



Analyse

asymptotique

exercices

101 De tête

1. Est-ce que $\frac{1}{x}$ admet un $DL_n(0)$?
2. Donner le $DL_n(3)$ de $\frac{1}{x}$.

102 Parité et développement limité

Une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ vérifie-t-elle $f(x) = 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$?

103 Deux développements limités

1. Donner le $DL_3(0)$ de $(1+x)^{1/x}$.
2. Donner le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

104 Sans calcul !

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$. *Sans calcul*, déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

105 Un classique

Soit $a, b > 0$. Déterminer le $DL_1(0)$ puis un équivalent de $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

106 Intégration d'un développement limité

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3} + x}{1 + x\sqrt{3}}$.

En commençant par calculer f' , déterminer le $DL_4(0)$ de f .

107 Développement limité d'une fonction réciproque (1)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x \operatorname{ch} x$

1. Montrer que f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
2. Montrer que f admet un $DL_5(0)$ et le déterminer.
3. Montrer que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
4. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme :

$$f^{-1}(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5),$$

avec $c_1, c_3, c_5 \in \mathbb{R}$. Puis déterminer les c_i .

108 Développement limité d'une fonction réciproque (2) et (3)

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto xe^{x^2}$

- (a) Montrer que f est une bijection.
- (b) Montrer que sa réciproque f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5).$$

- (c) En utilisant l'égalité $f^{-1} \circ f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer a, b et c .

2. Suivre le même schéma pour obtenir un $DL_3(0)$ de la réciproque de $x \mapsto 2x + \sin x$.

109**La fonction tangente**

Montrer que la fonction \tan admet un développement limité à tout ordre en 0.

On pose :

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

Calculer a_n en fonction de a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

110**IPP ?**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$. Montrer que : $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

111**Astucieux**

Donner le $DL_{12}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\right)$.

112**Ajustement de paramètres**

1. Peut-on trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \sin x + b x \cos x = x + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$?
2. Parmi les fonctions $(f_{a,b})_{a,b \in \mathbb{R}}$ définies par $f_{a,b} : x \mapsto \sin x - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}$, y en a-t-il une qui soit négligeable (en 0) devant toutes les autres ?
3. Peut-on trouver deux réels a et b tels qu'il existe une constante C non nulle vérifiant

$$\frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} Cx ?$$

113**Étude locale**

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\text{Arcsin } x}$.

(Est-elle prolongeable par continuité ? le prolongement est-il dérivable ? que dire de la position relative du graphe et de sa tangente ?)

114**Asymptotes**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

Étudier les asymptotes du graphe de f , et la position relative du graphe et de ses asymptotes.

115**Étudier f en 0 et en $\pm\infty$ où ...**

... où $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 + x^2}{x}$.

116**Retour chez les polynômes**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

1. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\bar{C}$.
3. En déduire qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

117**Ça se corse**

1. Déterminer un équivalent de $x^{\sin x} - (\sin x)^x$ au voisinage de 0.
2. Déterminer un équivalent de $\text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)$ au voisinage de 0.

Développements asymptotiques

118 Une suite implicite (1)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution dans \mathbb{R}_+^* , notée x_n .
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et la déterminer. Puis donner un équivalent de x_n .
3. Montrer que $x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
4. Question très difficile. Déterminer un développement asymptotique à 4 termes.

119 Une suite implicite (2)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , notée x_n .
2. Déterminer la limite puis un équivalent de x_n .
3. Donner un développement asymptotique à 3 termes de x_n .

120 Une suite implicite (3)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x_n = x_n$.
2. Montrer qu'il existe a, b, c et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.)

121 Une suite récurrente

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

Montrer que $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

122 Approximations de e

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang, par exemple en étudiant le quotient de deux termes successifs.
3. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n .
4. Retrouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Retour chez les suites

123 Une moyenne?

Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$.

Trouver une suite (w_n) telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

124 Troisième question, pas facile!

1. Trouver deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ sans que $u_n = o(v_n)$.
2. Trouver deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ sans que $v_n = O(u_n)$.
3. Trouver deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ sans que $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Faire ses gammes

