



# Représentation matricielle des applications linéaires

exercices

**101 Un nilpotent chez les polynômes**

$$\text{Soit } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image de  $M$ , ainsi qu'une base du noyau.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $M^n$ .
3. Soit  $f : \mathbb{K}_3[X] \rightarrow \mathbb{K}_3[X]$   

$$P \mapsto -3XP(X) + X^2P'(X)$$

Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $E$ .

Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image et du noyau de  $f$ .

**102 Une symétrie chez les polynômes**

$$\text{Soit } E = \mathbb{K}[X]. \text{ On considère l'endomorphisme } \varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & P(1-X) \end{array}.$$

1. Avec un théorème de cours, montrer sans effort que  $E = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$ .
2. Montrer que  $\varphi$  induit un endomorphisme  $\varphi_n$  sur  $E_n = \mathbb{K}_n[X]$ .
3. Écrire la matrice  $M_n$  de  $\varphi_n$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ .

Désormais, on enlève les « indices  $n$  », donc on note  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{K}_n[X]$ .

On note  $M$  la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ .

Enfin, on prend  $n = 2$ .

4. Déterminer  $\text{rg}(\varphi - \text{id}_E)$ .

En déduire, sans calcul ou presque,  $\dim(\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E))$  et  $\dim(\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E))$ .

5. Sans effort, montrer que  $M$  est semblable à  $M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

6. Expliciter une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M'$ .

Et enfin, expliciter la matrice de passage  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ .

Quelle relation matricielle relie les matrices  $M'$  et  $M$  ?

Recommencer l'exercice pour  $n = 3$ .

**103 Matrice d'une famille de matrices**

Écrire dans la base canonique  $(E_{ij})_{i,j}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la matrice de la famille  $(E_{ij} + I)_{i,j}$ .

Expliquer pourquoi l'énoncé est vague et ambigu. Y répondre dans le cas où  $n = 2$ .

**104 L'effet « Vache qui rit »**

Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  et  $f_A$  l'endomorphisme suivant (que l'on notera  $f$ )

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Déterminer  $f(E_{21})$  où  $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. Donner la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ .
3. Même question dans la base  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ .
4. Déterminer le rang de l'endomorphisme  $f$ . Bonus : l'exprimer en fonction de  $A$ .

**105 Autour de la trace**

1. Montrer que  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP)$ .

2. Expliquer comment on peut définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie.

3. Soit  $E$  dimension finie et  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ .

## Matrices particulières et similitude

### 106 Formes spéciales de matrices

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .  
On se donne un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  et on calcule  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .  
Traduire avec l'endomorphisme  $f$  les propriétés données sur  $M$ .

- |  |   |
|--|---|
| (i) $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$<br>(ii) $M = I_n$<br>(iii) $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$<br>(iv) $\text{rg } M = r$<br>(v) $M = \left[ \begin{array}{c c} 0_{p,n} & \\ \hline & \star_{n-p} \end{array} \right]$ | (vi) $M = \left[ \begin{array}{c c} 0_{n,p} & \star \\ \hline & \end{array} \right]$<br>(vii) $M = \left[ \begin{array}{c c} \star_p & \star_{p,n-p} \\ \hline 0 & \star_{n-p} \end{array} \right]$<br>(viii) $M = \left[ \begin{array}{c c} \star_p & 0 \\ \hline 0 & \star_{n-p} \end{array} \right]$ |
|--|---|

### 107 Matrice de projecteur

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^2 = A$ .

Pour tout  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $J_r = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array} \right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que  $A$  est semblable à  $J_r$  où  $r$  est à préciser en fonction de  $A$ .

### 108 Matrice involutive

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^2 = I$ .

Pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $D_p = \left[ \begin{array}{c|c} I_p & 0_{p,n-p} \\ \hline 0_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{array} \right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que  $A$  est semblable à  $D_p$  où  $p$  est à préciser en fonction de  $A$ .

### 109 Matrice nilpotente d'indice 2

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^2 = 0$ .

Pour tout  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on considère la matrice blocs suivante  $N_r = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (préciser la taille des blocs!).

Montrer que  $A$  est semblable à  $N_r$ , où  $r$  est à préciser en fonction de  $A$ .

### 110 Commutant d'une matrice nilpotente d'indice maximal

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^{n-1} \neq 0$  et  $A^n = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  tel que la famille  $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$  soit une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que  $A$  est semblable à

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{array} \right]$$

3. Pour toute matrice  $B$ , notons  $\mathcal{C}(B)$  l'ensemble (c'est même un sev de...) des matrices qui commutent avec  $B$ .

Montrer que  $\mathcal{C}(\tilde{A}) = \text{Vect}(I, \tilde{A}, \dots, \tilde{A}^{n-1})$  et en déduire une base de  $\mathcal{C}(A)$ .

## Interpréter/Traduire avec des matrices !

### 111 La matrice de Vandermonde

Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  trois scalaires *distincts* et :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

En interprétant  $V$  comme la matrice dans les bases canoniques d'une certaine application linéaire  $\varphi : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}^3$ , montrer sans aucun calcul que  $V$  est inversible.

Énoncer un résultat général en remplaçant 3 par  $n$ .

Question totalement subsidiaire : a-t-on un moyen de trouver  $V^{-1}$  sans calcul ?

### 112 La formule d'inversion de Pascal

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de scalaires. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé une fois pour toutes.

1. Trouver une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  telle que

$$[b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_n] = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n] M$$

On fera un dessin de  $M$ .

Que vaut le coefficient  $m_{i,j}$  de  $M$  pour  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  (indexation Python) ?

2. Sans aucun calcul, montrer que  $M$  est inversible et déterminer son inverse (on pourra faire intervenir un bon endomorphisme).
3. Dédurre des questions précédentes une expression de  $a_n$  en fonction des  $b_k$ .

Bonus. Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a'_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b'_k \quad \text{où } a'_j = \dots \quad \text{et} \quad b'_j = \dots$$

### 113 Le retour

Voici un exercice déjà traité dans le chapitre Polynômes :

*Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P_n - P'_n = X^n$ .*

Expliquer comment traiter cet exercice avec le chapitre actuel (on ne cherchera pas à exprimer  $P_n$ ).

### 114 Autour de la dérivation chez les polynômes

1. Soit  $D : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$  l'opérateur de dérivation.  
 $P \mapsto P'$

Écrire la matrice  $M$  de  $D$  dans la base canonique.

Sans calcul, montrer que  $M^{n+1} = 0$ .

2. Considérons l'endomorphisme  $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$ .  
 $P \mapsto P - P'$

Trouver une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$  où  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ .

Pouvez-vous en trouver une autre ?

3. Défi. Pouvez-vous exprimer l'automorphisme réciproque de  $\varphi$  ?  
Pouvez-vous en déduire le polynôme  $P_n$  de l'exercice 113 ?

## Rang d'une matrice

### 115 Déjà vu

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

- (i)  $\text{Vect}\left((1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16)\right)$
- (ii)  $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } y + 3z + 3t = 0\right\}$
- (iii)  $\text{Vect}\left(X^2 + X + 1, X^2 + 2X + 4, X^2 + 3X + 9\right)$

### 116 De tête

Déterminer sans calcul le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

### 117 Rang de la matrice de Vandermonde

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ .

Soit

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Déterminer le rang de  $V$ .

On pourra fournir deux preuves différentes. Une en s'aidant de l'exercice 119, l'autre de l'exercice 111.

### 118 Être ou ne pas être ... semblable

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  semblables.

Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , les matrices  $A - \lambda I$  et  $B - \lambda I$  ont même rang.

Les matrices  $T$  et  $D$  suivantes sont-elles semblables ?

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Montrer que les matrices  $T$  et  $D$  suivantes sont semblables.

Considérer l'endomorphisme canoniquement associé à  $T$ .

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Plus généralement, montrer que les matrices  $T$  et  $D$  suivantes sont semblables, où  $a, b, c$  sont distincts :

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

### 119 Sous-matrice inversible de taille maximale

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Montrer que le rang de  $A$  est la taille maximale des sous-matrices de  $A$  inversibles :

$$\text{rg}(A) = \max \left\{ t \in \mathbb{N} \mid \tilde{A} \text{ sous-matrice de } A \text{ inversible de taille } t \right\}$$

**120** Autour du rang 1

1. Soit  $K \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  une colonne et  $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  une ligne.

On pose  $A = KL$ .

Montrer que  $\text{rg } A \leq 1$ .

Montrer que si  $A$  est de rang 1, alors  $K$  et  $L$  sont de rang 1.

Montrer que si  $K$  et  $L$  sont de rang 1, alors  $A$  est de rang 1.

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de rang 1.

Montrer qu'il existe  $(K, L) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  tel que  $A = KL$ .

Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A^2 = \lambda A$ , puis montrer que  $\lambda = \text{tr } A$ .

**121** Again

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices telles que  $AB = 0$  et  $A + B$  est inversible.

Montrer que  $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) = n$ .

**122** Redécouverte du produit matriciel avec des matrices blocs

Pour  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , il est facile de montrer que  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ .

Ainsi, pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ , il est facile de démontrer  $\text{Im}(AB) \subset \text{Im } A$  : il suffit pour cela de considérer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices.

Le but de l'exercice est de retrouver cette inclusion à l'aide d'un calcul matriciel. Pour cela, nous allons raisonner avec des matrices blocs.

En écrivant  $A$  par blocs avec ses colonnes notées  $A_1, \dots, A_p$  (c'est-à-dire  $A$  est la matrice blocs en ligne suivante  $A = [A_1 \ \dots \ A_p]$ ), montrer matriciellement que

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \text{Col}_j(AB) \in \text{Vect}(\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_p(A))$$

En déduire que  $\text{Im}(AB) \subset \text{Im } A$ .

**123** Matrices par blocs

Soit  $M$  la matrice diagonale par blocs :

$$M = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & A_s \end{array} \right].$$

où chaque  $A_i$  est carrée de taille  $t_i$ .

Déterminer le rang de  $M$  en fonction des  $r_i = \text{rg}(A_i)$ .

Traiter le cas où toutes les matrices  $A_i$  sont égales à une matrice  $A$  carrée de taille  $n$ .

**124** Rang d'un endomorphisme

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $f_A$  l'endomorphisme suivant (que l'on notera  $f$ )

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto AM \end{aligned}$$

Déterminer le rang de l'endomorphisme  $f$  (en fonction de  $A$  de bien sûr).

## Vers la réduction des endomorphismes

### 125 On est en Piston 3

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

- Déterminer les scalaires  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $A - \lambda I$  ne soit pas inversible. Il y en a combien ?  
Que vaut la somme (visuellement infinie!)  $\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} \dim \text{Ker}(A - \alpha I)$
- Donner une base  $\mathcal{B}_\lambda$  de  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  pour les  $\lambda$  précédents.
- On note  $\mathcal{C}$  la concaténation de toutes ces bases  $\mathcal{B}_\lambda$ . Que dire de  $\mathcal{C}$  ?
- Montrer que  $A$  est semblable à  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

### 126 Un endomorphisme diagonalisable

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . On a  $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

- Donner le rang des matrices  $A - I$ ,  $A - 2I$  et  $A - 3I$ .  
Puis donner une base de  $\text{Ker}(A - I)$ ,  $\text{Ker}(A - 2I)$  et  $\text{Ker}(A - 3I)$ .
- Soit  $\varphi : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X]$   
 $P \mapsto (X + 2)P'(X) + P(X - 1)$   
Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}_2[X]$  (que ne faut-il pas oublier dans cette vérification ?). Puis écrire sa matrice dans la base canonique.
- Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{K}_2[X]$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est diagonale.

*Pour la culture (spé), on dit que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable. Attention, un endomorphisme quelconque n'est pas forcément diagonalisable.*

### 127 Une matrice trigonalisable

- Soit  $T = \left[ \begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array} \right]$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont distincts.

On considère l'endomorphisme canoniquement associé à  $T$  que l'on note  $f$ .

Donner la dimension de  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ ,  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})^2$  et  $\text{Ker}(f - \mu \text{id})$ , ainsi qu'une base.

- Soit  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $T$  où  $\lambda = -1$  et  $\mu = 2$ .

### 128 Le lemme des noyaux (cas particulier)

Pour l'instant,  $E$  n'est pas supposé de dimension finie.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- Montrer qu'il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  deux polynômes tels que  $X^2U + (X - 2)V = 1$ .
- À l'aide de la question 1, montrer que  $\text{Ker}(f^2)$  et  $\text{Ker}(f - 2 \text{id})$  sont en somme directe.
- Ici, on suppose que  $P = X^3 - 2X^2$  est un polynôme annulateur de  $f$ .  
À l'aide de la question 1, montrer que  $E = \text{Ker}(f^2) + \text{Ker}(f - 2 \text{id})$ .
- Ici,  $E$  est de dimension finie, et  $f^3 - 2f^2 = 0$ .  
Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans cette base soit une matrice bloc de la forme :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \left[ \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 2I_q \end{array} \right] \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ telle que } A^2 = 0.$$

Préciser la taille des blocs, à savoir  $p$  et  $q$ .

**129** Trigonalisation et racine carrée

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{K}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $E$  est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Après calculs, on a

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A-2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

1. À l'aide des questions de l'exercice 128, montrer l'égalité  $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id})$ .
2. Montrer, sans vouloir l'exhiber, qu'il existe un vecteur  $v$  appartenant à  $\text{Ker}(f^2)$  mais n'appartenant pas à  $\text{Ker} f$ . Montrer que  $(f(v), v)$  est une base de  $\text{Ker}(f^2)$ .

3. Montrer que  $A$  est semblable à  $T = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$ .

4. On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant  $g^2 = f$ .

On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.

Établir que  $\text{Ker}(f^2)$  est stable par  $g$ , puis montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{bmatrix}$$

En utilisant la matrice de  $f$  dans cette même base  $\mathcal{C}$ , trouver une contradiction et conclure.

**130** Étude matricielle de la lettre C

On considère la matrice  $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{K})$  définie par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note  $\varphi$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $\mathbf{C}$ .

1. Donner le rang de  $\varphi$ , puis une base de  $\text{Ker} \varphi$ .
2. Montrer que (hum...)

$$E = \text{Im} \varphi \oplus \text{Ker} \varphi$$

3. On considère une base adaptée à cette décomposition. Donner la forme de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ .
4. Montrer que  $\mathbf{C}$  est semblable à

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

**131** Un exo de khôlle amusant !

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices telles que  $\text{Im} A = \text{Ker} A$  et  $\text{Im} B = \text{Ker} B$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.

Soit  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  deux scalaires distincts.

1. Montrer qu'il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  deux polynômes tels que  $(X - \alpha)U + (X - \beta)V = 1$ .
2. En déduire<sup>1</sup> qu'il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  deux polynômes tels que  $(X - \alpha)^p U + (X - \beta)^q V = 1$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque.

3. Montrer que  $\text{Ker}((f - \alpha \text{id})^p)$  et  $\text{Ker}((f - \beta \text{id})^q)$  sont en somme directe.
4. Ici, on suppose que  $(X - \alpha)^p(X - \beta)^q$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

Montrer que

$$E = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^p) \oplus \text{Ker}((f - \beta \text{id})^q)$$

5. Traiter la réciproque :

Si  $E = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^p) \oplus \text{Ker}((f - \beta \text{id})^q)$ , alors  $(X - \alpha)^p(X - \beta)^q$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

6. Rappeler pourquoi, pour un endomorphisme  $\varphi$ , on a la chaîne d'inclusion :

$$\{0_E\} \subset \text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(\varphi^k)$$

Quand la dimension de  $E$  est finie, on a vu lors d'un exercice de TD que cette chaîne de noyaux itérés stagne.

7. Ici, on suppose que  $E$  est de dimension finie, donc  $f$  admet un polynôme annulateur (rappeler la preuve).

Parmi ces polynômes, on peut également considérer le polynôme minimal de  $f$  (à votre avis, quelle est la définition de cette notion ? Utiliser  $\{\deg P \mid P \text{ unitaire, annulateur de } f\}$ ).

On suppose que  $(X - \alpha)^p(X - \beta)^q$  est le polynôme minimal de  $f$ .

Essayer de comprendre pourquoi  $p$  et  $q$  sont les indices de stagnation :

$$\{0_E\} \subsetneq \text{Ker}(f - \alpha \text{id}) \subsetneq \text{Ker}(f - \alpha \text{id})^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(f - \alpha \text{id})^p = \text{Ker}(f - \alpha \text{id})^{p+1}$$

$$\{0_E\} \subsetneq \text{Ker}(f - \beta \text{id}) \subsetneq \text{Ker}(f - \beta \text{id})^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(f - \beta \text{id})^q = \text{Ker}(f - \beta \text{id})^{q+1}$$

Autrement dit, en notant  $I = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^i) = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^{i+1})\}$ , montrer que  $p = \min I$ .

On rappelle que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^i) \text{ et } \text{Ker}((f - \beta \text{id})^j) \text{ sont en somme directe.}$$

1. Pas facile ! Si  $a + b = 1$ , en élevant à la puissance  $p + q$ , que se passe-t-il ?



$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

# Représentation matricielle des applications linéaires

corrigés

1. **Base de Im  $M$ .** On a (en notant  $C_j$  les colonnes de  $M$ ) :

$$\text{Im } M = \text{Vect}(\underbrace{C_1, C_2, C_3}_{\text{famille libre}})$$

Une base de Im  $M$  est donc  $(C_1, C_2, C_3)$ .

**Base de Ker  $M$ .**

On a par ce qui précède  $\text{rg } M = 3$ .

D'après le théorème du rang, on a  $\dim \text{Ker } M = 1$ .

Pour trouver une base de Ker  $M$ , il suffit d'exhiber une famille libre de Ker  $M$  constituée d'un seul vecteur !

On a  $E_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker } M$  et ce vecteur est non nul, donc  $(E_4)$  est une famille libre de Ker  $M$ .

