Espace euclidien

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I. Produit scalaire

- **Question.** Qu'est-ce qu'une forme linéaire ? Et à votre avis, une forme bilinéaire ?
- **Question.** Que signifie la locution « application bien-définie » ? Vous remarquerez que *bien-définie* est en « un seul mot ».

Formes bilinéaires

1 **Définition.**
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application définie sur le produit cartésien $E \times E$ et à valeurs **réelles**.

- On dit que φ est une *forme bilinéaire* lorsque :
  — pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ est une forme linéaire
  $$\forall\, x, x' \in E,\ \forall\, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda x + \lambda' x', y_0) = \lambda \varphi(x, y_0) + \lambda' \varphi(x', y_0)$$
  — pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x_0, y)$ est une forme linéaire
  $$\forall\, y, y' \in E,\ \forall\, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x_0, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \varphi(x_0, y) + \lambda' \varphi(x_0, y')$$
- On dit que φ est *symétrique* lorsque :
  $$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$
- On dit que φ est *positive* lorsque :
  $$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$$
- On dit que φ est *définie positive* lorsqu'elle est positive et vérifie :
  $$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$$

- **Question.** Est-ce que le fait que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est utilisé quelque part ?
- **Remarque importante !** Pour montrer qu'une application est une *forme bilinéaire symétrique*, il suffit de montrer la symétrie, **puis** la linéarité par rapport à l'une des deux variables.
- **Vocabulaire.** Lorsque $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, on dit souvent que c'est une forme bilinéaire *sur* E (plutôt que sur $E \times E$).
- **Exemples.** L'application φ_k est-elle bilinéaire, symétrique, positive, définie positive ?

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 5x_1y_1 + 6x_1y_2 + 7x_3y_3 \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x_1y_1 + 9x_1y_2 + 9x_2y_1 + 8x_2y_2 + 7x_3y_3 \end{array}$$

$$\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{array} \qquad \varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & -7x_1y_1 + 8x_2y_2 + 9x_3y_3 \end{array}$$

Produit scalaire

2 **Définition.**

— Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

— Un *espace préhilbertien réel* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

— Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Un espace euclidien est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

- **Vocabulaire.** Lorsque φ un produit scalaire sur E et $(x,y) \in E \times E$, le réel $\varphi(x,y)$ est appelé le produit scalaire de x et y. Il est noté généralement $(x \mid y)$ ou $x \cdot y$ ou $\langle x \mid y \rangle$.

  En géométrie (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$), on utilise souvent la notation $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour désigner le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- **Remarque** (sûrement étrange en première lecture ?!).
  Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$, alors l'application induite $\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle \end{array}$ est un produit scalaire sur F. On peut donc considérer F comme un espace préhilbertien réel pour ce produit scalaire qui sera encore noté $\langle \mid \rangle$.

3 **Proposition (exemples de référence).**

— L'application suivante est **un** produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$

C'est **le** *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n$.

— L'application suivante est **un** produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(A^\top B) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} b_{ij} \end{array}$$

C'est **le** *produit scalaire canonique* sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- **Remarque importante.** Prenons le produit scalaire canonique sur les colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  A-t-il un rapport avec le produit scalaire canonique sur les n-uplets de $\mathbb{R}^n$?
  Autrement dit, en considérant les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & \operatorname{tr}(X^\top Y) \end{array}$$

  existe-t-il un lien entre φ et ψ ?

  La réponse est OUI, car en notant $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, on a $\operatorname{tr}(X^\top Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

4 preuve

Proposition (exemples de référence).

— L'application suivante est **un** produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{coeff}_{X^k}(P)\operatorname{coeff}_{X^k}(Q) \end{array}$$

C'est **le** *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}[X]$.

— Soit $a<b$ deux réels.
L'application suivante est **un** produit scalaire sur $\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)\times\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b fg \end{array}$$

C'est **le** *produit scalaire usuel* sur $\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

- Un extrait de Wikipédia

  Un produit scalaire canonique est un produit scalaire qui se présente de manière naturelle d'après la manière dont l'espace vectoriel est présenté. On parle également de produit scalaire naturel ou usuel.