125 Calcul de développements limités

- | | |
|---|---|
| (i) $DL_3(0)$ de $e^x \sqrt[3]{1+x}$ (ii) $DL_3(0)$ de $\sin(x) \ln(1+x)$ (iii) $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+\sin x}$ (iv) $DL_3(0)$ de $(e^x - 1) \sin x$ (v) $DL_2(0)$ de $\frac{x}{e^x - 1}$ (vi) $DL_2(0)$ de $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (vii) $DL_8(0)$ de $(\sin x)^4$ (viii) $DL_6(0)$ de $\tan x$ (ix) $DL_4(0)$ de $\frac{xe^{-x}}{2x+1}$ | (x) $DL_3(0)$ de $(\cos x)^{1/x}$ (xi) $DL_{100}(2)$ de x^4 (xii) $DL_2(1)$ de \sqrt{x} (xiii) $DL_2(1)$ de $\frac{1}{1+x}$ (xiv) $DL_3(1)$ de e^x (xv) $DL_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $\sin(x) \cos(3x)$ (xvi) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\sqrt{\tan x}$ (xvii) $DL_3(1)$ de $\frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ |
|---|---|

126 Calcul d'équivalents

- | | |
|--|--|
| (i) $[x]$ (en $+\infty$) (ii) $\frac{x^4 + 3x^2 - x + 2}{2x^3 - x}$ (en 0 et en $+\infty$) (iii) $\ln(1+x^2) - \sin(x^2) + 2 \cos^2(x)$ (en $+\infty$) (iv) $\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$ (en 1) (v) $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x}$ (en 0 et en $+\infty$) (vi) $1 + e^{e^x} - \text{Arctan } x$ (en $-\infty$) (vii) $\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$ (en $+\infty$) (viii) $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (en π) | (ix) $\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ (en $+\infty$) (x) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ (en $+\infty$) (xi) $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1$ (en $+\infty$) (xii) $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$ (en $+\infty$) (xiii) $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ (en $+\infty$) (xiv) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ (en 0) (xv) $\tan x - \sin x$ (en 0) (xvi) $\ln(1 + \sin x)$ (en 0) (xvii) $\ln(\ln(1+x))$ (en 0) (xviii) $\ln(\cos x)$ (en $\pi/2$) |
|--|--|

127 Calcul d'équivalents de suites

- | | | |
|--|--|---|
| (i) $\frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1}$ (ii) $\frac{\ln n + n + 1}{3n^2 + 2n + 1}$ (iii) $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)$ (iv) $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (v) $\sin\left(\sin \frac{\pi}{n^2}\right)$ | (vi) $\frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\tan \frac{\pi}{n}}$ (vii) $\ln(n+2) - \ln(n+1)$ (viii) $(2n + \ln n^2)e^{-(n+1)}$ (ix) $\frac{\ln(n^2 + 1)}{n+1}$ (x) $\frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}}$ | (xi) $\frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{5(\ln n)^3 - 2n^2}$ (xii) $\frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$ (xiii) $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$ (xiv) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ (xv) $\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n-1)}$ |
|--|--|---|

128 Calcul de limites

- | | |
|---|---|
| (i) $\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\tan x - x}$ (en 0) (ii) $\frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x-1)}$ (en 1) (iii) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}$ (en 0); | (iv) $\frac{x - \text{Arctan } x}{\sin^3 x}$ (en 0) (v) $(\cos x)^{\ln x }$ (en 0) (vi) $\frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2}$ (en 1) |
|---|---|

Analyse
asymptotique
corrigés

Non, comme le montre l'exemple de $f : x \mapsto 1 + x^2 + x^2|x|$. En revanche, c'est le cas quand la fonction admet un $DL_3(0)$ (ce qui contient le cas où f est trois fois dérivable), comme l'affirme le cours.

1. $e \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3) \right]$.

2. On a

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$$

donc $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + \frac{21}{1024}x^3 + o(x^3) \right]$.

$$DL_1(0) \text{ de } \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right)$$

La fonction n'est pas définie en 0.

On ne peut pas invoquer TY pour dire qu'un DL existe.

En revanche $x \mapsto \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)$ est définie sur \mathbb{R} tout entier et donc admet un DL(0) à tout ordre

Soit $x \in \mathbb{R}$ (au voisinage de 0 suffit).

On a :

$$\ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) = \ln(1 + h(x)) \quad \text{où } h(x) = \frac{a^x + b^x}{2} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Avant de continuer les calculs, essayons de prévoir les ordres des DL.

Comme on veut un DL_1 et que l'on voit de la division par x , on veut donc un DL_2 de $\ln(1+h(x))$.

Peut-on donner un équivalent ou un ordre de grandeur de $h(x)$? Par exemple, si on avait $h(x) = O(x^2)$ un DL_1 du logarithme suffirait.