Donc  $(E_4)$  est une famille base de Ker  $M$ .

2. On a

$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$M^3 = M \times M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour  $n \geq 4$ , on a  $M^n = M^{n-4} \times M^4 = M^{n-4} \times 0 = 0$ .

3. • **Linéarité :** à vous.

• Montrons que l'image de  $f$  est incluse dans  $\mathbb{K}_3[X]$ .

Fixons  $P \in \mathbb{K}_3[X]$ , c'est-à-dire  $\deg P \leq 3$  et examinons le degré de  $f(P)$ .

Il est clair que  $\deg f(P) \leq 4$ .

Reste à vérifier que le terme en  $X^4$  de  $f(P)$  est nul.

En notant  $a$  le coefficient en  $X^3$  de  $P$ , le terme en  $X^4$  de  $f(P) = -3XP(X) + X^2P'(X)$  vaut

$$-3X \times (aX^3) + X^2 \times (3aX^2)$$

donc est nul.

• **Matrice dans la base canonique.** On a

$$\begin{cases} f(1) = -3X \\ f(X) = -2X^2 \\ f(X^2) = -X^3 \\ f(X^3) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f)$  est la matrice  $M$  précédente.

• Une base de Im  $M$  est la famille  $\left( \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$  donc une base de Im  $f$  est la famille  $(-3X, -2X^2, -X^3)$ .

• Une base de Ker  $M$  est la famille  $\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  donc une base de Ker  $f$  est la famille  $(X^3)$ .

**Des précisions pour ceux qui veulent.** Soit  $P \in \mathbb{K}_3[X]$  que l'on écrit  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ .  
On a les équivalences suivantes :

$$P \in \text{Ker } f \iff \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \text{Ker } M = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \iff P \in \text{Vect}(X^3)$$

1. L'endomorphisme  $\varphi$  est une symétrie (involution), c'est-à-dire vérifie  $\varphi^2 = \text{id}$ .  
 (Pour la culture,  $P = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$  est **un** polynôme annulateur de  $\varphi$ ).  
 D'après le cours, on sait que l'on a

$$E = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$$

Pouvez-vous rappeler l'idée de la preuve ?

Il s'agit d'une Analyse-Synthèse. On note  $F = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$  et  $G = \text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$ .

On fixe un vecteur de  $E$ , ici on fixe  $P \in E$ .

Montrons qu'il existe un unique couple  $(P_F, P_G) \in F \times G$  tel que  $P = P_F + P_G$ .

**Analyse.** On suppose qu'il existe  $P_F, P_G \in E$  tels que 
$$\begin{cases} P_F \in F \\ P_G \in G \\ P = P_F + P_G \end{cases} .$$

En appliquant  $\varphi$  à la première égalité, on obtient la seconde, d'où :

$$\begin{cases} P &= P_F + P_G \\ \varphi(P) &= \varphi(P_F) + \varphi(P_G) \end{cases}$$

En tenant compte des appartenances ( $P_F \in F$  et  $P_G \in G$ ), la deuxième égalité s'écrit différemment, d'où :

$$\begin{cases} P &= P_F + P_G \\ \varphi(P) &= P_F - P_G \end{cases}$$

Par somme et différence, on obtient

$$\begin{cases} P_F &= \frac{P + \varphi(P)}{2} \\ P_G &= \frac{P - \varphi(P)}{2} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} P_F &= \frac{1}{2}(\text{id} + \varphi)(P) \\ P_G &= \frac{1}{2}(\text{id} - \varphi)(P) \end{cases}$$

**Synthèse.** On pose  $P_F$  et  $P_G$  comme ci-dessus et on vérifie les trois points.

2. — L'application  $\varphi_n$  est linéaire, par héritage (car  $\varphi$  est un endomorphisme donc linéaire!).  
 — Montrons que  $\varphi_n$  envoie  $\mathbb{K}_n[X]$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$ .  
 Pour cela, prenons un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  et montrons que  $\varphi(P) \in \mathbb{K}_n[X]$ .  
 Comme  $\varphi_n$  est linéaire, il suffit de vérifier cette appartenance pour chaque polynôme de la base canonique.  
 Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrons que  $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$ .  
 On a  $\varphi_n(X^k) = (1 - X)^k$  qui est un polynôme de degré  $\leq k$  (en fait de degré  $k$  exactement), donc est de degré  $\leq n$ .
3. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_n(X^j) &= (1 - X)^j \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 1^{j-i} (-X)^i \\ &= \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} X^i + \sum_{i=j+1}^n 0 X^i \end{aligned}$$

Ainsi, en indexant les lignes (et colonnes) la matrice par  $\llbracket 0, n \rrbracket$  (comme Python d'ailleurs), on obtient

$$\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \text{coeff}_{i,j}(M_n) = \begin{cases} (-1)^i \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire sans disjonction de cas grâce à la convention sur le coefficient binomial :

$$\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \text{coeff}_{i,j}(M_n) = (-1)^i \binom{j}{i}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, avec une diagonale ayant des 1 et des  $-1$ , en alternance (précisément, le coefficient en haut à gauche vaut 1 et celui en bas à droite vaut  $(-1)^n$ ).

Les signes  $-$  se trouvent sur les lignes indexées par un entier impair (la première ligne étant indexée par 0)

**Remarque.** Si l'on veut indexer les lignes (et colonnes) par  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , on a

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad \text{coeff}_{k,\ell}(M_n) = (-1)^{k-1} \binom{\ell-1}{k-1}$$

4. Dans le cas où  $n = 2$ , la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  peut se déduire du cas général (en prenant donc  $n = 2$ ). Cela va peut-être plus vite de la redéterminer à la main. On a

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = 1 - X, \quad \varphi(X^2) = 1 - 2X + X^2$$

donc la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  vaut

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{On a } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi - \text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = M - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le rang de la matrice  $M - I$  vaut 1 donc  $\text{rg}(\varphi - \text{id}_E) = 1$ .

D'après le théorème du rang, on a donc  $\dim(\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)) = 2$ .

Puis avec la décomposition de  $E = \mathbb{K}_2[X]$ , on a  $\dim(\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)) = 1$ .

5. Pour montrer que  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  est semblable à  $M'$ , on va montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}'$  telle que  $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ .

Considérons une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  adaptée à la décomposition

$$E = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$$

Ainsi, grâce aux dimensions déterminées précédemment,  $\mathcal{B}'$  est du type

$$\mathcal{B}' = \underbrace{(e'_1, e'_2)}_{\text{base de } \text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)} \vee \underbrace{(e'_3)}_{\text{base de } \text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)}$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} \underbrace{1}_{\varphi(e'_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{1}_{\varphi(e'_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{-1}_{\varphi(e'_3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix}$$

**Remarque.** Ne pas oublier que les  $e'_i$  sont des polynômes ! On a montré leur existence, mais on ne les a pas encore explicités (par ailleurs, il n'y a pas unicité).

6. Explicitons une base de  $\text{Ker}(M - I)$  et de  $\text{Ker}(M + I)$ .

On en déduira une base de  $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$  et ceci « en réincarnant des colonnes en polynômes ! ».

On a

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(M - I) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(M + I)$$

Pour des raisons de dimension,

$$\text{une base de } \text{Ker}(M - I) \text{ est } \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

une base de  $\text{Ker}(M + I)$  est  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

Donc

une base de  $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$  est  $\left( 1, X^2 - X \right)$

une base de  $\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$  est  $\left( -2X + 1 \right)$

Ainsi,

une base de  $E = \mathbb{K}_2[X]$  est  $\mathcal{B}' = \left( 1, X^2 - X, -2X + 1 \right)$

On peut « faire un peu de ménage » (prendre des coefficients dominants positifs par exemple), et on pose

$$\mathcal{B}' = \left( 1, X^2 - X, 2X - 1 \right)$$

D'après la formule de changement de bases pour un endomorphisme, on a

$$M' = \Omega^{-1}M\Omega \quad \text{avec } \Omega = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

Avec notre base  $\mathcal{B}' = \left( 1, X^2 - X, 2X - 1 \right)$ , on a :

$$\Omega = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Pour le fun.** On peut s'amuser à vérifier que la formule de changement de bases est vraie ! Un calcul matriciel montre que  $\Omega M' = M\Omega$ , donc c'est tout bon !

7. On a  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(X) = 1 - X$ ,  $\varphi(X^2) = 1 - 2X + X^2$ ,  $\varphi(X^3) = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$ .  
Donc la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  vaut

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$M - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On arrive encore à lire à l'œil nu le rang de chacune de ces matrices, donc on doit pouvoir trouver une base du noyau également à l'œil nu.

**Remarque.** Si le rang ne se lit pas à l'œil nu, on peut échelonner la matrice ce qui ne change pas son rang et surtout, si l'on échelonne **en ligne**, on ne change pas le noyau ! Donc on pourra trouver rapidement une base du noyau.