  Je rajouterai que le mot *canonique* est en lien avec la base canonique.
  Ainsi, comme $\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ ne possède pas de base canonique, je ne préfère pas parler de produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

5 **Question.** L'application suivante est un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (où $\alpha<\beta$ sont deux réels) :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

6 sol → 21 **Question.**

Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E=\mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin t| f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E=\mathscr{C}^0\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$.

Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b w(t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E=\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ pourvu que w soit positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

Norme associée à un produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle\ |\ \rangle$.

7 **Définition.** La *norme associée au produit scalaire* $\langle\ |\ \rangle$ est l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle} \end{array}$

- **Vocabulaire.** Une norme associée à un produit scalaire est appelée *norme euclidienne.* Vous verrez en Spé qu'il existe des normes qui ne sont pas associées à un produit scalaire.
- **Propriété de séparation de la norme.** On a $\forall\, x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E$ ♡
  En effet, on a $\|x\|^2 = \langle x \mid x\rangle$, donc si on suppose que $\|x\| = 0$, on en déduit $\langle x \mid x\rangle = 0$, puis grâce à l'aspect défini positif du produit scalaire, on en déduit $x = 0_E$.
- **Exemples.**
  La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{array}$

  La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est (WHY?) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}^2} \end{array}$
- **Questions pour aborder la prochaine proposition.**
  Comment prouvez-vous les cinq identités remarquables :
  $$\begin{array}{ll} \forall\, a,b \in \mathbb{R}, & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}, & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}, & a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}, & ab = \dfrac{1}{2}\Big((a+b)^2 - a^2 - b^2\Big) \\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}, & (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\big(a^2+b^2\big) \end{array}$$
  Comment généraliser la première formule à trois réels $(a+b+c)^2 = \dots$? Et à s réels ?

8 preuve **Proposition (identités remarquables).**
Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle\ |\ \rangle$ le produit scalaire, et $\|\ \|$ la norme associée.

— **Les 3 formules « du collège ».**
$$\begin{array}{ll} \forall\, x,y \in E, & \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2 \\ \forall\, x,y \in E, & \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2 \\ \forall\, x,y \in E, & \|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y \mid x-y\rangle. \end{array}$$

— **La formule de polarisation.** $\forall\, x,y \in E, \quad \langle x \mid y\rangle = \dfrac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big)$

— **L'identité du parallélogramme.** $\forall\, x,y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$

- **Bilinéarité.** La formule du collège ci-dessus est en fait ni plus ni moins que la bilinéarité du produit scalaire et elle se généralise en :
  $$\forall\, x,y \in E, \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\mu\langle x \mid y\rangle + \mu^2\|y\|^2$$
- **Généralisation de la 1ère formule du collège.** Soit $(v_1,\dots,v_s)$ une famille de vecteurs de E. On a
  $$\Big\|\sum_{i=1}^{s} v_i\Big\|^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
- **Remarque.** La formule de polarisation permet de retrouver le produit scalaire si l'on connaît la norme euclidienne.

9 sol → 22 **Question.** Montrer qu'un endomorphisme qui conserve la norme conserve le produit scalaire.
Autrement dit, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Montrer que $\forall\, x,y \in E$, $\langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$.

10 preuve

Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz). On a

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\langle x \mid y\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

C'est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

- **Preuve.** On va en fait prouver que $\big|\langle x \mid y\rangle\big|^2 \leqslant \|x\|^2\,\|y\|^2$ ou encore que $\big(2\,\langle x \mid y\rangle\big)^2 \leqslant 4\|x\|^2\,\|y\|^2$.

11

Proposition.

1. On a l'inégalité :

$$(\clubsuit) \qquad \forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

2. On a l'inégalité :

$$\forall\, f, g \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \quad \left|\int_a^b f g\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\,\sqrt{\int_a^b g^2}$$

- **Cas particulier.** Que dit l'inégalité ($\clubsuit$) pour $n = 1$ et pour $n = 2$?

