

Intégration

I Intégrale des fonctions en escalier	2
Subdivision	
Fonctions en escalier	
Intégrale des fonctions en escalier	
Propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier	
Cas particulier des fonctions réelles	
II Intégrale des fonctions continues par morceaux	6
Fonctions continues par morceaux	
Aparté (continuité uniforme)	
Définition de l'intégrale!	
Propriétés de l'intégrale pour les fonctions CPM	
Cas particulier des fonctions réelles	
Symétrie, translation, périodicité	
Fonctions à valeurs complexes	
III Sommes de Riemann	13
IV Intégration et dérivation	14
Existence d'une primitive pour une fonction continue	
Intégration par parties	
Changement de variable	
V Formules de Taylor globales.	16
Formule de Taylor avec reste intégral	
Inégalité de Taylor-Lagrange	



On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.

On considère le segment $[a, b]$, qui est non trivial (car $a \neq b$).

I. Intégrale des fonctions en escalier

Subdivision

1

Définition.

- Une *subdivision* du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (x_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que $a = x_0 < \dots < x_n = b$.
Les x_k s'appellent les points de la subdivision.
- Le *support* de la subdivision σ , noté $\text{supp}(\sigma)$, est l'ensemble des valeurs prises par la suite, à savoir $\text{supp}(\sigma) = \{x_k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.
- Le *pas* de la subdivision σ est l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision, à savoir $\max_{0 \leq k < n} (x_{k+1} - x_k)$.

- **Subdivision régulière.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite finie $\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une subdivision de $[a, b]$.
Elle est dite *régulière* (la différence entre deux termes consécutifs est constante) et son pas est $\frac{b-a}{n}$.

- **Subdivision associée à une partie.**

Soit $X = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ une *partie* finie du segment $[a, b]$ contenant a et b .

Sans perte de généralités, on peut supposer que les ξ_i sont ordonnés.

On pourra dire que la *partie* X est une subdivision de $[a, b]$.

En toute rigueur, il faudrait parler de la *famille* $(\xi_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ plutôt que de la *partie* $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

2

Définition. Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

- On dit que σ' est *plus fine* que σ lorsque $\text{supp}(\sigma) \subset \text{supp}(\sigma')$.
- On appelle *union* de σ et σ' , notée $\sigma \vee \sigma'$, la subdivision de support $\text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\sigma')$.

3

preuve

Proposition. Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

Il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que les subdivisions σ et σ' .

4

Définition. Une fonction f définie sur le *segment* $[a, b]$ est *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ définie sur l'**ouvert** $]x_k, x_{k+1}[$ est constante.
Une telle subdivision est dite *adaptée* à f .

- **Notation.** On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- **Dessin.** On voit qu'il n'y a aucune contrainte quant aux valeurs de f aux points x_k de la subdivision. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, voici un dessin :

5

Proposition (exemples).

- Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction définie sur $[a, b]$, constante égale à c sauf éventuellement en un nombre fini de points, est en escalier.
- Soit ξ un point de $[a, b]$. La fonction indicatrice $1_{\{\xi\}}$ restreinte à $[a, b]$ est en escalier.
- La fonction partie entière restreinte à $[a, b]$ est en escalier.
- La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ restreinte à $[a, b]$ n'est **pas** en escalier.

- **Stabilité par restriction.** La restriction à un *segment* d'une fonction en escalier est encore en escalier.
- **Aspect borné.** Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs et est donc bornée. Que dire de la réciproque, c'est-à-dire une fonction bornée est-elle en escalier?

6

preuve

Lemme.

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier.
Soit σ une subdivision adaptée à f .
Alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f .
- Soit f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions en escalier.
Il existe une subdivision adaptée à f et g .

7

preuve

Proposition (opérations).

- **Linéarité.** Une combinaison linéaire de fonctions en escalier est en escalier.
- **Produit.** Le produit de deux fonctions en escalier est en escalier.
- **Module/valeur absolue.** Le module d'une fonction en escalier est en escalier.

- **Structure.** L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

Intégrale des fonctions en escalier

- **Définition.** Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

À toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ adaptée à f , on associe le scalaire :

$$S_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

où ξ_k est n'importe quel point de l'**ouvert** $]x_k, x_{k+1}[$.

On peut prendre $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

- **Remarque importante.**

Les valeurs prises par f aux points du support de σ n'interviennent pas dans le calcul de $S_\sigma(f)$.

- **Dessin.**

8

preuve

Lemme. Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Soit σ et σ' deux subdivisions adaptées à f .

Alors

$$S_\sigma(f) = S_{\sigma'}(f)$$

9

Définition.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier. Alors l'intégrale de f est :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

où $\begin{cases} \sigma = (x_0, \dots, x_n) \text{ est n'importe quelle subdivision adaptée à } f \\ \xi_k \text{ n'importe quel point de }]x_k, x_{k+1}[\end{cases}$

- **Interprétation géométrique.** Pour une fonction en escalier f *réelle positive*, l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ représente la somme des aires des rectangles délimités par sa courbe représentative.

C'est donc l'aire de la portion du plan contenue entre l'axe Ox et la courbe représentative de f .

Pour une fonction réelle non nécessairement positive, il en est de même, mais les portions situées en dessous de l'axe Ox sont comptées négativement. On parle de l'*aire algébrique*.

- **Exemple important.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

Si f est constante égale à C sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $\int_{[a,b]} f = (b-a)C$.

Si f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $\int_{[a,b]} f = 0$.

- **Exemple.** Soit f la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ (qui n'est pas un segment!).

On a vu précédemment que $f|_{[-1, \pi]}$ est une fonction en escalier.