A gauche, voilà les opérations élémentaires effectuées

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, \quad L_2 \leftarrow -L_2, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2, \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2, \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

A droite, voilà les opérations élémentaires effectuées

$$L_2 \leftarrow -L_2, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2, \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1, \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

Cela conduit aux deux matrices échelonnées (ayant chacune deux pivots, donc chacune de rang 2)

$$(M - I)^{\text{éch.}} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (M + I)^{\text{éch.}} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour des raisons de dimension,

$$\text{une base de } \text{Ker}(M - I) \text{ est } \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{une base de } \text{Ker}(M + I) \text{ est } \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ ou encore } \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

**Rappel.** Pour une matrice rectangulaire  $A$ , on a  $\text{Ker } A = \text{Ker } A^{\text{éch}}$ . En effet, effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  revient à multiplier  $A$  à gauche par une matrice inversible  $P$ , ainsi,  $A^{\text{éch}} = PA$  pour une certaine matrice inversible  $P$ . Or  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(PA)$  car  $P$  est inversible.

Il s'agit maintenant de réincarner les colonnes en polynômes.

D'après l'étude matricielle,

$$\text{une base de } \text{Ker}(\varphi - \text{id}_E) \text{ est } \left( 1, X^2 - X \right)$$

$$\text{une base de } \text{Ker}(\varphi + \text{id}_E) \text{ est } \left( 2X - 1, 4X^3 - 6X^2 + 1 \right)$$

**Pour le fun.** On peut s'amuser à faire une petite vérification.

— Les polynômes de  $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$  sont invariants par «  $X$  donne  $1 - X$  ». Il y a intérêt à ce que ce soit le cas pour les deux polynômes fournis.

Le polynôme constant  $1 = X^0$  a pour image par  $\varphi$  le polynôme  $(1 - X)^0$  qui vaut 1. Donc 1 est invariant par  $\varphi$ .

Le polynôme  $-X + X^2 = X(X - 1)$  a pour image par  $\varphi$  le polynôme  $(1 - X)(1 - X - 1)$  qui vaut  $-(1 - X)X = X(X - 1)$ . Donc  $-X + X^2$  est invariant par  $\varphi$ .

— Les polynômes de  $\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$  sont transformés en leur opposé en appliquant  $\varphi$ .

Il y a intérêt à ce que ce soit le cas pour les deux polynômes fournis.

Le polynôme  $2X - 1$  a pour image par  $\varphi$  le polynôme  $2(1 - X) - 1$  qui vaut  $-(2X - 1)$ . C'est bon !

Le polynôme  $1 - 6X^2 + 4X^3$  a pour image par  $\varphi$  le polynôme  $1 - 6(1 - X)^2 + 4(1 - X)^3$  qui vaut  $-1 + 6X^2 - 4X^3 = -(1 - 6X^2 + 4X^3)$ . C'est bon !

- (i) On a  $M = 0_n$  si et seulement si  $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .  
En effet, dire que  $M = 0_n$  revient à dire que  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = 0$  donc  $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- (ii) On a  $M = I_n$  si et seulement si  $f = \text{id}_E$ .  
En effet, dire que  $M = I_n$  revient à dire que  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = e_j$  donc  $f = \text{id}_E$ .
- (iii) On a  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  si et seulement si  $f$  est un automorphisme (cf. cours).
- (iv) On a  $\text{rg } M = r$  si et seulement si  $\text{rg } f = r$  (cf. cours).  
Notons que cette question généralise les première et troisième questions. La première correspond au cas  $r = 0$  et la troisième au cas  $r = n$ .
- (v) Dire que  $M$  est de la forme de l'énoncé signifie que  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ .  
Puisque  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ , cette condition est donc équivalente à l'inclusion

$$\text{Im } f \subset \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$$

- (vi) Dire que  $M$  est de la forme de l'énoncé signifie que  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_j) = 0_E$ .  
Par stabilité par combinaison linéaire, c'est donc équivalent à l'inclusion

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \text{Ker } f.$$

- (vii) Dire que  $M$  est de la forme de l'énoncé signifie que  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ .  
En notant  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , c'est équivalent à

$$f(F) \subset F$$

On dit alors naturellement que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  est *stable par*  $f$ .

- (viii) La matrice  $M$  est de la forme de l'énoncé si et seulement si les sous-espaces vectoriels  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  et  $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$  sont tous les deux stables sous  $f$ .

Remarque. Dans ce cas,  $E$  se décompose en somme directe de deux sous-espaces stables par  $f$ , ce qui est une propriété intéressante.

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrons en fait qu'il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que  $P_n - P'_n = X^n$ .

Amine (2024-2025) me fait remarquer qu'il faudra encore justifier l'unicité si on laisse  $\mathbb{K}[X]$ . C'est facile en examinant le degré de  $P - P' = X^n$ .

On considère  $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$ , autrement dit,  $\varphi = \text{id} - D$  où  $D$  est l'endomorphisme

$$P \mapsto P - P'$$

de dérivation restreint à  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Question subsidiaire.** Pouvez-vous exprimer  $\varphi^{-1}$  ?

Penser à exploiter le fait que  $D$  est nilpotent, et à utiliser Bernoulli.

Comme  $D^{n+1} = 0$ , on trouve que  $\varphi^{-1} = \sum_{k=0}^n D^k$ .

**Autre question subsidiaire.** Pouvez-vous en déduire le polynôme  $P_n$  ?

On a  $P_n = \varphi^{-1}(X^n)$ .

Comme on trouve que  $\varphi^{-1} : Q \mapsto \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$ , on en déduit que

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} \quad \text{càd} \quad P_n = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!} X^\ell$$

## Le résultat

La matrice de Vandermonde  $V$  associée aux scalaires  $x_0, \dots, x_n$  est de rang :

$$\text{rg } V = \text{card}\{x_0, \dots, x_n\}$$

### Preuve « structurelle »

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

Dans les bases canoniques, la matrice de  $\varphi$  est la matrice  $V$ .

D'après le cours, on a  $\text{rg } V = \text{rg } \varphi$ .

En vertu du théorème du rang, il s'agit de trouver la dimension de  $\text{Ker } \varphi$ .

Cherchons une base de  $\text{Ker } \varphi$ .

En notant  $r$  le cardinal de  $\{x_0, \dots, x_n\}$  et en supposant (quitte à renuméroter) que  $x_1, \dots, x_r$  sont distincts, on montre par double inclusion :

$$\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(R_0, \dots, R_{n-r}) \quad \text{où } R_k = (X - x_1) \cdots (X - x_r) X^k$$

La famille  $(R_0, \dots, R_{n-r})$  est libre (c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré).

Donc  $\dim \text{Ker } \varphi = n - r + 1$ .

Comme  $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ , le théorème du rang donne  $\text{rg } \varphi = r$ .

### Preuve matricielle

**Rappel de cours (résulte de la définition).** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  rectangulaire.

On retire UNE colonne à  $A$  et on note  $\hat{A}$  la matrice obtenue, qui appartient donc à  $\mathcal{M}_{n,p-1}(\mathbb{K})$ .

On a

$$\text{rg}(\hat{A}) = \begin{cases} \text{rg}(A) & \text{si la colonne retirée est CL des autres} \\ \text{rg}(A) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Rappel de cours (théorème profond).** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  rectangulaire.

On a  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$ .

**Conséquence (non triviale).** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  rectangulaire.

On retire UNE ligne à  $A$  et on note  $A'$  la matrice obtenue, qui appartient donc à  $\mathcal{M}_{n-1,p}(\mathbb{K})$ .

On a

$$\text{rg}(A') = \begin{cases} \text{rg}(A) & \text{si la ligne retirée est CL des autres} \\ \text{rg}(A) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En itérant un nombre fini de fois cet énoncé, on a :

**Corollaire.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  rectangulaire.

Si  $A$  possède des lignes identiques, on peut les enlever sans changer son rang (bien sûr le format de la matrice change!).

### Retour à l'exercice.

Notons  $r = \text{card}\{x_0, \dots, x_n\}$  et montrons que  $\text{rg } V = r$ .

Quitte à renuméroter, on peut supposer que  $x_0, \dots, x_{r-1}$  sont distincts.

Avec le corollaire précédent, le rang de  $V$  (qui est une matrice carrée de taille  $n + 1$ ) est le même que le rang de  $V'$ , qui est la matrice rectangulaire :

$$V' = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{r-1} & x_{r-1}^2 & \cdots & x_{r-1}^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n+1}(\mathbb{K})$$

Montrons que  $\text{rg}(V') = r$ .

— Le rang de la matrice  $V'$  est majoré par le minimum de ses tailles, donc  $\text{rg}(V') \leq r$ .

— Montrons que la famille formée par les  $r$  premières colonnes de  $V'$  est libre ce qui montrera que  $\text{rg}(V') \geq r$ .

Soit  $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1} \in \mathbb{K}$  tel que  $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \text{Col}_k(V') = 0_{\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})}$ .

Cette égalité de colonnes de taille  $r$  se réécrit :

$$V'' \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } V'' \text{ est carrée de taille } r \text{ et est telle que } \text{Col}_j(V'') = \text{Col}_j(V')$$

Autrement dit, la matrice  $V''$  est la matrice carrée de taille  $r$  suivante :

$$V'' = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{r-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{r-1} & x_{r-1}^2 & \cdots & x_{r-1}^{r-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

C'est la matrice de Vandermonde associée aux scalaires **distincts**  $x_0, \dots, x_{r-1}$ .