12

Proposition (norme). La norme associée au produit scalaire $\langle\ \mid\ \rangle$ vérifie :

- ⋆ $\forall\, x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$ (séparation)
- ⋆ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E, \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité)
- ⋆ $\forall\, x, y \in E, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
  avec égalité si et seulement si x et y sont *positivement colinéaires* :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad y = \alpha x \qquad \text{ou} \qquad \exists\, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad x = \beta y.$$

- **Illustration dans $\mathbb{R}^2$.** L'inégalité triangulaire s'énonce

$$\forall\, (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Conséquence. Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres :

$$AC \leqslant AB + BC$$

13

Proposition (seconde inégalité triangulaire). On a :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

II. Orthogonalité

Généralités

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel.
On note $\langle\ |\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée.

14 **Définition.**

- On dit qu'un vecteur est *unitaire* lorsqu'il est de norme 1.
- On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* lorsque $\langle x \mid y\rangle = 0$.

- **Remarque.** Par symétrie du produit scalaire, si $\langle x \mid y\rangle = 0$, alors $\langle y \mid x\rangle = 0$.
Ainsi, la relation d'orthogonalité est symétrique.
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs $u = (3,0)$ et $v = (0,1)$ sont orthogonaux.
En effet, $\langle u \mid v\rangle = 3\times 0 + 0\times 1 = 0$.
- **Exemple.** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, montrer que la matrice identité est orthogonale à toute matrice N de trace nulle.
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que les polynômes X et X^2 sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Sont-ils orthogonaux pour $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{0}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$?
- **Exemple.** Dans $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$, montrer que les fonctions cosinus et sinus sont orthogonales.

15 **Proposition.**

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E.
- Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.
- Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur de E.

16 **Théorème de Pythagore.** Soit $x, y \in E$.
On a l'équivalence :

$$x \text{ et } y \text{ orthogonaux} \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- **Illustration dans $\mathbb{R}^2$.** Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, le théorème de Pythagore s'énonce

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

On retrouve le résultat du collège !

$$\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } B \iff AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

17 **Définition.** Soit A une partie de E.
L'*orthogonal* de A est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs $a \in A$:

$$A^{\perp} = \left\{x \in E \mid \forall\, a \in A,\ \langle x \mid a \rangle = 0\right\}.$$

- **Reformulation.** Pour tout $a \in A$, on note $\varphi_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x \mid a \rangle \end{array}$ Alors on a $A^{\perp} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

18 preuve **Proposition.**

i) L'orthogonal d'une partie A de E est un sous-espace vectoriel de E.

ii) L'orthogonal de $\{0_E\}$ est E.

iii) L'orthogonal de E est $\{0_E\}$.

iv) Soit F un sev de E. Alors $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.

v) Soit A une partie de E. Alors $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

vi) Soit A et B deux parties de E. Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

vii) On a

$$\forall\, v_1, \ldots, v_s \in E, \quad \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)^{\perp} = \left\{v_1, \ldots, v_s\right\}^{\perp}$$

19 **Proposition.** Soit F un sev de E de dimension finie, et $\mathscr{B}_F$ une base de F.
Soit $x \in E$. Alors :

$$x \in F^{\perp} \iff x \text{ est orthogonal à tout vecteur de } \mathscr{B}_F$$

20 **Proposition.** Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul.
On a l'égalité

$$E = \mathrm{Vect}(a) \oplus \left\{a\right\}^{\perp}$$

En particulier, $\left\{a\right\}^{\perp}$ est un hyperplan de E.

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur cette somme directe, à savoir :

$$x = \ \ldots\ldots\ a \ + \ \text{il n'y a plus le choix}$$

Familles orthogonales et orthonormées

21 **Définition.**

- Une *famille orthogonale* de E est une famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.
- Une *famille orthonormée* de E est une famille de vecteurs de E unitaires et deux à deux orthogonaux.

- **Formule pratique.** Soit $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant s}$ une famille de E.
  Elle est orthonormée si et seulement si $\forall\, i,j \in [\![1,s]\!],\ \langle e_i \mid e_j\rangle = \delta_{ij}$.
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, connaissez-vous des familles orthogonales ? Et orthonormée ?
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, la famille $(1,X,X^2)$ est-elle orthogonale ?
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}[X]$, trouver un produit scalaire pour lequel la famille $(1,X,X^2)$ est orthogonale. Puis orthonormée.
- **Exemple.** Dans $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$, la famille $(\cos,\sin)$ est-elle orthogonale ? orthonormée ?