Ici, on a en fait $h(x) = O(x^2)$, donc il faut écrire un DL_2 du logarithme. justification + tard dans le DL de $h(x)$

Revenons. Pour x au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+h(x)) = h(x) - \frac{1}{2}h(x)^2 + o_{x \rightarrow 0}(h(x)^2)$$

• Reste à déterminer un DL₂ de $h(x)$.

$$\text{On a } h(x) = \frac{a^x + b^x}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{x \ln a} + e^{x \ln b} \right) - 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \ln a \cdot x + \frac{1}{2}(\ln a)^2 x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ + \frac{1}{2} \left(1 + \ln b \cdot x + \frac{1}{2}(\ln b)^2 x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ - 1$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\ln a + \ln b}{2} \right)}_{\ln \sqrt{ab}} x + \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4} x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

• Revenons à $\ln(1+h(x))$.

$$\ln(1+h(x)) = \ln \sqrt{ab} x + \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4} x^2$$

$$- \frac{1}{2} \left((\ln \sqrt{ab})^2 x^2 \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) = \alpha x + \beta x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\alpha = \ln \sqrt{ab}$$

$$\beta = \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} (\ln(ab))^2$$

$$= \dots - \frac{1}{8} \left((\ln a)^2 + 2 \ln a \ln b + (\ln b)^2 \right)$$

$$= \frac{(\ln a)^2 - 2 \ln a \ln b + (\ln b)^2}{8} \quad (\text{WHY})$$

$$= \frac{(\ln a - \ln b)^2}{8} = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

• Divisons par x :

$$\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) = \alpha + \beta x + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

• Appliquons l'exponentielle à cette égalité.

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right) &= \exp \left(\alpha + \beta x + o(x)_{x \rightarrow 0} \right) \\ &= e^\alpha e^{\beta x + o(x)} \\ &= \underbrace{e^\alpha}_{\sqrt{ab}} \left(1 + \beta x + o(x) \right) \quad \text{WHY} \end{aligned}$$

BILAN : le DL₁(0) de $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ est

$$\sqrt{ab} + \frac{1}{8} \sqrt{ab} \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 x + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

On a $f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{3}x + x^2}$ dont un $DL_3(0)$ est

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{3}x + 2x^2 - \sqrt{3}x^3 + o(x^3) \right)$$

Comme $f(0) = \text{Arctan } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, on obtient par primitivation le $DL_4(0)$:

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{3}x^4}{8} + o(x^4).$$

$$f(x) = x \operatorname{ch}(x) = x \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5).$$

On a $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ donc en composant les développements limités, on a

$$f^{-1}(f(x)) = c_1 f(x) + c_3 f(x)^3 + c_5 f(x)^5 + o(f(x)^5).$$

Or, d'après la question 2., $f(x)^2 = x^2 + x^4 + o(x^5)$, $f(x)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$ et $f(x)^5 = x^5 + o(x^5)$.

On obtient finalement que

$$f^{-1}(f(x)) = c_1 \left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 \right) + c_3 \left(x^3 + \frac{3}{2}x^5 \right) + c_5 x^5 + o(x^5),$$

c'est-à-dire

$$f^{-1}(f(x)) = c_1 x + \left(\frac{c_1}{2} + c_3 \right) x^3 + \left(\frac{c_1}{24} + \frac{3}{2}c_3 + c_5 \right) x^5 + o(x^5).$$

Puisque $f^{-1} \circ f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$ et par unicité du développement limité de $f^{-1} \circ f$, on déduit de la question précédente que

$$c_1 = 1, \quad \frac{c_1}{2} + c_3 = 0, \quad \frac{c_1}{24} + \frac{3}{2}c_3 + c_5 = 0.$$

Ainsi,

$$c_1 = 1, \quad c_3 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c_5 = \frac{17}{24},$$

donc

$$f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{24}x^5 + o(x^5).$$

1. (a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ par opérations, donc dérivable (et donc continue).
 La dérivée de f est $(2x^2 + 1)e^{x^2}$, qui est strictement positive, donc f est strictement croissante.
 Par ailleurs, on voit directement que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$.
 Le théorème de la bijection monotone entraîne alors que f est une bijection.
- (b) La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ et bijective. Par ailleurs, sa dérivée est partout > 0 , donc elle ne s'annule pas. Le critère de dérivabilité des fonctions réciproques (dans sa version \mathcal{C}^∞) entraîne alors que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ .
 La fonction f^{-1} est *a fortiori* de classe \mathcal{C}^5 . D'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un $\text{DL}_5(0)$: on peut trouver $a_0, a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5).$$

Par ailleurs, la fonction f est impaire, donc f^{-1} aussi.

On en déduit $a_0 = a_2 = a_4 = 0$, et, en posant $a = a_1$, $b = a_3$ et $c = a_5$, on obtient le développement limité voulu.

- (c) Commençons par calculer un $\text{DL}_5(0)$ de f .