Comme on vient de définir l'intégrale d'une fonction en escalier, on peut se demander ce que vaut l'intégrale de $f|_{[-1, \pi]}$. Alors, vous pariez sur quoi?

Propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier

10
preuve

Proposition (inégalité triangulaire). Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors $|f| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, et on a $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

11
preuve

Proposition (linéarité). Soit $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et on a

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

12

Question. Montrer que l'application $\Phi: \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle.

$$f \mapsto \int_{[a,b]} f$$

Quel est le rang de Φ ? Que dire de $\text{Ker } \Phi$?

13
preuve

Proposition (Relation de Chasles). Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in]a, b[$.

Alors les fonctions $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont en escalier et $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Cas particulier des fonctions réelles

14
preuve

Proposition (Positivité et croissance).

Soit $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions en escaliers à valeurs réelles.

— **Positivité.** Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.

— **Croissance.** Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

- **Norme infinie.** Pour une fonction bornée sur un intervalle I , on peut définir $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

On a vu qu'une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ prend un nombre fini de valeurs et est donc bornée. On peut donc ainsi parler de sa norme infinie $\|f\|_\infty$.

Pour une fonction en escalier f (à valeurs réelles ou complexes), on a (WHY?) $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq (b-a) \|f\|_\infty$.

Objectif à venir

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

Nous allons définir l'intégrale de f , pourvu que f soit « raisonnable » (nous allons voir ce que l'on met derrière cet adjectif).

Bien sûr, pour une fonction à valeurs *réelles positives*, cette intégrale mesurera l'aire de la portion du plan contenue entre l'axe Ox et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Pour une fonction réelle non nécessairement positive, il s'agira de l'aire algébrique.

II. Intégrale des fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux

15

Définition. Une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ est *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle **ouvert** $]x_k, x_{k+1}[$

- est continue et
- est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à f .

• **Reformulation.** Les deux conditions s'énoncent également :

- la restriction $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est continue et
- la restriction $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ admet des limites finies en x_k et x_{k+1} .

• **Notation.** On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

• **Dessin.** Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

• **Exemple.** Toute fonction en escalier est CPM.

Évidemment, toute fonction continue est CPM.

• **Exemple/Contre-exemple.**

$$f: [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• **Stabilité par restriction.** La restriction d'une fonction CPM est encore CPM.

• **Aspect borné.** Une fonction CPM est bornée, mais n'atteint pas nécessairement ses bornes (WHY?).
Que dire de la réciproque?

16

Lemme.

- Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction CPM.
Soit σ une subdivision adaptée à f .
Alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f .
- Soit f et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions CPM.
Il existe une subdivision adaptée à f et g .

17

preuve

Proposition (opérations).

- **Linéarité.** Une combinaison linéaire de fonctions CPM est CPM.
- **Produit.** Le produit de deux fonctions CPM est CPM.
- **Module/valeur absolue.** Le module d'une fonction CPM est CPM.

• **Structure.**

L'ensemble $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

Aparté (continuité uniforme)

Nous allons introduire une notion bien pratique sur l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

18 Définition. Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ **bornée**, on pose :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

C'est la **norme infinie** de f .

Cette définition a bien du sens, car f est supposée bornée.

19 Proposition. La norme infinie vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty}$ (homogénéité)
- $\forall f, g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ (inégalité triangulaire)
- $\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|f\|_{\infty} = 0 \implies f = 0$ (séparation)

• **Rappel.** Une fonction CPM est bornée (mais n'atteint pas nécessairement ses bornes).

Ainsi, $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$.

Objectif. On va approximer une fonction CPM par des fonctions en escalier.

20 Proposition (Approximation uniforme).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ une fonction continue par morceaux (donc définie sur un segment).

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $\|f - \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

La preuve de ce théorème est hors programme. Mais nous allons essayer d'en esquisser les grandes lignes. Nous allons avoir besoin d'une nouvelle notion, celle « d'uniforme continuité ».

• **Définition (hors programme).** Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

— On dit que f est *continue* sur I lorsque f est continue en tout point a de I , c'est-à-dire lorsque

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

— On dit que f est *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in I, |x - x'| \leq \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

• **Explication.** La différence entre la continuité et la continuité uniforme est l'ordre des quantificateurs.

Grosso modo, les deux notions reposent sur le fait que si l'on veut un contrôle ε -précis en sortie, il faut un contrôle δ -précis en entrée.

Pour la continuité, le δ dépend à la fois de ε mais aussi du point a où l'on affirme la continuité :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in I, \exists \delta_a > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Il est possible par exemple que le contrôle demandé en entrée soit de plus en plus exigeant au fur et à mesure que l'on se rapproche d'un point problématique ou de l'infini.

Les fonctions uniformément continues sont précisément celles pour lesquelles, à ε fixé, un seul δ convient pour tous les points $a \in I$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \in I, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

• **Exemple.** La fonction $f : [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, car grosso modo, à ε fixé,

$$x \mapsto x^2$$

le δ_a correspondant à un $a \in [3, +\infty[$ devient de plus en plus minuscule à mesure que a augmente, et aucun $\delta > 0$ ne conviendra pour tous les $a \in [3, +\infty[$.

• **Autre exemple.** La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue et bornée, mais n'est pas uniformément continue sur $[3, +\infty[$. La preuve est délicate et n'est pas du tout exigible d'un élève de PCSI.

Preuve. On va considérer deux suites (x_n) et (x'_n) telles que $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| \not\rightarrow 0$.

Par exemple, $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $x'_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ conviennent.

• **Exercice (faisable par un élève de PCSI).** Montrer qu'une fonction K -lipschitzienne est uniformément continue.

