

Probabilités sur un univers fini

I Généralités	2
Vocabulaire	
Espace probabilisé	
La formule des probabilités totales	
Caractérisation d'une probabilité	
Probabilité uniforme	
Un exemple	
II Conditionnement	6
Définition	
Formule des probabilités composées	
Formule des probabilités totales (bis)	
Formule de Bayes	
III Indépendance	8
Indépendance mutuelle	
IV Schéma de Bernoulli.	11



I. Généralités

Rappel utile pour tout le cours de proba. Conventions pratiques :

$$\text{Dans } \mathbb{R} : \prod_{i \in \emptyset} x_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \emptyset} x_i = 0$$

$$\text{Dans } \mathcal{P}(\Omega) : \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$$

Vocabulaire

1

Définitions.

- Un univers fini est un ensemble fini non vide, noté en général Ω .
- Un élément ω de Ω est appelé *issue*.
- Une partie de Ω est appelée *événement*.
- Une partie de Ω réduite à un seul élément, à savoir un singleton $\{\omega\}$, est appelé *événement élémentaire*.
- La partie vide $\emptyset$ est appelée *événement impossible*.
- La partie totale Ω est appelée *événement certain*.
- Soit A une partie de Ω . Le complémentaire de A , noté $\bar{A}$, est appelé *événement contraire* de A .
- Deux parties disjointes (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) sont appelés *événements incompatibles*.

- **Remarque.** L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

En Sup, l'univers Ω est fini, donc l'ensemble des événements est également fini.

Ce ne sera pas le cas en Spé.

- **Exemple.** On lance deux dés à 6 faces.

On peut modéliser la situation par l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

L'événement A : « obtenir un double numéro » est alors

$$A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$$

et B : « la somme des deux dés est égale à 10 » vaut $B = \{(4, 6); (5, 5); (6, 4)\}$.

2

Définition. Soit Ω un univers fini.

Un *système complet d'événements* de Ω est une famille d'événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que

$$\begin{cases} \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \end{cases}$$

- **Visuellement.** On a :

$$(A_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est un SCÉ} \quad \Longleftrightarrow \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

- **Exemple.** Nous allons être confrontés à ce genre d'énoncé :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On tire au hasard s boules sans remise.

Qu'est-ce qu'une issue? Que peut-on prendre pour Ω ?

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_k l'événement « le plus grand numéro obtenu est égal à k ».

Donner un exemple de système complet d'événements de Ω .

3

Définition.

Une *probabilité* sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ vérifiant les deux axiomes [i] et [ii] suivants :

[i] $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (**normalisation**)

[ii] $\forall A, B$ parties de Ω *disjointes*, on a $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (**additivité de $\mathbb{P}$**)

4

Définition.

Un *espace probabilisé fini* est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω .

- **Remarque.** Pour décrire une probabilité, il suffit, par définition, de donner $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Comme en Sup, l'univers Ω est fini, toute partie A de Ω est finie et est donc la réunion finie de ses singletons. Autrement dit

$$A = \bigsqcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

Par additivité de $\mathbb{P}$ (c'est l'axiome [ii]), on en déduit que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Ainsi, pour se donner une probabilité, il suffit de se donner les images des événements *élémentaires*.

5

sol → 13

Question. Soit $n \geq 1$.

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2 .

6

Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(b) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(c) **Additivité de $\mathbb{P}$.** Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

(d) **Croissance de $\mathbb{P}$.** $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(e) **Formule du crible pour 2 événements.** $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(f) **Sous-additivité de $\mathbb{P}$ pour 2 événements.** $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

(g) **Sous-additivité de $\mathbb{P}$.** Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- **Remarque importante.** Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un SCÉ de $(\Omega, \mathbb{P})$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$$

En effet, on a $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$, et on conclut par additivité de $\mathbb{P}$.

La formule des probabilités totales

7

Proposition (Formule des probabilités totales).

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.