On a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \quad \text{car} \quad \begin{cases} e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o_{u \rightarrow 0}(u^2) \\ x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{cases}$$

donc $x e^{x^2} = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$.

On en déduit un $\text{DL}_5(0)$ de $\text{id}_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}\left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)\right) \\ &= a\left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)\right) + b\left(x + x^3 + o(x^3)\right)^3 + c\left(x + o(x)\right)^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\text{car} \quad \begin{cases} f^{-1}(u) = au + bu^3 + cu^5 + o_{u \rightarrow 0}(u^5) \\ x + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ (x + o(x))^5 = O(x^5) \end{cases}$$

Développons les deux puissances.

- Quand on va développer $(x + x^3 + o(x^3))^3$, on va bien obtenir une incertitude en $o(x^5)$: en effet, pour obtenir le plus grand terme d'incertitude possible lors du développement de

$$(x + x^3 + o(x^3))^3 = (x + x^3 + o(x^3)) \times (x + x^3 + o(x^3)) \times (x + x^3 + o(x^3)),$$

on va « piocher » dans une des parenthèses un terme d'incertitude et, dans les deux autres, prendre le plus grand terme à notre disposition, à savoir x , pour un « total » de $x \times x \times o(x^3) = o(x^5)$. On va même obtenir ce terme trois fois, car il y a trois manières de choisir dans quelle parenthèse on pioche tel ou tel terme.

On obtient donc

$$(x + x^3 + o(x^3))^3 = x^3 + \underbrace{3x^5}_{3 \times x^2 \times x^3} + o(x^5),$$

les autres termes étant soit des termes significatifs « phagocytés » par le terme d'incertitude (à savoir $3 \times x \times (x^3)^2$ et $(x^3)^3$), soit eux-mêmes des termes d'incertitude.

- Avec essentiellement le même raisonnement (plus simple ici, car il n'y a pratiquement que des termes d'incertitude), on obtient $(x + o(x))^5 = x^5 + o(x^5)$.

On peut alors reprendre le calcul (en regroupant tous les termes d'incertitude) : on a

$$\begin{aligned}x &= a \left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \right) + b (x + x^3 + o(x^3))^3 + c(x + o(x))^5 + o(x^5) \\&= a \left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 \right) + b (x^3 + 3x^5) + cx^5 + o(x^5) \\&= \begin{pmatrix} ax + ax^3 + \frac{a}{2}x^5 \\ + bx^3 + 3bx^5 \\ + cx^5 \end{pmatrix} + o(x^5) \\&= ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{a}{2} + 3b + c \right) x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité (et le fait évident que $x = x + o(x^5)$), on obtient les égalités

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a + b & = 0 \\ \frac{a}{2} + 3b + c & = 0. \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution, à savoir $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi le $DL_5(0)$: $f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)$.

2. En procédant de la même façon, on obtient $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{486}x^3 + o(x^3)$.

On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} &= e^x - \frac{x^{12}}{12!} + o(x^{12}) \\ &= e^x \left(1 - \frac{x^{12}}{12!} e^{-x} + o(x^{12}) e^{-x}\right)\end{aligned}$$

$$\ln \left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} \right) = \ln(e^x) + \ln \left(1 - \frac{x^{12}}{12!} e^{-x} + o(x^{12}) e^{-x} \right)$$

Comme $\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, et $-\frac{x^{12}}{12!} e^{-x} + o(x^{12}) e^{-x} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\ln \left(1 - \frac{x^{12}}{12!} e^{-x} + o(x^{12}) e^{-x} \right) &\sim -\frac{x^{12}}{12!} e^{-x} + o(x^{12}) e^{-x} \\ &\sim -\frac{x^{12}}{12!} e^{-x} \\ &\sim -\frac{x^{12}}{12!}\end{aligned}$$

1. Oui, prendre $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Pour cela, effectuer un DL(0) à un ordre bien choisi de $a \sin x + b x \cos x$.

2. On a

$$f_{a,b}(x) = \left(-a + b - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} + ab - b^2\right)x^5 + o(x^5)$$

On a l'équivalence (WHY, ce n'est pas totalement évident, mais c'est intuitif) :

$$f_{a,b}(x) = o(x^5) \iff \begin{cases} -a + b - \frac{1}{6} = 0 \\ ab - b^2 + \frac{1}{120} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si $a = -\frac{7}{60}$ et $b = \frac{1}{20}$.

Cette fonction est donc négligeable devant toutes les autres.