Et on peut déduire (avec l'inégalité des accroissements finis) qu'une fonction dérivable à dérivée bornée est uniformément continue.

• **Théorème de Heine (hors programme).**

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Définition de l'intégrale!

21

preuve

Théorème (définition de l'intégrale). Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

- Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f - \varphi_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Pour une telle suite de fonctions en escalier, la suite de scalaires $\left(\int_{[a, b]} \varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et la limite ne dépend pas du choix de (φ_n) .

On peut alors définir *l'intégrale* de f via

$$\int_{[a, b]} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \varphi_n$$

où $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de fonctions en escalier qui converge vers f au sens de la norme infinie.

22

Définition étendue. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Soit $c, d \in [a, b]$ non nécessairement ordonnés.

On pose

$$\int_c^d f = \begin{cases} \int_{[c, d]} f_{|[c, d]} & \text{si } c < d \\ -\int_{[d, c]} f_{|[d, c]} & \text{si } d < c \\ 0 & \text{si } c = d. \end{cases}$$

• **Remarque.**

Le scalaire $\int_c^d f$ se note aussi $\int_c^d f(t) dt$, notation dans laquelle la lettre t a le statut de variable muette.

23

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. La *valeur moyenne* de f est le nombre $\frac{1}{b-a} \int_{[a, b]} f$.

- **Autre définition.** La valeur moyenne est l'unique constante α qui vérifie $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} \alpha$.

Propriétés de l'intégrale pour les fonctions CPM

Les propriétés fondamentales de l'intégrale des fonctions en escalier s'étendent à l'intégrale des fonctions CPM par passage à la limite. Passons en revue toutes ces propriétés.

24 **Proposition (inégalité triangulaire).** Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors $|f| \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et on a $\left| \int_{[a, b]} f \right| \leq \int_{[a, b]} |f|$.

- **Attention.** Lorsque $c, d \in [a, b]$, la définition de $\int_c^d f$ conduit par disjonction de cas à l'inégalité :

$$\left| \int_c^d f \right| \leq \int_{\min(c, d)}^{\max(c, d)} |f|$$

25 **Proposition (linéarité).** Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

preuve

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et on a

$$\int_{[a, b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a, b]} f + \mu \int_{[a, b]} g.$$

- **Reformulation.** L'application $\Psi : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle.

$$f \mapsto \int_{[a, b]} f$$

Quel est le rang de Ψ ?

Que dire de $\text{Ker } \Psi$?

26 **Proposition.** Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Si f et g diffèrent seulement en un nombre fini de points, alors $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} g$.

27 **Proposition (relation de Chasles).**

preuve

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

— Soit $c \in]a, b[$. Alors :

Alors les fonctions $f|_{[a, c]}$ et $f|_{[c, b]}$ sont CPM et on a $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$.

— Soit $x, y, z \in [a, b]$. Alors :

$$\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f.$$

- **Remarque très importante.** Dans la relation de Chasles, les bornes sont quelconques (elles ne sont pas nécessairement ordonnées).

En revanche, dans l'inégalité triangulaire, les bornes sont ordonnées.

Proposition (Positivité et croissance).

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues par morceaux à valeurs réelles.

- **Positivité.** Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a, b]} f \geq 0$.
- **Croissance.** Si $f \leq g$, alors $\int_{[a, b]} f \leq \int_{[a, b]} g$.

• **En français.**

L'intégrale-dans-le-bon-sens d'une fonction réelle positive est un réel positif.

L'intégrale-dans-le-bon-sens conserve les inégalités.

• **Attention.** Lorsque f est positive sur $[a, b]$ et

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et si $c \geq d \in [a, b]$, alors $\int_c^d f \leq 0$.

On fera donc attention à l'ordre des bornes lors de l'utilisation de ces deux propriétés.

• **Intégration VERSUS Dérivation.**

De manière vague, la croissance dit que l'on peut « intégrer des inégalités ». Mais attention, il est crucial de s'assurer que les bornes de l'intégrale sont « dans le bon sens » avant d'intégrer une inégalité.

Il y a là une différence fondamentale entre l'intégration et la dérivation. Il est possible d'intégrer une inégalité mais jamais de la dériver.

On a $\forall t \in \mathbb{R}, \sin t \leq 1$ mais on n'a pas ~~$\forall t \in \mathbb{R}, \cos t \leq 0$~~

Il n'est pas non plus possible de « désintégrer » une inégalité.

On a (WHY?) $\int_{-1}^1 t \, dt \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{39} \, dt$ mais on n'a pas ~~$\forall t \in [-1, 1], t \leq \frac{1}{39}$~~

Proposition. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors f est bornée, donc $\|f\|_\infty$ existe et on a :

$$\left| \int_{[a, b]} f \right| \leq \|f\|_\infty (b - a).$$

De plus,

$$\forall c, d \in [a, b], \quad \left| \int_c^d f \right| \leq \|f\|_\infty |d - c|.$$

Théorème aux 3 hypothèses (critère de nullité d'une fonction continue). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue} \\ f \text{ positive} \\ \int_{[a,b]} f = 0 \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ est nulle sur } [a, b]$$

Une fonction *continue*, positive, d'intégrale nulle est nulle (sur le segment d'intégration).

- **Attention.** Si l'on enlève l'hypothèse de continuité, le théorème est archi faux! Penser à l'indicatrice d'un point.

- **Corollaire (stricte positivité).**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*.