22 **Proposition.** Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre.
En particulier, une famille orthonormée de E est libre.

- **Attention !** Une famille orthogonale est susceptible de contenir le vecteur nul donc l'hypothèse de non nullité est indispensable.

23 **Proposition.** Soit $(v_1,\dots,v_s)$ une famille de vecteurs de E.
Si $(v_1,\dots,v_s)$ est orthogonale, alors

$$\Big\| \sum_{i=1}^{s} v_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{s} \|v_i\|^2.$$

- **Remarque.** Pour $s=2$, c'est le sens direct du théorème de Pythagore, donc la réciproque est également vraie !
- **Attention.** Pour $s \geqslant 3$, la réciproque est fausse.
  Prendre $E=\mathbb{R}^3$ et $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(0,1,-\frac{1}{2})$, $v_3=(0,0,1)$.
  Montrer que cela constitue un contre-exemple à la réciproque.

Bases orthonormées

Puisque nous allons parler de base, nous supposons ici (cf. programme PCSI) que E est euclidien.

24 **Définition.** Une *base orthonormée* de E est une base de E qui est une famille orthonormée.

- **Remarque très importante.** Pour montrer qu'une famille est une BON, il suffit de montrer que la famille est orthonormée et de bon cardinal. WHY?

25 **Proposition.**

— Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

— Il en est de même dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

26 preuve **Proposition.** Un espace euclidien possède une base orthonormée.

27 **Proposition (expression dans une BON).**
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base *orthonormée* de E.

— **Expression d'un vecteur.** Soit $x \in E$. On a

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i .$$

— **Expression du p.s.** Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \, e_i$ deux vecteurs de E.

Alors

$$\langle x \mid y \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

En posant $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$, on a

$$\langle x \mid y \rangle \;=\; X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 \;=\; X^\top X$$

- **Reformulation.** Au cours de la preuve, on a vu que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $x_i = \langle x \mid e_i \rangle$ (attention, on utilise le fait que $\mathscr{B}$ est une BON).
- **Abus de langage.** Dans la dernière formulation :
  — à gauche de l'égalité, $\langle x \mid y \rangle$ est un réel
  — à droite $X^\top Y$ est une matrice carrée de taille 1.

  On pourrait enlever cet abus de langage en utilisant la trace :

$$\langle x \mid y \rangle \;=\; \mathrm{tr}(X^\top Y) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 \;=\; \mathrm{tr}(X^\top X)$$

  mais il faut aussi savoir gérer les abus de langage (nombreux en sciences).
- **Pour les yeux.** La formule $\langle x \mid y \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$ est en fait à retenir sous la forme

$$\langle x \mid y \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle y \mid e_i \rangle \qquad \text{où } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une BON de } E$$

- **Pour la culture.** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
  On rappelle que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$

  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  Si l'on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, la proposition montre que cet isomorphisme conserve la norme et le produit scalaire.

28 sol → 23

Question. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels distincts.

1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array}$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de E pour le produit scalaire φ.
3. Soit $P \in E$. Donner l'expression de P dans cette base de Lagrange.

29 sol → 23

Question. Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit f une forme linéaire sur E.
Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\quad \forall x \in E, \quad f(x) = \langle a \mid x \rangle$.
Et l'expliciter dans la base $\mathscr{B}$.

III. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel.
On note $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire et $\| \ \|$ la norme euclidienne associée.