D'après l'exercice 111, on sait qu'une telle matrice est inversible (il faut savoir redonner l'argument rapidement).

L'inversibilité de  $V''$  fournit la nullité de tous les  $\lambda_k$ .

D'où la liberté des  $r$  premières colonnes de  $V'$ .

**Bilan.** On a montré que  $\text{rg}(V') = r$ .

**Résumons.** On a  $\begin{cases} \text{rg } V = \text{rg } V' \\ \text{rg } V' = r \end{cases}$ , d'où  $\text{rg } V = r$ .

On considère  $\varphi_T$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $T$ , que l'on note  $\varphi$  pour alléger.

On cherche une base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = D$ , c'est-à-dire telle que 
$$\begin{cases} \varphi(e'_1) = ae'_1 \\ \varphi(e'_2) = be'_2 \\ \varphi(e'_3) = ce'_3 \end{cases} .$$

Par définition de  $\varphi$ , on a 
$$\begin{cases} \varphi(e_1) = ae_1 \\ \varphi(e_2) = be_2 \\ \varphi(e_3) = e_2 + ce_3 \end{cases} , \text{ où } (e_1, e_2, e_3) \text{ désigne la base canonique de } \mathbb{K}^3 .$$

On peut donc pour l'instant poser 
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = \text{reste à construire} \end{cases} .$$

On cherche donc un vecteur  $e'_3$  dans  $\text{Ker}(\varphi - c\text{id})$ .

Raisonnons matriciellement.

La matrice de  $\varphi - c\text{id}$  dans la base canonique vaut

$$T - cI = \begin{bmatrix} a - c & 0 & 0 \\ 0 & b - c & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On voit donc que  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c - b \end{bmatrix}$  est dans  $\text{Ker}(T - cI)$ , ainsi on peut poser  $e'_3 = (0, 1, c - b)$ .

Bilan. On pose

$$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \quad \text{où} \quad \begin{cases} e'_1 = (1, 0, 0) = e_1 \\ e'_2 = (0, 1, 0) = e_2 \\ e'_3 = (0, 1, c - b) = e_2 + (c - b)e_3 \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une base de  $\mathbb{K}^3$  (WHY? Quelle hypothèse utilise-t-on? Pour le voir, on peut considérer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c - b \end{bmatrix}$  et dire que cette matrice est inversible WHY?).

Par construction, on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = D$ . En effet, 
$$\begin{cases} \varphi(e'_1) = ae'_1 \\ \varphi(e'_2) = be'_2 \\ \varphi(e'_3) = ce'_3 \end{cases} .$$

**BILAN.** On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(\varphi) = T \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = D$$

Ainsi, les matrices  $T$  et  $D$  sont semblables.

**BONUS.** On peut préciser une matrice inversible  $P$  telle que  $D = P^{-1}TP$ .

Avec la formule de changement de bases, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(\varphi) P \quad \text{où} \quad P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}_{\text{cano}}}(\text{id}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(\mathcal{B}').$$

Autrement dit,  $D = P^{-1}TP$ , ou encore  $T = PDP^{-1}$ .

Notons  $T = \{t \in \mathbb{N} \mid \tilde{A} \text{ sous-matrice de } A \text{ inversible de taille } t\}$ .

- La partie  $T$  est non vide (c'est un peu subtil, mais  $0 \in T$  : la matrice vide est inversible ; si on ne veut pas considérer le vide, on peut distinguer des cas en fonction de la nullité ou non de la matrice  $A$  et constater que si  $A$  est non nulle, elle a au moins un coefficient non nul, et que la petite matrice carrée de taille 1 réduite à cet élément est inversible).
- Par ailleurs, la partie  $T$  est majorée par  $\min(n, p)$ .

**Bilan.** En tant que partie non vide et majorée de  $\mathbb{N}$ , la partie  $T$  admet un maximum.

Montrons maintenant que  $\max T = \text{rg}(A)$ .

- Montrons que  $\max T \leq \text{rg}(A)$ .

Pour cela, montrons que  $\text{rg} A$  est un majorant de  $T$ , c'est-à-dire  $\forall t \in T, t \leq \text{rg}(A)$ .

Soit  $t \in T$ . Alors il existe  $\tilde{A}$  sous-matrice de  $A$  inversible de taille  $t$ .

On peut aller très vite en invoquant un théorème de cours.

On a toujours pour une sous-matrice  $\tilde{A}$  de  $A$  l'inégalité :

$$\text{rg}(\tilde{A}) \leq \text{rg}(A)$$

Comme ici  $\tilde{A}$  est inversible de taille  $t$ , son rang vaut  $t$ , d'où  $t \leq \text{rg}(A)$ .

On peut reprover le théorème de cours.

On cherche à montrer que le rang de  $A$  est au moins égal à  $t$ , c'est-à-dire  $t \leq \text{rg}(A)$ . Pour cela, il suffit d'exhiber  $t$  colonnes de  $A$  qui forment une famille libre.

Quitte à renuméroter les lignes et les colonnes, supposons que  $\tilde{A}$  se situe « en haut à gauche » de  $A$ .

Notons  $C_i$  les colonnes de  $A$  qui sont de taille  $n$  et  $\tilde{C}_i$  les colonnes de  $\tilde{A}$  qui sont de taille  $t$ .

Montrons que la famille  $(C_1, \dots, C_t)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est libre.

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  des scalaires tels que  $\sum_{k=1}^t \lambda_k C_k = 0$ .

En ne retenant que les  $t$  premières lignes, on obtient une égalité de  $\mathcal{M}_{t,1}(\mathbb{K})$  et c'est exactement

$$\sum_{k=1}^t \lambda_k \tilde{C}_k = 0.$$

$$\text{Cela s'écrit aussi } \tilde{C} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme  $\tilde{C}$  est supposée inversible, on en déduit que les  $\lambda_k$  sont nuls.

- Montrons que  $\text{rg}(A) \in T$ .

On va montrer qu'il existe une sous-matrice de  $A$  inversible de taille  $\text{rg}(A)$ .

Notons  $r = \text{rg}(A)$  pour alléger.

Par définition du rang, on peut trouver  $r$  colonnes de  $A$  qui forment une famille libre.

Notons  $\hat{A}$  la matrice rectangulaire obtenue à partir de ces  $r$  colonnes.

Comme ces  $r$  colonnes forment toujours une famille libre (on n'a rien fait dessus !), la matrice  $\hat{A}$  est de rang  $r$ .

Utilisons maintenant le fait que le rang d'une matrice est aussi le rang de ses vecteurs lignes.

On peut donc trouver  $r$  lignes de  $\hat{A}$  qui forment une famille libre.

Notons  $\tilde{A}$  la matrice ainsi obtenue, qui est donc carrée de taille  $r$ , et est issue de  $\hat{A}$  (qui elle-même est issue de  $A$ ).

Résumons. Après ces deux extractions (ligne et colonne), on a obtenu une sous-matrice  $\tilde{A}$  de  $A$  carrée de taille  $r$  et qui est de rang  $r$ . Ainsi,  $\tilde{A}$  est inversible.

On a donc montré que  $r \in T$ .

1. On rappelle que  $\text{rg}(KL) \leq \min(\text{rg } K, \text{rg } L)$ .

Ainsi, on a les deux inégalités  $\text{rg } A \leq \text{rg } K$  et  $\text{rg } A \leq \text{rg } L$ .

Supposons  $\text{rg } A = 1$ . Alors, on a  $1 \leq \text{rg } K$ .

Or  $\text{rg } K$  est toujours  $\leq 1$ . D'où l'égalité  $\text{rg } K = 1$  (idem pour  $L$ ).

Supposons  $K$  et  $L$  de rang 1. Donc  $K$  et  $L$  ne sont pas nulles.

Comme  $\text{Col}_i(A) = \ell_i K$ , on en déduit que  $\text{Im } A = \text{Vect}(\ell_1 K, \dots, \ell_n K) = \text{Vect}(K)$ .

Donc la famille  $(K)$  est une base de l'image de  $A$ .

Donc  $\text{Im } A$  est de dimension 1.

2. Pour la deuxième partie de la question, on écrit que  $A^2 = K(LK)L = K[\lambda]L = \lambda A$ .

On identifie  $\lambda$  en disant que  $\lambda = \text{tr}(LK)$  qui vaut donc  $\text{tr}(KL) = \text{tr } A$ .

Ci-après, mes notes manuscrites.

1. D'après le cours, on a :

$$\text{rg}(\underbrace{KL}_A) \leq \min(\text{rg} K, \text{rg} L)$$

Ici  $K$  est une colonne donc  $\text{rg} K \leq 1$

$L$  est une ligne donc  $\text{rg} L \leq 1$ .

D'où  $\text{rg} A \leq 1$

• Si  $\text{rg} A = 1$

Ma  $K$  et  $L$  sont de rang 1.