Si f est non nulle, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

- **Dans la pratique.**

- On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue} \\ \forall t \in [a, b], f(t) \geq 0 \\ \exists t_0 \in [a, b], f(t_0) \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{[a,b]} f > 0$$

a fortiori

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue} \\ \forall t \in [a, b], f(t) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{[a,b]} f > 0$$

- On a aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ continues} \\ \forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t) \\ \exists t_0 \in [a, b], f(t_0) \neq g(t_0) \end{array} \right. \Rightarrow \int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$$

A fortiori,

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ continues} \\ \forall t \in [a, b], f(t) < g(t) \end{array} \right. \Rightarrow \int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$$

31

preuve

Proposition (parité, imparité).

Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction CPM.

— Si la fonction f est paire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

— Si la fonction f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

32

preuve

Lemme (invariance par translation).

Soit $T \in \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que, restreinte à tout segment de $\mathbb{R}$, elle soit continue par morceaux.

Pour tout $a < b$, on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x+T) dx$$

33

Proposition (périodicité).

Soit $T > 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ et T -périodique.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Fonctions à valeurs complexes

34

Proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction CPM. On a alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad \overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \bar{f}.$$

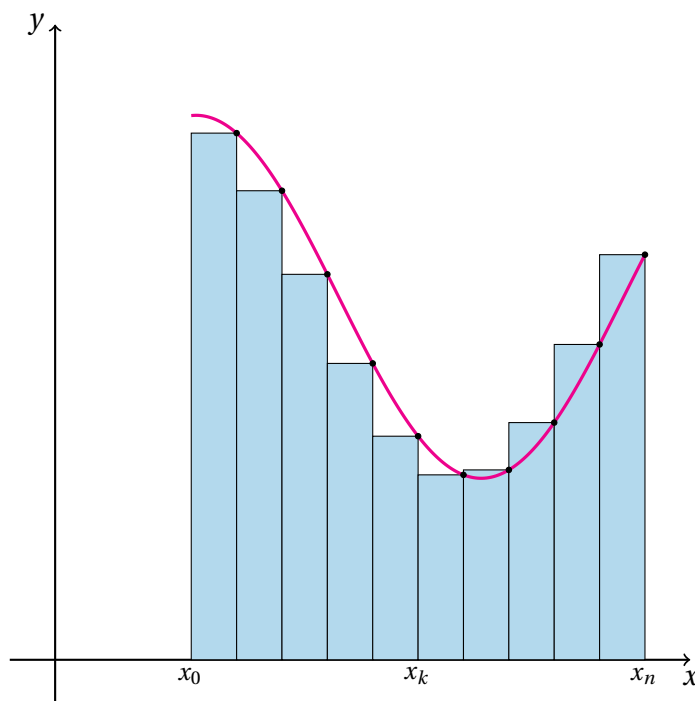
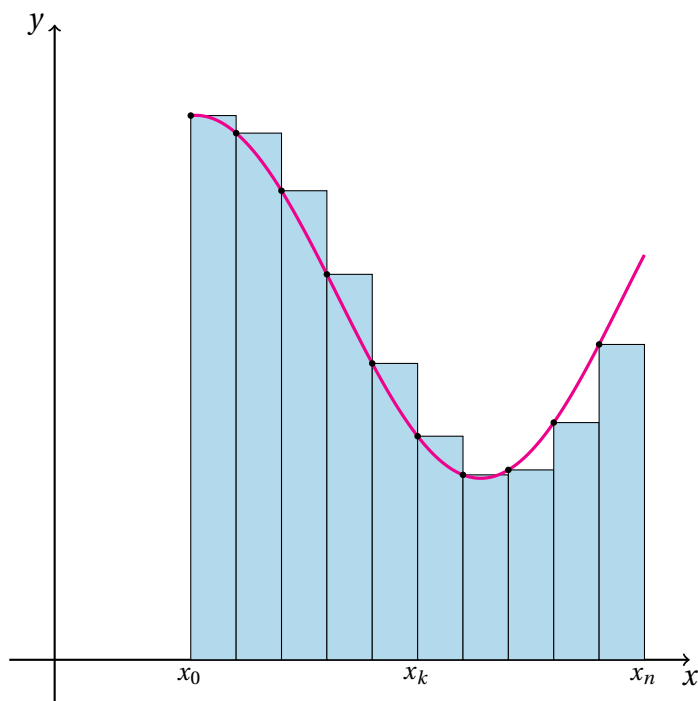
III. Sommes de Riemann

35

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Les sommes de Riemann (à gauche / à droite) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ associée à f sont :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$



36

Proposition (théorème des sommes de Riemann) Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_{[a,b]} f$.

• **Pour les yeux.**

Pour f CPM sur $[a, b]$, on a

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f$$

- **Précision.** Lorsque f est lipschitzienne, on peut montrer que l'erreur de la méthode des rectangles (méthode qui consiste à approcher l'intégrale par la somme de Riemann S_n ou S'_n) est en $O(\frac{1}{n})$, c'est-à-dire :

$$\left| \int_{[a,b]} f - S_n \right| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \left| \int_{[a,b]} f - S'_n \right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

• **Cas particulier** $[0, 1]$.

Pour f CPM sur $[0, 1]$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f$$

37

Question. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

IV. Intégration et dérivation

Dans cette partie, I désigne un intervalle non trivial.

Existence d'une primitive pour une fonction continue

38

Théorème fondamental de l'Analyse. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Soit $a \in I$.

— La fonction $\Phi : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable sur I , et sa dérivée vaut f .
$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

Donc Φ est UNE primitive de f .

— De plus, on a $\Phi(a) = 0$.

Donc Φ est LA primitive de f qui s'annule en a .

• **Corollaire important.** Une fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

• **Pas de réciproque.**

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive mais n'est pas continue!
$$x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée f , donc est une primitive de f .
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Une telle fonction f n'admet pas de limite en 0^+ (ni en 0^- d'ailleurs) donc n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.