Supplémentaire orthogonal

30 **Définition.**
Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *orthogonaux* lorsque $\quad \forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x \mid y \rangle = 0.$

- **Reformulation.** L'orthogonalité de F et G est équivalente à $F \subset G^\perp$ (bien sûr, c'est aussi équivalent à $G \subset F^\perp$).
- **Attention.** ~~F et G orthogonaux ne signifie pas $F = G^\perp$~~

  Penser dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, à $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3)$.
- **Fait.** Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont orthogonaux.
  En effet, par définition les éléments de $F^\perp$ sont orthogonaux à tous les éléments de F.
- **Remarque.** En concaténant deux familles orthonormées $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ obtient-on une famille orthonormée ?
  Non, mais c'est le cas si $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et $\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ sont orthogonaux !
- **Remarque.** Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E, alors $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont des bases orthonormées de deux sev orthogonaux et en somme directe.
  Ces sev sont supplémentaires ssi $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

- **Une question se pose.** Soit F un sev de E.
  Existe-il un *supplémentaire orthogonal* à F, cad existe-t-il G sev de E tel que $E = F \oplus G$ et $F \perp G$?
  La réponse est oui si F est de dimension finie (cf. proposition suivante), et un tel G est unique !
  En revanche, on ne peut rien dire si F n'est pas de dimension finie.

31 preuve **Proposition.** Soit E un espace préhilbertien.
Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie.**
Il existe un unique *supplémentaire orthogonal* à F.

Autrement dit, il existe un unique sev G de E tel que $\begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G \end{cases}$ à savoir $G = F^\perp$.

En particulier, $\quad E \ = \ F \oplus F^\perp.$

- **Vocabulaire.** Ainsi, $F^\perp$ est **un** supplémentaire de F, pourvu que F soit de dimension finie.
  C'est même **le** supplémentaire orthogonal de F.
- **En français.** Un sev de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- **Cas particulier.** Quid du cas où F est une droite vectorielle ? Retrouve-t-on un énoncé déjà vu ?
- **À retenir.** Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F.
  Un vecteur x de E possède une écriture unique sur la somme directe $F \oplus F^\perp$, à savoir :

$$x \quad = \quad \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k \quad + \quad \text{il n'y a plus le choix}$$

Pour retenir cette formule, penser au cas où $x \in F$; dans ce cas, $x = x + 0$ et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée, on a $x = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k$.

32 preuve

Proposition (en dimension finie). Soit E un espace *euclidien* (donc de dimension finie).
Soit F un sev de E. Alors

- $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$

33 preuve

Proposition (Théorème de la base orthonormée incomplète).
Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

34 sol → 26

Question. Soit $E = \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \Big\{f \in E \mid f(0) = 0\Big\}$.
Montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$.
A-t-on $F \oplus F^{\perp} = E$?
A-t-on $(F^{\perp})^{\perp} = F$?

- **À propos d'hyperplan.**

  Par définition même, **un supplémentaire** d'un hyperplan est une droite (c'est la définition en dimension quelconque).

  En dimension finie, c'est-à-dire lorsque E est euclidien, **l'orthogonal** d'un hyperplan est une droite, et comme elle n'est pas incluse dans l'hyperplan, cette droite est **un supplémentaire** (c'est le supplémentaire orthogonal, tout vecteur dirigeant cette droite est appelé *vecteur normal* à H, il existe deux vecteurs normaux *unitaires*, opposés l'un à l'autre).

  En dimension infinie, **l'orthogonal** d'un hyperplan n'est pas toujours une droite (penser à l'exemple précédent), mais **UN supplémentaire** est une droite !

Projection orthogonale

- **Rappel.** Supposons que E se décompose $E = F \oplus G$.
  - Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

    Comment est caractérisé x_F ? Réponse : c'est l'unique y vérifiant $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in G \end{cases}$
  - On a deux projections qui débarquent.
    Ce sont deux endomorphismes de E, et ils sont notés $p_{F /\!/ G}$ et $p_{G /\!/ F}$.

  Le lien entre les deux tirets est donné par $x_F = p_{F /\!/ G}(x)$ et $x_G = p_{G /\!/ F}(x)$.

35 **Définition.** Soit E un espace préhilbertien.
Soit F un sous-espace vectoriel de *dimension finie*, de sorte que (WHY?) $E = F \oplus F^\perp$.

- La projection sur F parallèlement à $F^\perp$, qui est un endomorphisme de E, est appelée la *projection orthogonale* sur F, notée p_F.
- L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le *projeté orthogonal* de x sur F.
  Ce projeté est noté $p_F(x)$.