• Ma d'abord  $\text{rg} K = 1$

Par l'absurde : si  $\text{rg} K \neq 1$

Comme  $\text{rg} K \leq 1$ , on a donc  $\text{rg} K = 0$

Ainsi  $K$  est la colonne nulle.

Donc  $A$  est la matrice nulle donc  $\text{rg} A = 0$

ce qui contredit  $\text{rg} A = 1$ .

• On fait le même raisonnement avec la ligne  $L$ .

Ou BIEN :

On remarque que  $A^T = L^T K^T$

On applique le point précédent à la colonne  $L^T$  et la matrice  $A^T$  en exploitant le fait que le rang est invariant par transposition.



$$\text{Ainsi } \text{Col}_j A = l_j K$$

$$\text{D'où } \text{Vect}(\text{Col}_1 A, \dots, \text{Col}_n A) = \text{Vect}(l_1 K, \dots, l_n K)$$

Comme  $L$  est de rang 1, il existe au moins un indice  $i$  tq  $l_i \neq 0$ .

(Bien comprendre cela, c'est le point clé de la preuve)  
Donc  $\text{Vect}(l_1 K, \dots, l_n K) = \text{Vect}(K)$

Comme  $K$  est de rang 1,  $\dim \text{Vect}(K) = 1$

$$\text{Ainsi } \dim \text{Vect}(\text{Col}_1 A, \dots, \text{Col}_n A) = 1$$

$$\text{D'où } \text{rg } A = 1$$

2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  de rang 1.

$\forall \exists K, L \dots$

Comme  $A$  est de rang 1, l'espace vectoriel engendré par les colonnes de  $A$  est de dimension 1, donc possède une base de cardinal 1.

Il existe donc une colonne non nulle  $K$  tq

$$\text{Vect}(\text{Col}_1 A, \dots, \text{Col}_n A) = \text{Vect}(K)$$

Ainsi il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tq

$$\begin{cases} \text{Col}_1 A = \lambda_1 K \\ \vdots \\ \text{Col}_n A = \lambda_n K \end{cases}$$

On a donc  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 K & \vdots & \lambda_n K \end{bmatrix}$

Posons  $L = [\lambda_1 \dots \lambda_n] \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ .

Par construction, on a alors  $A = KL$ .

Bonus La colonne  $K$  peut être prise parmi les colonnes de  $A$  car

"de toute famille génératrice, on peut extraire une base". (th de la base extraite)

●  $M_q \exists \lambda \in K, A^2 = \lambda A$  puis que  $\lambda = \text{tr} A$ .

Comme  $A$  est de rang 1, on peut trouver  $K, L$  colonne, ligne tq  $A = KL$ .

$$\text{Ainsi } A^2 = (KL)(KL)$$

$$= K(LK)L$$

$$= K[\lambda]L$$

$LK \in M_1(K)$  est une matrice carrée de taille 1

$$= \lambda KL$$

$$= \lambda A.$$

$\lambda$  est donc l'unique coeff de  $LK$  céd  $LK = [\lambda]$   
Donc  $\lambda = \text{tr}(LK)$ .

$$\text{Or } \text{tr}(LK) = \text{tr}(KL) \quad (\text{cours})$$

$$\text{Donc } \lambda = \text{tr} A.$$

— On a  $\text{Im } B \subset \text{Ker } A$ .

En appliquant  $\dim$  et en utilisant le théorème du rang, on a  $\text{rg } B \leq n - \text{rg } A$ .

D'où  $\text{rg } A + \text{rg } B \leq n$ .

— Par ailleurs, on a toujours  $\text{rg}(A + B) \leq \text{rg } A + \text{rg } B$ .

Par hypothèse, on a  $\text{rg}(A + B) = n$ , d'où  $n \leq \text{rg } A + \text{rg } B$ .

Soit  $j$  fixé.

On a  $\text{Col}_j(AB) = A\text{Col}_j(B)$  (cette formule est « bas de gamme »).

En écrivant  $A$  par blocs avec ses colonnes  $A_1, \dots, A_p$ , ainsi  $A$  est codée par la **ligne** de ses colonnes, on a

$$\text{Col}_j(AB) = A\text{Col}_j(B) = [A_1 \ \cdots \ A_p] \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p A_i b_{i,j}$$

Résumons

$$\text{Col}_j(AB) = \sum_{i=1}^p \text{Col}_i(A) b_{i,j}$$

D'où

$$\text{Col}_j(AB) \in \text{Vect}(\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_p(A))$$

N'importe quel argument « avec les mains » me convient pour montrer que  $\text{rg } M = \sum_{i=1}^s r_i$ .

Si les  $A_i$  valent toutes une même matrice  $A$ , alors  $\text{rg } M = s \times \text{rg } A$ .

**Remarque.** Si on estime que la preuve avec les mains n'est pas une vraie preuve (ce qui ici n'est pas le cas!), alors on peut aller chercher des matrices  $P_i, Q_i$  inversibles de bonne taille telles que  $A_i = P_i J_{r_i} Q_i$ .

En posant  $P$  et  $Q$  les matrices suivantes

$$P = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & P_s \end{array} \right] \quad Q = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & Q_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & Q_s \end{array} \right].$$

qui sont inversibles (WHY?), on a

$$M = P \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & J_{r_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & J_{r_s} \end{array} \right] Q$$

ce qui montre que  $M$  est de rang  $\sum_{i=1}^s r_i$ .

En fait, quand on analyse de près cette preuve, on voit qu'il faut démontrer que  $P$  et  $Q$  sont inversibles, c'est-à-dire de rang maximal, et donc on est en train de résoudre l'exercice-dans-l'exercice (vive la Vache qui rit!).

Pour montrer que  $P$  est inversible, il suffit d'apporter l'inverse et de faire un calcul matriciel par blocs.

Il faut penser à raisonner matriciellement.

Dans une bonne base  $\mathcal{C}$ , la matrice de  $f$  est la matrice bloc suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & A \end{array} \right].$$

Quelle est cette bonne base ?

La base canonique, mais attention, ordonnée de cette façon (pour m'en souvenir, je dis « l'indexation obtenue en parcourant les colonnes », ce qui est moral puisque l'on remplit les matrices en colonnes), c'est-à-dire :

$$\mathcal{C} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{nn})$$

On constate matriciellement que  $\text{rg Mat}_{\mathcal{C}}(f) = n \text{ rg } A$ , d'où  $\text{rg } f = n \text{ rg } A$ .

**En colle.** On doit commencer par traiter les cas faciles avant de se lancer dans la totale, surtout si on ne sait pas faire.

Par exemple, si  $A$  est nulle, il est facile de montrer que  $\text{rg } f = 0$ .

Si  $A$  est inversible, il est facile de montrer que  $\text{rg } f = n^2$  (WHY?).

1. On ne change pas le caractère inversible d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes.

On a donc les équivalences :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{non inversible}$$



$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{non inversible}$$



$$L_2 \leftarrow L_2 - (1 - \lambda)L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2 + 3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{non inversible}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (-\lambda^2 + 3\lambda)(3 - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 3)(3 - \lambda) = 0$$

**BILAN**  $A - \lambda I$  non inversible  $\Leftrightarrow \lambda \in \{0, 3\}$

- Il y a 2 scalaires  $\lambda$  tels que la matrice  $A - \lambda I$  de taille 3 soit non inversible.

En fait, on peut dire qu'il y a 3 scalaires  $\lambda$  mais comptés avec multiplicité.

- Calculons  $\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} \dim \text{Ker}(A - \alpha I)$

Cette somme porte sur  $\mathbb{K}$  qui est un ensemble infini.  
 Donc cette somme n'est pour l'instant pas bien définie.  
 Disons que sans justification, cela n'a aucun sens de parler de cette somme.

Pour  $\alpha \in \mathbb{K}$  tq  $A - \alpha I$  est inversible,  
 alors  $\text{Ker}(A - \alpha I) = \{0\}$  donc sa dimension est nulle.

Ainsi:

$$\text{Somme} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ A - \lambda I \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})}} \dim \text{Ker}(A - \lambda I)$$

Cette fois-ci, la somme porte sur les  $\lambda \in \mathbb{K}$  tq  $A - \lambda I$  est non inversible. Et il y a un nombre fini de tels  $\lambda$ .

Pour de tels  $\lambda$ , déterminons  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I)$ .

Pour cela, on peut déterminer une base de  $\text{Ker}(A - \lambda I)$   
ou bien, utiliser le théorème du rang.

• Pour  $\lambda=0$ , on a  $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Cette matrice est de rang 2, donc son noyau est de dimension 1.

Pour info, une base du noyau est  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ .

• Pour  $\lambda=3$ , on a  $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cette matrice est de rang 1, donc son noyau est de dimension 2.

Pour info, une base du noyau est  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

BILAN. La somme cherchée vaut  $1 + 2 = 3$ .