On a ici un exemple de fonction « primitivable », mais non continue par morceaux.

• **Remarque.** Un exemple de fonction continue par morceaux, mais non primitivable est $\mathbb{1}_{\{\xi\}}$.

39
preuve

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

On a

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est UNE primitive de } f$$

40

Corollaire. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\forall a, b \in I, \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Intégration par parties

41

Proposition. Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

Changement de variable

42

Proposition. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors :

$$\forall \alpha, \beta \in J, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s) ds$$

- **Remarque.** La fonction φ de l'énoncé n'a pas besoin d'être bijective (même si elle le sera souvent dans nos exemples). On lui demande juste d'être de classe $\mathcal{C}^1$.
- **De G à D.** C'est quand on reconnaît une forme $(f \circ \varphi) \varphi'$. C'est en général « bas de gamme », car on peut se passer de la formule.
- **De D à G.** Il vaut avoir une idée géniale : celle d'introduire une bonne fonction φ .

Puis :

- on remplace s par $\varphi(t)$
- on remplace ds par $\varphi'(t) dt$
- on adapte les bornes.

V. Formules de Taylor globales

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

43

Définition (polynôme de Taylor d'une fonction).

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

Soit $a \in I$ (un point en lequel f est définie).

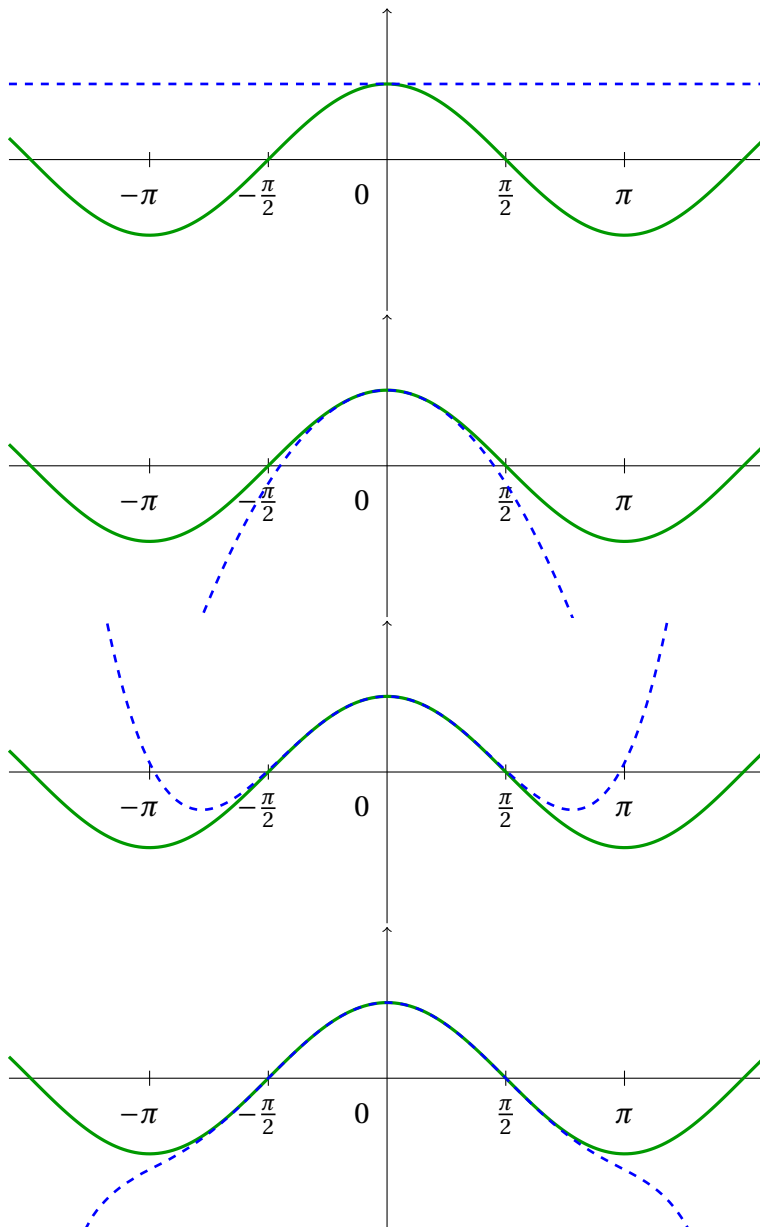
La fonction polynomiale, notée $\mathbb{T}_{n,a,f}$ (par Madame Tête), définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{n,a,f} : x &\mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

est appelée « fonction polynomiale de Taylor de f d'ordre n en a ».

En particulier,

$$\mathbb{T}_{0,a,f} : x \mapsto f(a) \quad \mathbb{T}_{1,a,f} : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) \quad \mathbb{T}_{2,a,f} : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$



Formule de Taylor avec reste intégral

44

Un calcul très utile. Soit a et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \dots\dots\dots$$

45

Proposition (Formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.

— On a

$$\forall a, b \in I, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt$$

— Soit $a \in I$. On a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

• **Autre écriture.** On a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \mathbb{T}_{n,a,f}(x) + \mathbb{R}_{n,a,f}(x) \quad \text{où} \quad \mathbb{R}_{n,a,f}(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Ainsi, f est égale à une fonction polynomiale + une fonction qui se présente sous la forme d'une intégrale (la variable x est enfouie au sein de l'intégrale et est présente dans la borne du haut de l'intégrale).

• **Cas particulier lorsque $0 \in I$.**

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

• **Remarque sur les hypothèses.** Pour écrire la formule à l'ordre n , la fonction est supposée de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. La première partie $\mathbb{T}_{n,a,f}$ fait intervenir les dérivées $f^{(0)}, \dots, f^{(n)}$ évaluées en a .