On a :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

En particulier, pour $n = 2$, on a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ Le scé est ici $(A, \bar{A})$

Caractérisation d'une probabilité

8

preuve

Proposition.

— Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On a

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$

— Réciproquement, si Ω est un univers fini, et si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels de $[0, 1]$ telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

- **Vocabulaire.** Une *distribution de probabilités* sur un ensemble fini E est une famille indexée par E de réels positifs de somme 1.

On vient donc de montrer que si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω , alors la famille $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est une *distribution de probabilités* sur Ω .

Probabilité uniforme

9

Proposition. Soit Ω un univers fini.

L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω .

C'est la *probabilité uniforme* sur Ω .

- **Autre définition.** En utilisant la proposition précédente, on voit que l'on peut aussi définir la probabilité uniforme via sa valeur sur les événements élémentaires :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card } \Omega}$$

La probabilité uniforme sur Ω est caractérisée par le fait qu'elle est constante sur les singletons (d'où son nom!) :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\})$$

Un exemple

10 Question.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On tire au hasard s boules **sans** remise (bien sûr $s \leq n$).

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_k l'événement « le plus grand numéro obtenu est égal à k ».

- Déterminer la probabilité de E_k .
- En utilisant le SCÉ $(E_1, \dots, E_n)$, retrouver une formule bien connue.

Recommencer l'exercice avec des tirages successifs **avec** remise.

Quelle formule connue trouve-t-on en exploitant le fait que $(E_1, \dots, E_n)$ est un SCÉ ?

II. Conditionnement

Définition

11 Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_A$ définie par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ B &\longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}\end{aligned}$$

est une probabilité.

Le réel $\mathbb{P}_A(B)$ est appelé « la probabilité de B sachant A ».

- **Autre notation.** On trouve parfois la notation $\mathbb{P}(B | A)$ pour $\mathbb{P}_A(B)$.
- **Remarque importante.** Avec $A = \Omega$ dans cette définition, on voit que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_\Omega$ est la probabilité $\mathbb{P}$.
- **Produit en croix.** Lorsque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut utiliser le fait que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)$. Cette formule se généralise!

Formule des probabilités composées

12 Proposition (Formule des probabilités composées)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $B_1, \dots, B_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}) \neq 0$. On a

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \cdots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

- **Remarque.** Tous les événements par lesquels on conditionne sont de proba $\neq 0$ (WHY?).
- **Autre formulation.** La formule précédente s'écrit :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}_\Omega(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \cdots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

Remarquons que l'intersection $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}$ peut aussi s'écrire $\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i$.

Et que pour $k = 1$, cette intersection est égale à Ω .

La formule peut alors s'écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(B_k)$$

13

sol → 14

Question. Une urne contient initialement b blanches et r rouges. On tire successivement 3 boules, avec un processus de remise bien particulier :

- si on tire une rouge, on l'enlève;
- si on tire une blanche, on la remplace par une rouge.
- Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches?
- Quelle est la probabilité de tirer 1 blanche exactement?

Formule des probabilités totales (bis)

14

Proposition (bis). Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.

Si $\forall i, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors on a :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

- **Cas particulier** $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On a

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

- **Dessin.** En faisant un arbre, comme dans les petites classes, on retrouve très vite cette formule.

15

sol → 14

Question.

On considère n urnes numérotées de 1 à n . L'urne n° k contient k boules jaunes et k boules bleues.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

Déterminer la probabilité d'obtenir une boule jaune.

Même question avec l'urne n° k contenant k boules jaunes et $n - k$ boules bleues.

Formule de Bayes

16

Proposition (Formule de Bayes) [Thomas Bayes, britannique, (1702-1761)]

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

— Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$.

— Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements tel que $\forall i, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

- Cette formule, appelée également **formule de probabilité des causes**, permet en quelque sorte « de remonter le temps ». En effet, si l'événement B se produit après l'événement A , elle nous permet de déduire, de la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$ qui respecte la chronologie, la probabilité $\mathbb{P}_B(A)$ qui, elle, remonte cette chronologie.