3. On trouve le développement asymptotique

$$(1 + a + b)\frac{1}{x} + \frac{a - b}{2} + \frac{b - a}{12}x + o(x)$$

qui est du type

$$K\frac{1}{x} + K' + K''x + o(x)$$

Pour que la fonction soit $\underset{x \rightarrow 0}{\sim} Cx$, il faut et il suffit d'avoir $K = 0$, $K' = 0$ et $K'' \neq 0$.

Comme $K' = \frac{1}{2}(a - b)$ et $K'' = \frac{-1}{12}(a - b)$, on ne peut pas avoir à la fois K' nul et K'' non nul.

La fonction Arcsin est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1, 1]$, donc admet un DL(0) à tout ordre en vertu du théorème de Taylor-Young.

Déterminons ce développement limité à l'ordre 5 (attendre un peu pour comprendre l'ordre choisi).

Pour cela, utilisons la technique de primitivation.

Déterminons le DL₂(0) de $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-t}} &= (1-t)^{-1/2} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-t) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-t)^2 + o(t^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

Comme $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

Par primitivation, on a

$$\text{Arcsin } x = \underbrace{\text{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\text{Arcsin } x - x}{x \text{ Arcsin } x} \\ &= \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)}{x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^6 + o(x^6)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^3 + o(x^3)}{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)} \quad \text{en simplifiant par } x^2 \\ &= \left(\frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^3 + o(x^3)\right) \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 + o(u(x)^2)\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^3 + o(x^3)\right) \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 + o(u(x)^2)\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^3 + o(x^3)\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4\right) + \frac{1}{36}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{6}x + \frac{17}{360}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{avec } u(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4) \\ \text{donc } u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{avec } u(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4) \\ \text{d'où } \begin{cases} u(x) \sim \frac{1}{6}x^2 \\ u(x)^2 = \frac{1}{36}x^4 + o(x^4) \\ \text{et } u(x)^2 = O(x^4) \end{cases} \end{cases}$$

Par troncature, on obtient le DL₀(0) de f , et on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement est :

$$\tilde{f}: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors \tilde{f} possède le DL₃(0) :

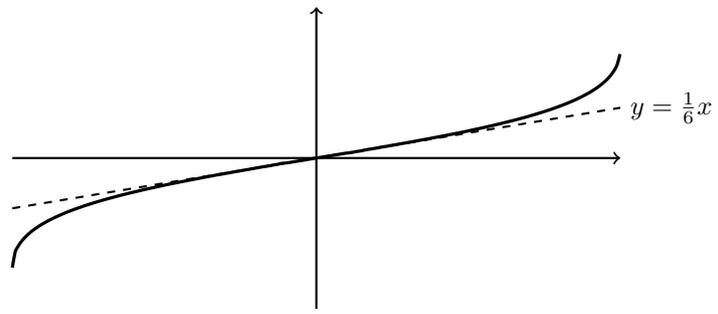
$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{360}x^3 + o(x^3).$$

Ce développement limité (ou plutôt sa troncature à l'ordre 1) montre alors que \tilde{f} est dérivable en 0, de dérivée $\frac{1}{6}$.

Par ailleurs,

$$\tilde{f}(x) - \frac{1}{6}x \sim \frac{17}{360}x^3$$

Comme on connaît le signe de x^3 au voisinage de 0, on en déduit que le graphe de \tilde{f} est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0^+ et en-dessous au voisinage de 0^- .



- Déjà, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ (pas de forme indéterminée), donc le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Il n'y a pas grand chose d'autre à déterminer...
- Par ailleurs, on va effectuer un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. Le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si f admet le développement asymptotique

$$f(x) = ax + b + o_{x \rightarrow +\infty}(1).$$

Plus précisément, le « terme d'après » dans ce développement asymptotique (ou plutôt son signe) donnera la position du graphe de f par rapport à son asymptote.

On a, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)e^{1/x} \\ &= (x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) && \text{car } \begin{cases} e^u = 1 + u + o_{u \rightarrow 0}(u) \\ 1/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} x+1 \\ +1 \end{pmatrix} + o(1) \\ &= x + 2 + o(1). \end{aligned}$$

Cela montre que $y = x + 2$ est une asymptote oblique du graphe de f . Poussons le développement à un ordre de plus pour déterminer la position relative du graphe et de l'asymptote.