La deuxième partie $\mathbb{R}_{n,a,f}$ fait intervenir la dérivée $f^{(n+1)}$.

• **À propos du reste.** Le reste intégral ne se calcule quasiment jamais! En revanche, on peut le majorer en module (inégalité triangulaire).

• **Moyen mnémotechnique pour le reste.**

— **Avec le calcul très utile.** Il est censé vous aider à retenir le reste intégral (car on peut se dire dans sa tête « si $f^{(n+1)}$ est constante, alors le $\mathbb{R}$ doit fournir le terme suivant dans la partie régulière »).

— **Cas particulier : prendre pour f une fonction polynomiale.**

D'après le chapitre Polynômes, on a

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Ainsi, si f est polynomiale de degré $\leq n$, alors f est égale à $\mathbb{T}_{n,a,f}$!

On vérifie que l'on a bien dans ce cas $\mathbb{R}_{n,a,f} = 0$ (WHY?).

— **Cas particulier : prendre $n = 0$.**

Pour $f \in \mathcal{C}^1$, on a (WHY?) $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ que l'on peut interpréter comme

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) \frac{(b-t)^0}{0!} dt$$

46 Exemple à méditer Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $f : t \mapsto \ln(1 + t)$ au point $a = 0$ et à l'ordre n .

(RI) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dots\dots\dots$

En quoi l'égalité remarquable suivante (à montrer) est-elle différente de la précédente?

$$(\star) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (-1)^m \frac{t^m}{1+t} dt$$

Sauriez-vous montrer l'égalité des deux restes?

47

Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.

— On a

$$(1) \quad \forall a, b \in I, \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq K \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, b]$. Par exemple, $K = \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Nota Bene : $K = K_{n,a,b}$.

— Soit $a \in I$. On a

$$(2) \quad \forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, x]$. Par exemple, $K = \max_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Nota Bene : $K = K_{n,a,x}$.

- **Cas particulier.** Lorsque $0 \in I$, l'inégalité s'écrit :

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[\overset{\curvearrowright}{0}, x]$. Par exemple, $K = \max_{t \in [0, x]} |f^{(n+1)}(t)|$. NB : $K = K_{n,x}$.

- **À retenir.** La formule (2) est du type :

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \mathbb{T}_{n,a,f}(x) \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{ou encore} \quad \forall x \in I, \quad \left| \mathbb{R}_{n,a,f}(x) \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi, l'écart entre f et sa fonction polynomiale de Taylor d'ordre n en a (c'est-à-dire le reste intégral d'ordre n en a) est majoré en module par une certaine quantité dépendant de $f^{(n+1)}$, de a , de x , de n (en fait, de $n+1$).

- **Cas particulier.** L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n=0$, version (1), s'écrit :

$$\forall a, b \in I, \quad \left| f(b) - \mathbb{T}_{0,a,f}(b) \right| \leq K \frac{|b-a|^{0+1}}{(0+1)!}$$

À quoi cette inégalité vous fait-elle penser ?

- **Cas d'une fonction à valeurs réelles.** Version double inégalité.

Soit $\boxed{a < b}$ dans I .

On a

$$m \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où m est un minorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a, b]$ et M est un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a, b]$.

Par exemple, $m = \min_{t \in [a, b]} f^{(n+1)}(t)$ et $M = \max_{t \in [a, b]} f^{(n+1)}(t)$.

48 Question. Soit $x \in [0, 1]$. En appliquant la formule de Taylor reste intégral à une fonction bien choisie, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

49 Question.

(i) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

(ii) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$$

(iii) Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Intégration

preuve et éléments de correction

3

Prendre la subdivision $\sigma \vee \sigma'$.

6

• Soit σ' plus fine que $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$.

Commençons par le cas où σ et σ' diffèrent d'un point.

Considérons une subdivision σ' de $[a, b]$ telle que $\text{supp}(\sigma')$ contienne un point c de plus que $\text{supp}(\sigma)$.

Il existe $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $c \in]x_i, x_{i+1}[$ et on a :

$$\sigma' = (x_0, \dots, x_i, c, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x'_0, \dots, x'_{n+1}).$$

En distinguant les cas $\begin{cases} k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket \\ k = i \\ k = i+1 \\ k \in \llbracket i+2, n \rrbracket \end{cases}$ on vérifie que la fonction $f|_{]x'_k, x'_{k+1}[}$ est constante.

Donc σ' est adaptée à f .

On démontre alors le résultat par récurrence sur $\text{card}(\text{supp}(\sigma')) - \text{card}(\text{supp}(\sigma))$.

• Soit σ une subdivision adaptée à f , et σ' une subdivision adaptée à g .

Alors la subdivision $\sigma \vee \sigma'$ est plus fine que σ donc est adaptée à f .

Idem pour g .

Ainsi, la subdivision $\sigma \vee \sigma'$ est adaptée à f et g .

7

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et g (il en existe au moins une, cf. le lemme).

Alors les fonctions f et g sont constantes sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

Donc il en est de même de $\lambda f + \mu g, fg$.

Donc $\lambda f + \mu g$ et fg sont en escalier et σ en est une subdivision adaptée.

8

Notons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$, et α_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

— **Étape 1. Cas où σ' est plus fine que σ avec 1 point de différence.**

Considérons d'abord le cas où σ' est obtenue, à partir de σ , par ajout d'un nouveau point ξ .

Ainsi, σ' est de la forme :

$$\sigma' = (x_0, \dots, x_i, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Par définition, on a alors :

$$S_{\sigma'}(f) = \sum_{k=0}^{i-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k + (\xi - x_i) \mu_i + (x_{i+1} - \xi) \mu_i + \sum_{k=i+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k$$

En réunissant les deux termes centraux, il vient $S_{\sigma'}(f) = S_{\sigma}(f)$.