- **Exemple.** Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.

On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes saines testées.

Calculons la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif.

Notons M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

On cherche $\mathbb{P}(M | T) = \frac{\mathbb{P}(M) \mathbb{P}(T | M)}{\mathbb{P}(T)}$, d'après la formule de Bayes.

On calcule $\mathbb{P}(T)$ avec la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \mathbb{P}(T | M) + \mathbb{P}(\bar{M}) \mathbb{P}(T | \bar{M})$.

D'après les données de l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(M) = 0,0001, \quad \mathbb{P}(T | M) = 0,99 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T | \bar{M}) = 0,001.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(M | T) = \frac{0,0001 \cdot 0,99}{0,0001 \cdot 0,99 + 0,9999 \cdot 0,001} \approx 0,09.$$

III. Indépendance

17

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

On dit que A et B sont indépendants (relativement à $\mathbb{P}$) lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

- **Explication.** Lorsque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a l'équivalence

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

Ainsi, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, les événements A et B sont indépendants si la réalisation de A n'influe pas sur celle de B . La notion d'indépendance vise à modéliser cette absence d'influence de la réalisation de l'un des événements sur celle de l'autre.

- **Attention.** Ne pas confondre les notions d'indépendance et d'incompatibilité.

Lorsque deux événements A et B sont incompatibles (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), cela signifie qu'aucune issue qui réalise A ne peut réaliser B . Autrement dit, il y a « de la dépendance entre A et B ».

- **Attention.** L'indépendance n'est pas une notion transitive :

$$(A \text{ et } B \text{ indép}) \quad \text{ET} \quad (B \text{ et } C \text{ indép}) \quad \not\Rightarrow \quad (A \text{ et } C \text{ indép})$$

Prendre $C = A$ pour s'en convaincre rapidement.

18

Attention. Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion *ensembliste*, l'indépendance est une notion *probabiliste*. Elle dépend de la probabilité dont est muni Ω , comme le montre l'exemple suivant. Une pièce de monnaie est lancée deux fois et l'on choisit $\Omega = \{P, F\} \times \{P, F\}$.

On considère les événements A « les deux lancers ne donnent pas le même résultat » et B « le deuxième lancer donne face ».

On a

$$A = \{(P, F), (F, P)\} \quad B = \{(P, F), (F, F)\} \quad A \cap B = \{(P, F)\}$$

— Si la pièce est équilibrée, on munit l'univers Ω de la probabilité uniforme.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

les événements A et B sont indépendants.

— Si la pièce est pipée et qu'elle tombe sur pile avec une probabilité de $\frac{3}{4}$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(P, F)\}) + \mathbb{P}(\{(F, P)\}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{(F, F)\}) + \mathbb{P}(\{(P, F)\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(P, F)\}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

19

Question. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes.

Soit C l'événement « tirer un cœur ».

Soit T l'événement « tirer un 3 ».

Montrer que les événements C et T sont indépendants.

20

Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors A et B sont indépendants.
Un événement négligeable est indépendant de n'importe quel événement.
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors A et B sont indépendants.
Un événement presque sûr est indépendant de n'importe quel événement.

21

Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

Si A et B sont indépendants, alors

- A et $\bar{B}$ sont indépendants;
- $\bar{A}$ et B sont indépendants;
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

22

Définition.

— Trois événements A, B, C sont mutuellement indépendants lorsqu'ils sont

— 2 à 2 indépendants, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

— 3 à 3 indépendants, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

— Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements. Ces événements sont *mutuellement indépendants* lorsqu'ils sont k à k indépendants pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \quad \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

• **Reformulation.** On peut reformuler la définition sous la forme :

$$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

• **Implication.** On a

mutuelle indépendance $\implies$ 2 à 2 indépendance

Attention, la réciproque est fausse!