Pour notre matrice  $A \in M_3(\mathbb{K})$ , on a :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} \dim \text{Ker}(A - \alpha I) = 3.$$

2. Déjà fait dans 1.

3. Comme il n'y a pas unicité des bases, on n'a pas forcément la même réponse et ce n'est pas grave.

Une base de  $\text{Ker } A$  est  $\mathcal{B}_0 = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

Une base de  $\text{Ker } (A - 3I)$  est  $\mathcal{B}_3 = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

La concaténation  $\mathcal{C} = \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{B}_3$  est la famille :

$$\mathcal{C} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Pour l'instant, cette famille est quelconque.

On peut juste dire qu'elle est de cardinal 3 (autant que la dimension de  $M_{3,1}(K)$ ).

On voit (presque à l'œil nu) que cette famille est libre. En effet soit  $\alpha, \beta, \gamma \in K$  tq  $\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0$

Alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En effectuant  $l_2 \leftarrow l_2 + l_1$ , on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale donc est inversible.

Donc  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$

Ainsi, la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

**BILAN**

$\mathcal{B}$  est une famille libre de  $M_{3,1}(\mathbb{K})$  de cardinal 3  
 $\dim M_{3,1}(\mathbb{K}) = 3$

Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $M_{3,1}(\mathbb{K})$ .

4. On peut fournir une réponse purement matricielle en mq il existe  $P \in GL_3(\mathbb{K})$  tq  $D = P^{-1}AP$ .

Mais la solution paraît un peu magique!

Posons  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   $\triangle!$  à l'ordre des colonnes

Cette matrice est inversible (WHY?)

On a (faites le calcul):  $PD = AP$  où  $D = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ .

Donc  $A$  et  $D$  sont semblables.

On peut fournir la même solution mais rédigée avec des endomorphismes.

Considérons  $f: K^3 \rightarrow K^3$  l'endo canon associé à  $A$ .

Notons  $\mathcal{B}_{\text{can}}$  la base canonique de  $K^3$ .

Notons (encore)  $\mathcal{C}$  la base de  $K^3$  suivante:

$$\mathcal{C} = \left( \underbrace{(0, 0, 1)}_{\mu}, \underbrace{(1, -1, 0)}_{\nu}, \underbrace{(1, 1, 0)}_{\omega} \right)$$

On a

$$\begin{cases} f(\mu) = 3\mu & \text{car } A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{car } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(A-3I) \\ f(\nu) = 3\nu & \text{car } \dots \\ f(\omega) = 0 & \text{car } \dots \end{cases}$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{ccc|c} f(\mu) & f(\nu) & f(\omega) & \\ \hline 3 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 3 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{array}$$

$$\text{Posons } P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{B}_{\text{can}} \end{bmatrix}$$

Par la formule de chg<sup>t</sup> de bases, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f) P$$

$$\text{càd } D = P^{-1} A P$$

Posé par YG en 2023.

Je propose de remarquer que  $A^2 = 0$  (car  $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$ ).

D'après le théorème du rang et l'hypothèse  $\text{Ker } A = \text{Im } A$ , on a  $n = r + r$  où  $r = \text{rg}(A)$ .

Soit  $f_A$  l'ALCA à  $A$ .

On prend une base de l'image  $(e_1, \dots, e_r)$  (c'est-à-dire du noyau ici!).

On invente des antécédents  $e'_i$  aux  $e_i$ .

La famille  $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_r, e'_1, \dots, e'_r)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (je vous laisse montrer qu'elle est libre; comme elle est de « bon cardinal » ...)

Dans cette base  $\mathcal{C}$ , la matrice de  $f_A$  est

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f_A) = \left[ \begin{array}{c|c} 0_r & I_r \\ \hline 0_r & 0_r \end{array} \right] \quad \text{matrice que l'on note } N.$$

Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f_A) = A$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f_A) = N$ .

La formule de changement de bases nous dit que  $A$  et  $N$  sont semblables.

Idem pour  $B$  : la matrice  $B$  est semblable à la matrice  $N$ .

Ainsi,  $A$  et  $B$  sont semblables (puisque semblables à une même troisième).

1. Montrer qu'il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  deux polynômes tels que  $(X - \alpha)U + (X - \beta)V = 1$ .

On a

$$(X - \alpha) + (X - \beta) \times (-1) = \beta - \alpha$$

D'où

$$(X - \alpha) \times \frac{1}{\beta - \alpha} + (X - \beta) \times \frac{1}{\alpha - \beta} = 1$$

2. En élevant l'égalité précédente à la puissance  $p + q$ , on obtient des candidats!

De manière très générale (dans un anneau commutatif), si on a

$$a + b = 1$$

alors en élevant à la puissance  $p + q$ , on a d'après le binôme de Newton

$$\sum_{i+j=p+q} \frac{(p+q)!}{i!j!} a^i b^j = 1$$

Et en faisant trois paquets (en fonction de  $(i, j) = (p, q)$ ,  $(i \geq p$  et  $j < q)$  et  $(i < p$  et  $j \geq q)$ ), on obtient :

$$\frac{(p+q)!}{p!q!} a^p b^q + \sum_{\substack{i \geq p \\ j < q}} \frac{(p+q)!}{i!j!} a^i b^j + \sum_{\substack{i < p \\ j \geq q}} \frac{(p+q)!}{i!j!} a^i b^j = 1$$

En fait, deux paquets suffiraient, mais j'ai voulu symétriser l'écriture.

$$\frac{(p+q)!}{p!q!} a^p b^q + \left( \sum_{\substack{i \geq p \\ j < q}} \frac{(p+q)!}{i!j!} a^{i-p} b^j \right) a^p + \left( \sum_{\substack{i < p \\ j \geq q}} \frac{(p+q)!}{i!j!} a^i b^{j-q} \right) b^q = 1$$

Résumons. On est parti de  $a + b = 1$ . Et en élevant à la puissance  $p + q$ , on a obtenu

$$a^p s + b^q t = 1 \quad \text{avec } s = \left( \sum_{\substack{i \geq p \\ j < q}} \frac{(p+q)!}{i!j!} a^{i-p} b^j \right) + \frac{(p+q)!}{p!q!} b^q \quad \text{et } t = \left( \sum_{\substack{i < p \\ j \geq q}} \frac{(p+q)!}{i!j!} a^i b^{j-q} \right)$$

Utilisons ce principe dans notre contexte polynomial.

On a  $(X - \alpha)U + (X - \beta)V = 1$ , que l'on peut écrire  $A + B = 1$ .

En élevant à la puissance  $p + q$ , on obtient deux polynômes  $S$  et  $T$  tels que  $A^p S + B^q T = 1$ .

D'où  $(X - \alpha)^p \tilde{U} + (X - \beta)^q \tilde{V} = 1$ , avec  $\tilde{U} = US$  et  $\tilde{V} = VT$ .

3. Montrons que  $\text{Ker}((f - \alpha \text{id})^p)$  et  $\text{Ker}((f - \beta \text{id})^q)$  sont en somme directe.

Soit  $x \in \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^p) \cap \text{Ker}((f - \beta \text{id})^q)$ .

On utilise l'égalité de  $\mathbb{K}[X]$  :

$$U(X - \alpha)^p + V(X - \beta)^q = 1$$

On en fait une égalité de  $\mathcal{L}(E)$  :

$$U(f) \circ (f - \alpha \text{id})^p + V(f) \circ (f - \beta \text{id})^q = \text{id}$$

Puis une égalité de  $E$

$$(U(f) \circ (f - \alpha \text{id})^p)(x) + (V(f) \circ (f - \beta \text{id})^q)(x) = x$$

c'est-à-dire

$$U(f)((f - \alpha \text{id})^p(x)) + V(f)((f - \beta \text{id})^q(x)) = x$$

Comme  $x$  est dans l'intersection des noyaux, on obtient  $x = 0_E$ .

4. Ici, on suppose que  $(X - \alpha)^p(X - \beta)^q$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

Montrons que

$$E = \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right) \oplus \text{Ker} \left( (f - \beta \text{id})^q \right)$$

On a déjà montré que la somme est directe.

Il reste à montrer qu'un vecteur  $x \in E$  s'écrit  $y + z$  avec ...

On utilise l'égalité de  $\mathbb{K}[X]$  :

$$(X - \alpha)^p U + (X - \beta)^q V = 1$$

On en fait une égalité de  $\mathcal{L}(E)$  :

$$(f - \alpha \text{id})^p \circ U(f) + (f - \beta \text{id})^q \circ V(f) = \text{id}$$

Puis une égalité de  $E$

$$\left( (f - \alpha \text{id})^p \circ U(f) \right)(x) + \left( (f - \beta \text{id})^q \circ V(f) \right)(x) = x$$

c'est-à-dire

$$(f - \alpha \text{id})^p(U(f)(x)) + (f - \beta \text{id})^q(V(f)(x)) = x$$

On pose

$$y = (f - \alpha \text{id})^p(U(f)(x)) \quad \text{et} \quad z = (f - \beta \text{id})^q(V(f)(x))$$

de sorte que  $x = y + z$ .

Par hypothèse, on a  $(f - \alpha \text{id})^p \circ (f - \beta \text{id})^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , donc

$$y \in \text{Ker} \left( (f - \beta \text{id})^q \right) \quad \text{et} \quad z \in \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right)$$

5. Supposons  $E = \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right) \oplus \text{Ker} \left( (f - \beta \text{id})^q \right)$ .