— **Étape 2. Cas où σ' est plus fine que σ .**

Par récurrence sur le nombre de points du support de σ' qui ne sont pas dans le support de σ , c'est-à-dire sur $d = |\text{supp}(\sigma')| - |\text{supp}(\sigma)|$.

— **Étape 3. Cas où σ' est quelconque.**

Posons $\sigma'' = \sigma \vee \sigma'$.

Cette subdivision σ'' est plus fine que σ , donc l'étape 2 dit que $S_{\sigma''} = S_{\sigma}$.

Idem avec σ' .

D'où

$$S_{\sigma}(f) = S_{\sigma''}(f) \quad \text{et} \quad S_{\sigma'}(f) = S_{\sigma''}(f).$$

Ainsi, $S_{\sigma}(f) = S_{\sigma'}(f)$.

10

Idée. L'inégalité triangulaire pour une somme de réels ou de complexes donne $|S_{\sigma}(f)| \leq S_{\sigma}(|f|)$.

La fonction $|f|$ est en escalier et toute subdivision de $[a, b]$ adaptée à f est adaptée à $|f|$.

En considérant une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ adaptée à f et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, un point ξ_i de $]x_i, x_{i+1}[$, l'inégalité triangulaire pour une somme donne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} f \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) |f(\xi_i)| \\ &= \int_{[a,b]} |f|. \end{aligned}$$

11

Introduire une subdivision adaptée à f et à g .

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et g (donc aussi à $\lambda f + \mu g$) et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, un point ξ_i de $]x_i, x_{i+1}[$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) (\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) g(\xi_i) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g. \end{aligned}$$

13

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, un point ξ_i de $]x_i, x_{i+1}[$.

Quitte à rajouter c au support de σ , on peut supposer que c fait partie de la subdivision. Disons $c = x_k$ où $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Alors $(x_0, \dots, x_k)$ et $(x_k, \dots, x_n)$ sont des subdivisions de $[a, c]$ et $[c, b]$ adaptées aux restrictions $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) + \sum_{i=k}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f. \end{aligned}$$

14

- Soit σ une subdivision adaptée à f . Si $f \geq 0$, l'inégalité $S_\sigma(f) \geq 0$ est immédiate.
- Puisque $g - f \geq 0$, par linéarité et positivité de l'intégrale $\int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} (g - f)$ est positif ou nul.

17

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et g .

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les restrictions $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ et $g|_{]x_k, x_{k+1}[}$ sont continues et sont prolongeables par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Donc il en est de même de $(\lambda f + \mu g)|_{]x_k, x_{k+1}[}$ et $(fg)|_{]x_k, x_{k+1}[}$.

20

Cas des fonctions continues. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue et donc il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ dès que $|x - y| \leq \delta$.

Fixons un tel δ ainsi que $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{b-a}{n} \leq \delta$.

Notons $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Considérons φ la fonction en escalier sur $[a, b]$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Montrons que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

— Pour $x = b$. Il est clair que $f(b) - \varphi(b) = 0$.

— Soit $x \in [a, b[$. Il existe k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$, et puisque $|x - a_k| \leq \frac{b-a}{n} \leq \delta$:

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

La fonction φ répond donc au problème.

Cas des fonctions continues par morceaux. Considérons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

notons f_i la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$

et $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ de f_i .

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la première partie, il existe, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, une fonction $\varphi_i \in \mathcal{C}([x_i, x_{i+1}], \mathbb{K})$ telle que $|\tilde{f}_i - \varphi_i| \leq \varepsilon$.

Considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]x_k, x_{k+1}[\text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \text{ où } k \in \llbracket 0, n \rrbracket. \end{cases}$$

La fonction φ répond au problème.

21

- Pour $n \in \mathbb{N}$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, il existe d'après APPROX une fonction en escalier ϕ_n telle que $|f - \phi_n| \leq \frac{1}{n+1}$. La suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient.

— Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que : $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Notons $\alpha_n = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi_n(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Montrons que la suite $\left(\int_{[a, b]} \phi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Tout d'abord, $|f|$ est bornée par une constante M .

Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\phi_n(x)| = |f(x) + (\phi_n(x) - f(x))| \leq |f(x)| + |\phi_n(x) - f(x)| \leq M + \alpha_n,$$

et donc, d'après les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left| \int_{[a, b]} \phi_n \right| \leq \int_{[a, b]} |\phi_n| \leq (b-a)(M + \alpha_n).$$

On conclut en remarquant que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, étant convergente, est bornée.

— D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une application γ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $\left(\int_{[a, b]} \phi_{\gamma(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

Notons L sa limite.

Par ailleurs, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$|\phi_n(x) - \phi_{\gamma(n)}(x)| \leq |\phi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \phi_{\gamma(n)}(x)| \leq \alpha_n + \alpha_{\gamma(n)},$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a, b]} \phi_n - \int_{[a, b]} \phi_{\gamma(n)} \right| &= \left| \int_{[a, b]} (\phi_n - \phi_{\gamma(n)}) \right| \\ &\leq \int_{[a, b]} |\phi_n - \phi_{\gamma(n)}| \leq (b-a)(\alpha_n + \alpha_{\gamma(n)}). \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, par extraction, $\alpha_{\gamma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \phi_n = L$.

— Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions en escalier telle que :

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \psi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Notons $\beta_n = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \psi_n(x)|$, pour $n \in \mathbb{N}$.