On a, quand $x \rightarrow +\infty$,

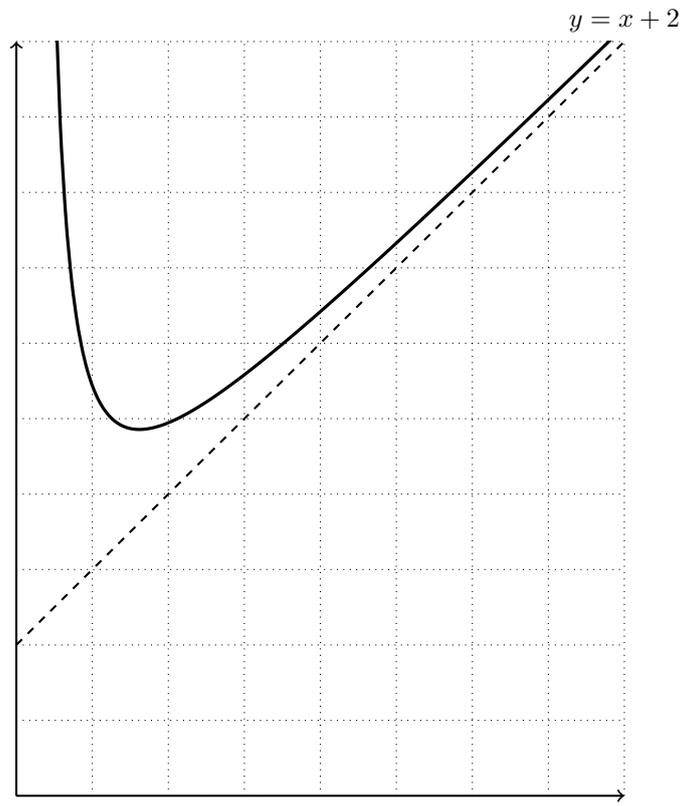
$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)e^{1/x} \\ &= (x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) && \text{car } \begin{cases} e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u^2) \\ 1/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} x+1 + \frac{1}{2x} \\ +1 + \frac{1}{x} \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Cela démontre que

$$f(x) - (x+2) = \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2x}.$$

Comme deux fonctions équivalentes ont localement le même signe, on en déduit que la différence $f(x) - (x+2)$ est positive au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.



1. • Comme P est non constant, P est de degré $n \geq 1$.

Notons c son coefficient dominant. Alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} cx^n$

$$\text{Or } cx^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

L'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ implique que P est positif au voisinage de $+\infty$, donc la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$, donc $c > 0$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine de P . Notons m sa multiplicité.

Ainsi, P s'écrit $(X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

On a donc $P(x) \underset{a}{\sim} \lambda(x - a)^m$ où $\lambda = Q(a)$.

Supposons par l'absurde que m est impair.

Alors $(x - a)^m$ change de signe au voisinage de a , donc $P(x)$ aussi (par partage de signe).

Or $P(x)$ est positif pour x au voisinage de a .

D'où la contradiction.

Donc m est pair.

Bilan. Les racines de P sont de multiplicité paire.

2. Considérons la décomposition en facteurs irréductibles de P :

$$P = c \prod_{i=1}^s (X - x_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^t R_j^{q_j}$$

où les x_i sont les racines réelles de P (elles sont de multiplicité paire!),

et les R_j sont des polynômes du second degré à discriminant négatif.

Les racines de ces polynômes sont des nombres complexes conjugués z_j, \bar{z}_j .

En particulier, on a

$$R_j = (X - z_j) \overline{(X - z_j)}.$$

Posons donc

$$C = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^s (X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^t (X - z_j)^{q_j}.$$

On a bien $P = C\bar{C}$.

3. Décomposons C en partie réelle et en partie imaginaire $C = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

D'après la question précédente, on a $P = C\bar{C} = A^2 + B^2$.

Il faut en permanence garder sous le nez l'égalité fondamentale vérifiée par la suite (x_n) :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n + \ln x_n = n$$

1. Dresser un tableau de variations le plus efficacement possible.
2. Exploiter le théorème de la limite monotone, puis faire un mini-raisonnement par l'absurde pour montrer que $x_n \rightarrow +\infty$.

Il faudra sûrement montrer que $\ell > 0$, pour dire que $\ln x_n \rightarrow \ln \ell$ et obtenir une contradiction.

3. • Commençons par montrer que $x_n - n \sim -\ln n$.

• Puis montrons que $x_n - n + \ln n \sim \frac{\ln n}{n}$.

On a $x_n \sim n$, d'où $x_n = n + o(\ln n)$.

On écrit $x_n - n = -\ln(x_n)$ et on remplace x_n par l'égalité trouvée à la question précédente.