23

Question. Considérons l'espace probabilisé $\Omega = \{P, I\} \times \{P, I\}$ muni de la probabilité uniforme. On considère :

- $A_1 = \{(P, P), (P, I)\}$ le 1^{er} nombre est pair
- $A_2 = \{(P, P), (I, P)\}$ le 2^{ème} nombre est pair
- $D = \{(P, P), (I, I)\}$ la somme des deux nombres est paire

Montrer que A_1, A_2, D sont deux à deux indépendants, mais qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Voilà une tentative d'explication intuitive à la non-mutuelle-indépendance : *quand on tire deux nombres, la parité du premier, la parité du second et la parité de la somme ne peuvent pas être mutuellement indépendants, car, au contraire, deux de ces informations déterminent la troisième.*

24

Proposition. Remplacer, dans une famille d'événements mutuellement indépendants, certains événements par leurs contraires donne une nouvelle famille d'événements mutuellement indépendants.

Autrement dit :

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.

Considérons les événements $B_1, \dots, B_n$ définis par $B_i = \begin{cases} \overline{A_i} \\ \text{ou} \\ A_i \end{cases}$

Alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

IV. Schéma de Bernoulli

25

Définition.

- Une expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli lorsque l'expérience consiste en la répétition, de manière identique et indépendante, d'une épreuve n'ayant que deux issues (l'une est souvent appelée succès, et l'autre échec).
- Notons $n \in \mathbb{N}$ le nombre d'épreuves répétées et notons $p \in [0, 1]$ la probabilité du succès. On dit que le schéma de Bernoulli est de paramètres n et p .

• Modélisation.

Un schéma de Bernoulli de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ peut être modélisé par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ avec

$$\Omega = \left\{ \text{mots de longueur } n \text{ sur l'alphabet } \{S, E\} \right\}$$

et $\mathbb{P}$ définie par :

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{k_\omega} (1-p)^{n-k_\omega} \quad \text{où } k_\omega \text{ est le nombre de } S \text{ dans le mot } \omega$$

26

Proposition (justification de la modélisation).

Considérons un schéma de Bernoulli de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ modélisé par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ précédent.

Notons $\mathbb{S}_i$ l'événement « obtenir un succès à la $i^{\text{ème}}$ épreuve ».

Alors :

- pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(\mathbb{S}_i) = p$
- les événements $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \dots, \mathbb{S}_n$ sont mutuellement indépendants.

27

Proposition.

Considérons un schéma de Bernoulli de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. Notons $q = 1 - p$.

- Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La probabilité d'obtenir k succès est $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q = 1 - p$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La probabilité d'obtenir $\begin{cases} 0 \text{ succès est } q^n \\ \text{le } 1^{\text{er}} \text{ succès à la } k^{\text{ème}} \text{ épreuve est } q^{k-1} p. \end{cases}$

• Remarque.

Lorsque $k \notin \llbracket 0, n \rrbracket$, l'événement « obtenir k succès » est impossible, donc sa probabilité est nulle.

La formule donnée ci-dessus donne le résultat attendu! Chouette, la formule est valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, et même pour tout $k \in \mathbb{Z}$!!!

- **Vérification.** On peut vérifier, pour le fun, que la somme des probas vaut 1 dans les deux situations de la proposition.

28

sol → 14

Question. On considère le jeu où on lance n fois une pièce qui donne PILE avec une proba p .

Deux personnes A et B jouent à ce jeu.

Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de PILE?

Simplifier le résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Probabilités sur un univers fini

preuve et éléments de correction

5

L'énoncé nous dit que l'on cherche une probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{1, \dots, k\}) = \lambda k^2$.
Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a l'égalité de parties :

$$\{1, \dots, k\} = \{1, \dots, k-1\} \sqcup \{k\}$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{k\}) &= \mathbb{P}(\{1, \dots, k\}) - \mathbb{P}(\{1, \dots, k-1\}) \\ &= \lambda k^2 - \lambda (k-1)^2 \\ &= \lambda (2k-1) \end{aligned}$$

Reste à déterminer λ .

