir du $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1+t)$:

$$(\star) \qquad \ln\big(1+h(x)\big) \;=\; h(x) - \frac{1}{2}h(x)^2 + \frac{1}{3}h(x)^3 + o\big(h(x)^3\big).$$

Examinons chaque terme. Il y a 4 termes.
Commençons par les deux derniers.

- On a $h(x) \sim \frac{x}{2} = O(x)$, donc $h(x)^3 = O(x^3)$, donc le $o\big(h(x)^3\big)$ est un $o(x^3)$.
- On a $h(x) \sim \frac{x}{2}$, d'où $h(x)^3 \sim \frac{x^3}{8}$. D'où $h(x)^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$.
- Puis, on a

$$h(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \qquad \text{et} \qquad h(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

La relation $(\star)$ devient alors :

$$\ln\big(1+h(x)\big) \;=\; \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3).$$

Le développement limité cherché est finalement :

$$\ln(1+e^x) \;=\; \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3).$$

19

Rappelons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de exp :

$$e^t \;=\; 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Pour $x \in [-1,+\infty[$, on a, en notant h la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}-1$:

$$\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e}^{1+(\sqrt{1+x}-1)} = \mathrm{e}\times \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}-1} = \mathrm{e}\times \mathrm{e}^{h(x)}.$$

On a $h(x) = \sqrt{1+x}-1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, d'où

$$\mathrm{e}^{h(x)} = 1 + h(x) + \frac{h(x)^2}{2} + \mathrm{o}\big(h(x)^2\big).$$

De plus, on a :

$$h(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{et} \quad h(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{o}\big(h(x)^2\big) = \mathrm{o}(x^2).$$

On en déduit, après simplification, le développement limité cherché :

$$\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}} = \mathrm{e}\times \mathrm{e}^{h(x)} = \mathrm{e}\times\left(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x^2)\right) = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}x}{2} + \mathrm{o}(x^2).$$

20

On a déjà trouvé un équivalent du numérateur :

$$\sin(2x) - \mathrm{sh}(2x) \sim -\frac{8}{3}x^3.$$

Cherchons un équivalent du dénominateur. Pour cela, commençons par calculer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto 2x - \sin x - \tan x$:

$$\begin{aligned} 2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \sim -\frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

On en déduit, par produit et quotient d'équivalents :

$$\frac{\sin(2x) - \mathrm{sh}(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2} \sim \frac{-\frac{8}{3}x^3}{\left(-\frac{1}{6}x^3\right)^2} \sim -\frac{96}{x^3}.$$

21

Pour le dénominateur, on a $\sin^5 x \sim x^5$.
Pour le numérateur, rappelons les DL :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4).$$

On en déduit que $3\sin x - x\cos x - 2x \sim -\frac{1}{60}x^5$, puis :

$$\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{\sin^5 x} \sim -\frac{\frac{1}{60}x^5}{x^5} \sim -\frac{1}{60}.$$

La fonction étudiée possède donc une limite en 0, qui vaut $-\frac{1}{60}$.

22

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}} = f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } f : x \mapsto e^x - \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Après calculs, on obtient le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f :

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

On en déduit $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$, puis $u_n \sim \frac{3}{2n^2}$.

23

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ admet le $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Au point d'abscisse 0, le graphe est donc tangent à la droite d'équation :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$$

et, au voisinage de 0, la quantité :

$$f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) \sim \frac{1}{48}x^3$$

est positive à droite et négative à gauche. Le graphe traverse donc la tangente : il s'agit d'un point d'inflexion.

27

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc au voisinage de 0.
On a

$$\forall x > 0, \quad f(x) = e^x\, x^x = e^x\, e^{x\ln x}.$$

Écrivons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de exp :

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2).$$

En remplaçant t par $x\ln x$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on obtient :

$$\mathrm{e}^{x\ln x} \;=\; 1 + x\ln x + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + \mathrm{o}\big(x^2\ln^2 x\big).$$

On a ainsi :

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + x\ln x + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + \mathrm{o}\big(x^2\ln^2 x\big)\right).$$

En développant le produit, on constate que, parmi les termes en « o » qui apparaissent :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{o}(x^2) & \mathrm{o}(x^3\ln x) & \mathrm{o}(x^4\ln^2 x) & \text{qui proviennent du } \mathrm{o}(x^2) \text{ du premier facteur} \\ \mathrm{o}(x^2\ln^2 x) & \mathrm{o}(x^3\ln^2 x) & \mathrm{o}(x^4\ln^2 x) & \text{qui proviennent du } \mathrm{o}(x^2\ln^2 x) \text{ du deuxième facteur} \end{array}$$

c'est le terme $\mathrm{o}\big(x^2\ln^2 x\big)$ qui « limite » la précision du calcul (tous les autres termes en « o », étant négligeables devant lui, n'ont donc pas à être écrits dans le calcul).
Après avoir développé, en écrivant les termes dans l'ordre de précision croissante, on obtient le développement suivant pour f :

$$f(x) \;=\; 1 + x\ln x + x + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + \mathrm{o}\big(x^2\ln^2 x\big).$$

Du développement asymptotique, on tire les informations suivantes, qu'il est par ailleurs possible de retrouver directement à partir de l'expression de f :

— la fonction f tend vers 1 en 0 et peut donc être prolongée par continuité ;

— en appelant encore f le prolongement ainsi obtenu, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x + o(\ln x) \sim \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

ce qui se traduit par l'existence d'une tangente verticale à la courbe en 0.

28

Remarquons déjà que la fonction f est définie sur l'ensemble :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1+x>0 \text{ et } \sin x>0\right\}$$

et est donc définie au voisinage de 0 (elle est par exemple bien définie sur l'intervalle $]0,\pi[$), ce qui permet d'en faire l'étude en 0.

1. On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc :

$$\frac{\ln^2(1+x)}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}.$$

Il en résulte que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, et donc que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.
La fonction f, ne possédant pas de limite finie en 0, n'admet donc pas de développement limité en 0.

2. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc :

$$\ln^2(1+x) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad \sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

On a donc, en faisant le quotient :

$$\begin{aligned}\frac{\ln^2(1+x)}{\sin^3 x} &= \frac{1}{x} \times \frac{1-x+\frac{11}{12}x^2+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\ &= \frac{1}{x} \times \left(1-x+\frac{11}{12}x^2+o(x^2)\right) \times \left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &= \frac{1}{x} \times \left(1-x+\frac{17}{12}x^2+o(x^2)\right).\end{aligned}$$

On obtient :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{1-x+\frac{17}{12}x^2+o(x^2)}.$$

Après calculs, on obtient :

$$\sqrt{1-x+\frac{17}{12}x^2+o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{7}{12}x^2 + o(x^2),$$

puis finalement :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{7}{12}x\sqrt{x} + o\big(x\sqrt{x}\big).$$