- **DA à 1 terme** Montrons que $u_n \sim n$.
 - Une récurrence immédiate donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \geq n-1$, donc $u_n \rightarrow +\infty$ par théorème de minoration.
 - Par récurrence (à faire), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$.
 - Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 \leq u_n \leq n$.
Les membres extrêmes sont équivalents à n , donc par théorème des Gendarmes, on a $u_n \sim n$.
- **DA à 2 termes** Montrons que $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$

- **Première façon de calculer.** Montrons que $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$
ou encore que

$$u_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2} + o(1)$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} = n + \frac{1}{2} + o(1)$$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n + n^2} \\ &= n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} && u_n = n + o(n), \quad \text{d'où } \frac{u_n}{n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= n \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{en reprenant le DA à 1 terme de } u_n \text{ et en le divisant par } n^2 \\ &= n \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\underbrace{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim \frac{1}{n}}\right) \right] && \text{car } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \\ &= n \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= n + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

- **Deuxième façon (astucieuse — mais efficace —) de calculer.**

Montrons que $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$
ou encore que

$$u_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2} + o(1)$$

ou encore que

$$u_{n+1} - n = \frac{1}{2} + o(1)$$

ou encore que

$$u_{n+1} - n \sim \frac{1}{2}$$

Calculons $u_{n+1} - n$.

On a

$$u_{n+1} - n = \sqrt{u_n + n^2} - n = n \left(\sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} - 1 \right)$$

Comme $\frac{u_n}{n^2} \rightarrow 0$, on a donc en utilisant que $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - n &\sim n \times \frac{1}{2} \frac{u_n}{n^2} \\
&\sim \frac{1}{2} \frac{u_n}{n} \\
&\sim \frac{1}{2} \quad \text{car } u_n \sim n
\end{aligned}$$

D'où $u_{n+1} - n = \frac{1}{2} + o(1)$, ce qui était l'objectif à atteindre dans cette façon de présenter les calculs.

Bilan. On obtient le DA₂

$$u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$$

- **DA à 3 termes** Montrons que $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore que

$$u_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2} - \frac{3}{8(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

ou encore que

$$u_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} = n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sqrt{u_n + n^2} \\
&= n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} && u_n = n - \frac{1}{2} + o(1), \quad \text{d'où } \frac{u_n}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= n \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} && \text{en reprenant le DA à 2 termes de } u_n \text{ et en le divisant par } n^2 \\
&= n \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) && \text{car } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\
&= n \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

D'où $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. On a $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$. On a par ailleurs

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1,$$

donc $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.

2. On obtient par le calcul que $(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Cela démontre que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 0$ à partir d'un certain rang, et donc que $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang.

Prendre $w_n = \sqrt{u_n v_n}$ (la moyenne géométrique).

1. Prenons $v_n = 1$. On cherche (u_n) telle que u_n est bornée, mais u_n ne tend pas vers 0.

Par exemple, $u_n = 3$.

2. Prenons $v_n = 1$. On cherche (u_n) telle que u_n est bornée, mais $\frac{1}{u_n}$ pas bornée.

Par exemple, $u_n = \frac{1}{n}$.

3. Prenons $v_n = 1$. On cherche (u_n) telle que u_n est bornée, mais u_n ne tend pas vers 0 et $\frac{1}{u_n}$ pas bornée.

Par exemple, $u_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

- (i) $e^x \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + \frac{23}{81}x^3 + o(x^3)$
- (ii) $\sin(x) \ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$
- (iii) $\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$
- (iv) $(e^x - 1) \sin x = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$
- (v) $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$
- (vi) $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}x - \frac{23}{24}ex^2 + o(x^2)$
- (vii) $(\sin x)^4 = x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + o(x^8)$
- (viii) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- (ix) $\frac{xe^{-x}}{2x+1} = x - 3x^2 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{79}{6}x^4 + o(x^4)$
- (x) $(\cos x)^{1/x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$
- (xi) $(2+h)^4 = 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4 + o(h^{100})$
- (xii) $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$
- (xiii) $\frac{1}{1+(1+h)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$
- (xiv) $\exp(1+h) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3 + o(h^3)$
- (xv) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \cos\left(3\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}h + \frac{5\sqrt{3}}{2}h^2 + o(h^2)$
- (xvi) $\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)} = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o(h^3)$
- (xvii) $\frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + o(h^3)$

- (i) $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$
- (ii) $\frac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{x}$ et $\frac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2}$
- (iii) $\ln(1+x^2) - \sin(x^2) + 2 \cos^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln x$
- (iv) $\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{x-1}$
- (v) $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$
- (vi) $1 + e^{e^x} - \text{Arctan } x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} 1 + e + \frac{\pi}{2}$
- (vii) $\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{2}}$
- (viii) $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} \frac{\pi-x}{\sqrt{\pi}}$
- (ix) $\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{5/6}$
- (x) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$
- (xi) $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln x}$
- (xii) Pour tout $x > e$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} &= \sqrt{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} - \sqrt{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= \sqrt{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - \sqrt{\ln x + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\ &= \sqrt{\ln x} \left(\sqrt{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} \right). \end{aligned}$$

Cette expression peut paraître horrible, mais on a en fait appliqué à fond l'idée de factoriser par les termes prépondérants, et on se retrouve maintenant dans une position idéale pour utiliser des DL de $u \mapsto \ln(1+u)$ ou $u \mapsto \sqrt{1+u}$.