En remarquant que, pour tout $x \in [a, b]$, on a pour tout entier n :

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq |\phi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \psi_n(x)| \leq \alpha_n + \beta_n$$

on obtient :

$$\left| \int_{[a, b]} \phi_n - \int_{[a, b]} \psi_n \right| \leq \int_{[a, b]} |\phi_n - \psi_n| \leq (b-a)(\alpha_n + \beta_n),$$

et donc $\int_{[a, b]} \phi_n - \int_{[a, b]} \psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi $\left(\int_{[a, b]} \phi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a, b]} \psi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même limite.

25

Idée. Par passage à la limite à partir de fonctions en escalier.

En prenant $\epsilon = \frac{1}{n+1}$, on introduit deux suites de fonctions en escalier $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $|f - \phi_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|g - \psi_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Toutes les fonctions $\lambda\phi_n + \mu\psi_n$ sont en escalier.

De plus, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$|(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)(x) - (\lambda f + \mu g)(x)| \leq |\lambda| |\phi_n(x) - f(x)| + |\mu| |\psi_n(x) - g(x)| \leq \frac{|\lambda| + |\mu|}{n+1},$$

et par conséquent :

$$0 \leq \sup_{x \in [a, b]} |(\lambda f + \mu g - \lambda\phi_n - \mu\psi_n)(x)| \leq \frac{|\lambda| + |\mu|}{n+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite de fonctions en escalier $(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses pour $\lambda f + \mu g$ donc :

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} (\lambda f + \mu g) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} (\lambda\phi_n + \mu\psi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda \int_{[a, b]} \phi_n + \mu \int_{[a, b]} \psi_n \right) && \text{par linéarité de l'intégrale sur } \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \phi_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \psi_n && \text{par linéarité de la limite} \\ &= \lambda \int_{[a, b]} f + \mu \int_{[a, b]} g. \end{aligned}$$

27

Le cas où x, y, z ne sont pas distincts est facile.

Traitons le cas où ils sont tous distincts.

28

Utiliser l'inégalité triangulaire!

30

Raisonnement par l'absurde : supposer que f n'est pas la fonction nulle.

Alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$ (car f est positive).

Par continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad \frac{f(x_0)}{2} \leq f(t)$$

$$\text{Posons } \varphi : t \mapsto \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{si } t \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors φ est en escalier, et on a $\varphi \leq f$.

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\underbrace{\int_{[a, b]} \varphi}_{\lambda \frac{f(x_0)}{2}} \leq \int_{[a, b]} f$$

où λ est la longueur de l'intervalle non trivial $[a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Comme $\lambda \frac{f(x_0)}{2} > 0$, on a

$$0 < \int_{[a,b]} f$$

31

• Étape 1.

Pour toute $g \in CM([0, a], \mathbb{K})$, notons $\tilde{g}$ la fonction définie sur $[-a, 0]$ par

$$\forall x \in [-a, 0], \quad \tilde{g}(x) = f(-x)$$

Si $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision adaptée à g , il est clair que la fonction $\tilde{g}$ est continue par morceaux sur $[-a, 0]$ et que $\tilde{\sigma} = (-x_n, \dots, -x_0)$ en est une subdivision adaptée.

Montrons pour commencer que $\int_{[0,a]} g = \int_{[-a,0]} \tilde{g}$.

Cas d'une fonction en escalier Soit $\varphi \in Esc([0, a], \mathbb{K})$.

Considérons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ .

Soit i ; notons c_i la valeur de la fonction φ sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Alors la fonction $\tilde{\varphi}$ est constante égale à c_i sur $] -x_i, -x_{i-1}[$.

Ainsi, $\tilde{\varphi}$ est en escalier sur $[-a, 0]$ de subdivision adaptée $\tilde{\sigma} = (-x_n, \dots, -x_0)$.

On a alors :

$$\int_{[0,a]} \varphi = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i = \sum_{i=1}^n (-x_{i-1} - (-x_i)) c_i = \int_{[-a,0]} \tilde{\varphi}.$$

Cas général Soit $g \in CM([0, a], \mathbb{K})$.

Considérons (φ_n) une suite de fonctions en escalier sur $[0, a]$ telle que $\|g - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $\|\tilde{g} - \tilde{\varphi}_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le cas précédent, on a $\int_{[0,a]} \varphi_n = \int_{[-a,0]} \tilde{\varphi}_n$.

Par passage à la limite, $\int_{[0,a]} g = \int_{[-a,0]} \tilde{g}$.

• Étape 2

Soit $f \in CM([-a, a], \mathbb{K})$.

1. Si f est paire, on a donc :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx$$

Avec Chasles, on en déduit :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

2. Si f est impaire, alors :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx = - \int_{-a}^0 f(x) dx$$

ce qui donne :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Cas où la fonction f est continue L'application $x \mapsto f(x - T)$ est continue sur $[a + T, b + T]$. Dans ces conditions, puisque $s \mapsto s + T$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le formule de changement de variable, et donc :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x - T) dx = \int_a^b f(s) ds$$

Cas où la fonction f est continue par morceaux Soit $(u_0, \dots, u_n)$ une subdivision du segment $[a, b]$ adaptée à f . Il est clair que l'application $g : x \mapsto f(x - T)$ est continue par morceaux sur $[a + T, b + T]$ et que $(u_0 + T, \dots, u_n + T)$ est une subdivision de $[a + T, b + T]$ adaptée à g . D'après la relation de Chasles et le cas précédent :

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^{b+T} f(x - T) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k+T}^{u_{k+1}+T} f(x - T) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt - F(x) + F(a)$ est dérivable, de dérivée nulle et nulle en a .

Donc c'est la fonction nulle et en particulier, pour $x = b$, on a donc $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.