Montrons que  $(X - \alpha)^p(X - \beta)^q$  est un polynôme annulateur de  $f$ , c'est-à-dire montrons que

$$(f - \alpha \text{id})^p \circ (f - \beta \text{id})^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad \left( (f - \alpha \text{id})^p \circ (f - \beta \text{id})^q \right)(x) = 0_E$$

Fixons  $x \in E$  et écrivons-le  $a + b$  avec  $a \in \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right)$  et  $b \in \text{Ker} \left( (f - \beta \text{id})^q \right)$

Ainsi, en utilisant que certains endomorphismes commutent :

$$\left( (f - \alpha \text{id})^p \circ (f - \beta \text{id})^q \right)(x) = \left( (f - \beta \text{id})^q \circ (f - \alpha \text{id})^p \right)(a) + \left( (f - \alpha \text{id})^p \circ (f - \beta \text{id})^q \right)(b)$$

Avec les appartenances de  $a$  et  $b$ , on obtient  $\left( (f - \alpha \text{id})^p \circ (f - \beta \text{id})^q \right)(x) = 0$ .

6. Rien à dire !

7. • Montrons déjà que les noyaux itérés de  $f - \alpha \text{id}$  stagnent à partir de l'indice  $p$ .

On a toujours  $\text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right) \subset \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^{p+1} \right)$ .

Montrons l'autre inclusion.

Soit  $x \in \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^{p+1} \right)$ .

Comme  $(X - \alpha)^p(X - \beta)^q$  est annulateur, on a

$$E = \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right) \oplus \text{Ker} \left( (f - \beta \text{id})^q \right)$$

A fortiori,  $x \in E$  et on peut donc écrire ce vecteur  $x$  en  $y + z$  avec  $y \in \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right)$  et  $z \in \text{Ker} \left( (f - \beta \text{id})^q \right)$ .

Ainsi  $x = y + z$ , d'où  $x - y = z$ .

On a donc un vecteur  $x - y$ , c'est-à-dire  $z$ , qui est dans l'intersection

$$\text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^{p+1} \right) \cap \text{Ker} \left( (f - \beta \text{id})^q \right)$$

Comme cette intersection est nulle, on a  $x = y$ , donc  $x \in \text{Ker} \left( (f - \alpha \text{id})^p \right)$ .

**Remarque importante.** En fait, tout repose sur ce lemme (que l'on a démontré dans un contexte particulier et que je vous laisse démontrer dans le cas général).

**Lemme.** Soit  $E = F \oplus G$  avec  $\begin{cases} F \subset F' \\ F' \cap G = \{0\} \end{cases}$  . Alors  $F = F'$ .

On peut le formuler de manière plus symétrique :

**Lemme.** Soit  $E = F \oplus G$  avec  $\begin{cases} F \subset F' \\ G \subset G' \\ F' \cap G' = \{0\} \end{cases}$  . Alors  $F = F'$  et  $G = G'$ .

Appliquons cela avec :

$$F = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^p) \quad F' = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^{p+1}) \quad G = \text{Ker}((f - \beta \text{id})^q) \quad G' = \text{Ker}((f - \beta \text{id})^{q+1})$$

• Notons  $I = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^i) = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^{i+1})\}$ .

On a démontré précédemment que  $p \in I$ .

De plus, on peut démontrer que si on a  $i_1$  et  $i_2$  dans  $I$ , alors  $\llbracket i_1, i_2 \rrbracket \subset I$ .

Et ainsi,  $\text{Ker}((f - \alpha \text{id})^{i_1}) = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^{i_2})$ .

Même remarque avec  $J = \{j \in \mathbb{N} \mid \text{Ker}((f - \beta \text{id})^j) = \text{Ker}((f - \beta \text{id})^{j+1})\}$ .

On pose  $i = \min I$  et  $j = \min J$ .

Comme  $p \in I$ , on en déduit que  $\text{Ker}((f - \alpha \text{id})^i) = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^p)$ .

Idem avec  $j$  et  $p$ .

Ainsi,

$$E = \text{Ker}((f - \alpha \text{id})^i) \oplus \text{Ker}((f - \beta \text{id})^j)$$

Ainsi le polynôme  $(X - \alpha)^i(X - \beta)^j$  est annulateur de  $f$ , donc est multiple du polynôme minimal.

Donc  $i \geq p$  et  $j \geq q$ .

Comme  $i = \min I$  et  $p \in I$ , on en déduit que  $p = \min I$ .

Idem, on montre l'égalité  $q = \min J$ .

1. Notons  $J$  l'ensemble des indices de colonnes tel que  $\text{coeff}_{jj}(D) \neq 0$ , de sorte que  $\text{card } J = \rho(D)$ .  
Alors la famille  $(C_j)_{j \in J}$  est une base de  $\text{Im } D$ .  
Donc  $\text{card } J = \dim(\text{Im } D)$ , c'est-à-dire  $\rho(D) = \text{rg}(D)$ .
2. Notons  $J$  l'ensemble des indices de colonnes tel que  $\text{coeff}_{jj}(T) \neq 0$ .  
Alors la famille  $(C_j)_{j \in J}$  est une famille libre de  $\text{Im } T$ .  
Donc  $\text{card } J \leq \dim(\text{Im } T)$ , c'est-à-dire  $\rho(T) \leq \text{rg}(T)$ .
3. Penser à la matrice identité que l'on modifie en permutant circulairement ses lignes, cette matrice est inversible et possède que des 0 sur sa diagonale. Ainsi,  $\text{rg} = n$  et  $\rho = 0$ .  
Penser à la matrice pleine de 1 dont le rang vaut 1 et  $\rho = n$ .

1. Idée. On utilise le fait qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Preuve. Montrons que  $\text{Sp}(T) = \{t_{11}, \dots, t_{nn}\}$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\text{On a } T - \lambda I = \begin{bmatrix} t_{11} - \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & t_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} T - \lambda I \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_{ii} - \lambda = 0 \\ &\iff \lambda \in \{t_{11}, \dots, t_{nn}\} \end{aligned}$$

D'où  $\text{Sp}(T) = \{t_{11}, \dots, t_{nn}\}$ .

2. Pour construire une matrice  $T$  triangulaire telle que  $\text{Sp}(T) = \{3\}$ , on peut considérer la matrice  $3I + E_{11}$

$$T = \begin{bmatrix} 3 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

3. Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice  $C - \lambda I$ .  
Après calculs (que vous devez faire), on trouve que  $P = X^3 - 1$  convient.  
C'est bien un polynôme unitaire de degré 3.
4. On rappelle que les racines de  $X^3 - 1$  sont les racines 3<sup>ème</sup> de l'unité : dont une seule est réelle (à savoir 1), les deux autres sont complexes conjuguées ( $j$  et  $j^2$ ).  
D'après la question précédente, on a

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \text{Rac}_{\mathbb{R}}(X^3 - 1) = \{1\} \quad \text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \text{Rac}_{\mathbb{C}}(X^3 - 1) = \{1, j, j^2\}$$

5. Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

On a  $B - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$ .

D'où l'équivalence  $B - \lambda I \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A - \lambda I \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  (WHY, ce n'est pas complètement évident).

Puis, on récupère l'équivalence  $\lambda \notin \text{Sp}(B) \iff \lambda \notin \text{Sp}(A)$ .

Puis (WHY ?)  $\lambda \in \text{Sp}(B) \iff \lambda \in \text{Sp}(A)$ .

Bilan.  $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(A)$ .

6. Penser à

$$A = \begin{bmatrix} 3 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = 3I$$

Ces deux matrices ont même spectre mais ne sont pas semblables.

En effet, une matrice semblable à  $3I$  est égale à  $3I$ .

Et la matrice  $A$  n'est visiblement pas égale à  $3I$ .

7. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ .

Alors  $M - \lambda I$  n'est pas inversible, donc on peut trouver une colonne  $X$  non nulle telle que  $(M - \lambda I)X = 0$ , c'est-à-dire telle que  $MX = \lambda X$ .

On démontre alors que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k X = \lambda^k X$ , puis que  $P(M)X = P(\lambda)X$ .

Comme  $P$  est annulateur de  $M$ , on a  $P(\lambda)X = 0$ .

Comme  $X$  n'est pas la colonne nulle, on a  $P(\lambda) = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda \in \text{Rac}(P)$ .

1. Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .  
Considérons  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $T$ .  
On veut montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^p = 0$ .  
Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et on pose  $F_0 = \{0\}$ .  
En particulier, on a  $F_n = E$ .  
Comme  $T$  est triangulaire, disons supérieure, on a  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(F_k) \subset F_{k-1}$ .  
On peut montrer par récurrence sur  $p$  que  $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^p(F_n) \subset F_{n-p}$ .  
En particulier, pour  $p = n$ , on a  $f^n(E) \subset \{0\}$ , c'est-à-dire  $f^n = 0$ .
2. Soit  $N$  nilpotente et soit  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $N$ .