Or, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{car } \begin{cases} \ln(1+u) = 1+u + o(u) \\ \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \\ \text{donc } \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} &= \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} &= \sqrt{1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{2x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right) & \text{car } \begin{cases} \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u) \\ \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right) = O\left(\frac{1}{x \ln x}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Exactement de la même façon,

$$\sqrt{1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = 1 - \frac{1}{2x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

On en déduit

$$\sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x \ln x}.$$

Ainsi, d'après les propriétés multiplicatives de l'équivalence,

$$\sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln(1-x)} = \sqrt{\ln x} \left(\sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} \right)$$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\ln x} \times \frac{1}{x \ln x}$$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}.$$

(xiii) $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln x$

(xiv) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$

(xv) $\tan x - \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x^3$

(xvi) $\ln(1 + \sin x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

(xvii) $\ln(\ln(1+x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x$

(xviii) $\ln(\cos x) \underset{x \rightarrow \pi/2}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

- (i) $\frac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2}n$
- (ii) $\frac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$
- (iii) $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$
- (iv) $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
- (v) $\sin \sin \frac{\pi}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$
- (vi) $\frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\tan \frac{\pi}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{\pi}$
- (vii) $\ln(n+2) - \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
- (viii) $(2n + \ln n^2)e^{-(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2ne^{-(n+1)}$
- (ix) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\frac{\ln n}{n}$
- (x) $\frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$
- (xi) $\frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3 - 2n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{2}$
- (xii) $\frac{n!+e^n}{2^n+3^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}$
- (xiii) $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$
- (xiv) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (xv) $\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

- (i) Le dénominateur est $\frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$, donc $\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$. Le numérateur est $-\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, donc $\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$. On a donc

$$\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\tan x - x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{2x}.$$

En particulier, cette fonction diverge en 0 (sa valeur absolue tend vers $+\infty$).

- (ii) On a $\tan h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \ln(2(1+h)^2 - 1) &= \ln(1 + 4h + 2h^2) \\ &= (4h + 2h^2) + o_{h \rightarrow 0}(4h + 2h^2) \quad \text{car } 4h + 2h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ &= 4h + o_{h \rightarrow 0}(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} 4h, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\ln(2(1+h)^2 - 1)}{\tan((1+h) - 1)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 4$$

$$\text{donc } \frac{\ln(2(1+h)^2 - 1)}{\tan((1+h) - 1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 4$$

$$\text{donc } \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 4.$$

- (iii) On a $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3 \sin^3 x}$.

On a déjà $x^3 \sin^3 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^6$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sin^3 x - x^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)^3 - x^3 \\ &= x^3 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^3 - x^3 \\ &= x^3 \left(1 - 3\frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) - x^3 \quad \text{car } -\frac{x^2}{6} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ et } (1+h)^3 = 1 + 3h + o_{h \rightarrow 0}(h) \\ &= -\frac{1}{2}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^5. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

En particulier, cette fonction diverge en 0 (sa valeur absolue tend vers $+\infty$).

- (iv) On a

$$x - \text{Arctan } x = x - \left(x - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$

$$\text{et } \sin^3 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$$

$$\text{donc } \frac{x - \text{Arctan } x}{\sin^3 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } \frac{x - \text{Arctan } x}{\sin^3 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

(v) On a $(\cos x)^{\ln|x|} = \exp(\ln|x| \ln \cos x)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \ln \cos x &= \ln(1 + (\cos x - 1)) \\ &= (\cos x - 1) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(\cos x - 1) && \text{car } \cos x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2). && \text{car } \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a

$$\ln|x| \ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln|x| x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, on a

$$(\cos x)^{\ln|x|} = \exp(\ln|x| \ln \cos x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp(0) = 1.$$

(vi) On a

$$\begin{aligned} (1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8 &= \left(1 + 3h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)\right) + 7\left(1 + 2h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)\right) - 8 \\ &= 17h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} 17h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (1+h)^4 + (1+h)^3 - 2 &= \left(1 + 4h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)\right) + \left(1 + 3h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)\right) - 2 \\ &= 7h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} 7h. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{7}{17}$$

$$\text{donc } \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{7}{17}.$$

In fine,

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{7}{17}.$$