Pour cela, remarquons que $\mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) = 1$ d'où $\lambda n^2 = 1$ d'où $\lambda = \frac{1}{n^2}$.

Bilan

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

8

— Les singletons $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ sont deux à deux disjoints, donc

$$\Omega = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$$

Appliquons $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right)$$

Par normalisation et additivité de $\mathbb{P}$, on a :

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

— **Existence.** Posons

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \sum_{\omega \in A} p_{\omega} \end{aligned}$$

Montrons que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

— On a $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} = 1$.

— **Aspect bien défini.** On a $\forall \omega \in \Omega, p_{\omega} \geq 0$.

Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a donc

$$0 \leq \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega} \leq \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} = 1$$

— Soit A et B deux parties disjointes. On a

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \sum_{\omega \in A \sqcup B} p_{\omega} = \sum_{\omega \in A} p_{\omega} + \sum_{\omega \in B} p_{\omega} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Unicité. Soit $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux probabilités telles que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}_1(\{\omega\}) = p_{\omega} = \mathbb{P}_2(\{\omega\})$$

Montrons que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

Autrement dit, montrons que $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$.

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On écrit A comme la réunion disjointe de ses singletons.

Comme $\mathbb{P}_1$ est une probabilité, on a par additivité de $\mathbb{P}_1$:

$$\mathbb{P}_1(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}_1(\{\omega\}) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

De même, on a

$$\mathbb{P}_2(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

D'où $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$.

13

1. Notons B_i l'événement « on tire une blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

On cherche la probabilité de $B_1 \cap B_2 \cap B_3$.

En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{b}{n} \times \frac{b-1}{n} \times \frac{b-2}{n}$$

Une remarque : si $b \in \{0, 1, 2\}$, la probabilité ci-dessus est nulle, comme attendu.

2. Posons $R_i = \overline{B}_i$.

L'événement cherché « tirer 1 blanche exactement » vaut

$$B_1 \cap R_2 \cap R_3 \sqcup R_1 \cap B_2 \cap R_3 \sqcup R_1 \cap R_2 \cap B_3$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on a

$$\mathbb{P}(\text{év}^t \text{cherché}) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3)$$

En utilisant la formule des probabilités composées à 3 reprises, comme dans la question 1, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{év}^t \text{cherché}) &= \frac{b}{n} \times \frac{r+1}{n} \times \frac{r}{n-1} + \frac{r}{n} \times \frac{b}{n-1} \times \frac{r}{n-1} + \frac{r}{n} \times \frac{r-1}{n-1} \times \frac{b}{n-2} \\ \mathbb{P}(\text{év}^t \text{cherché}) &= \frac{br}{n(n-1)} \left(\frac{r+1}{n} + \frac{r}{n-1} + \frac{b}{n-2} \right) \end{aligned}$$

15

— Notons U_k l'événement « on tire dans l'urne n° k ».

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{n}$.

Notons J l'événement « on tire une boule jaune ».

D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $(U_1, \dots, U_n)$:

$$\mathbb{P}(J) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(U_k) \mathbb{P}_{U_k}(J) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

— On procède de la même manière et on trouve :

$$\mathbb{P}(J) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

On a l'égalité d'év^t :

$$\text{év}^t \text{ cherché} = \bigsqcup_{k=0}^n \{A \text{ obtient } k \text{ PILE}\} \cap \{B \text{ obtient } k \text{ PILE}\}$$

Par additivité de $\mathbb{P}$ et indépendance (les joueurs A et B jouent de manière indépendante) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{év}^t \text{ cherché}) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\{A \text{ obtient } k \text{ PILE}\}) \times \mathbb{P}(\{B \text{ obtient } k \text{ PILE}\}) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right)^2 \end{aligned}$$

Simplifions cette probabilité lorsque $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{év}^t \text{ cherché}) &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

La dernière égalité étant due à l'égalité de Vandermonde!