- **Caractérisation.** Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur y vérifiant $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$
  Ainsi, $p_F(x)$ est **le** vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.

36 **Proposition.** Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, dont on note $\mathscr{B}_F$ une base (quelconque). Alors
$$\forall\, e \in \mathscr{B}_F, \quad \langle p_F(x) \mid e \rangle \;=\; \langle x \mid e \rangle$$

- **Dans la pratique.** Comment déterminer $p_F(x)$?
  - On se donne une base $\mathscr{B}_F$ quelconque de F (non nécessairement orthonormée !).
  - On exploite le fait que $p_F(x) \in F$, en le décomposant de manière *unique* dans $\mathscr{B}_F$.
  - On détermine les coefficients en exploitant le fait que $\quad \forall\, e \in \mathscr{B}_F, \quad \langle p_F(x) \mid e \rangle = \langle x \mid e \rangle$

- **Dans la pratique : zoom.** Supposons que $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$.

  On écrit de manière *unique* le vecteur $p_F(x)$ sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.

  On cherche les λ_i en écrivant que $\forall\, j \in [\![1, p]\!], \quad \langle p_F(x) \mid e_j \rangle = \langle x \mid e_j \rangle$
  Ainsi,
  $$\forall\, j \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle e_i \mid e_j \rangle = \langle x \mid e_j \rangle$$
  Ainsi, les λ_j sont solutions du système linéaire :
  $$\begin{bmatrix} & & \\ & \langle e_i \mid e_j \rangle & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x \mid e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x \mid e_p \rangle \end{bmatrix}$$
  Question : il y a combien de calculs à faire ?

37 **Question.** Considérons $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
sol → 26
Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.
Même question avec le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

38 **Question.** Considérons $E = \mathscr{C}^0\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.
Déterminer le projeté orthogonal de $\mathrm{id} : t \longmapsto t$ sur $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

39 preuve

Proposition (expression du projeté avec une BON.)
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $x \in E$.
Alors le projeté orthogonal de x sur F est :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid f_k \rangle f_k \qquad \text{où } \mathscr{B} = (f_1, \dots, f_p) \text{ une base } \textit{orthonormée} \text{ de } F$$

ou encore

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\langle x \mid v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \qquad \text{où } \mathscr{B} = (v_1, \dots, v_p) \text{ une base } \textit{orthogonale} \text{ de } F$$

- **Remarque.** Par construction, le vecteur $x - p_F(x)$ est dans $F^\perp$, donc avec les notations précédentes

$$x - \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid f_k \rangle f_k \in F^\perp$$

40 preuve

Proposition (projection sur une droite).
Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul de E.
Posons $D = \mathrm{Vect}(u)$.
On a

$$\forall x \in E, \quad p_D(x) = \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u$$

Dans la proposition suivante, on suppose E de dimension finie pour être en conformité avec le programme officiel de PCSI. En réalité, c'est inutile.

41 preuve

Proposition (Projection sur un hyperplan).
Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul de E.
Posons $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
On a

$$\forall x \in E, \quad p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u$$

IV. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

42 preuve

Proposition (orthonormalisation de Gram-Schmidt).
Soit $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille *libre* de E.
Alors il existe une famille *orthonormée* $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall\, p \in [\![1, n]\!], \quad \operatorname{Vect}\big(e_1, \dots, e_p\big) = \operatorname{Vect}\big(f_1, \dots, f_p\big).$$

- **Non unicité.** Une telle famille $(f_1, \dots, f_n)$ n'est pas unique, WHY ?

- **À retenir.** Le procédé de construction de la démonstration précédente est le suivant.
  On l'appelle *l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*
  En notant $F_k = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_k)$, on a

  $$g_p = e_p - p_{F_{p-1}}(e_p) \quad \text{et} \quad f_p = \frac{g_p}{\|g_p\|}.$$

  Ainsi, g_p est obtenu en retranchant à e_p son projeté orthogonal sur $F_{p-1} = \operatorname{Vect}(\underbrace{f_1, \dots, f_{p-1}}_{\text{BON}}) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$.

  On a donc la formule

  $$g_p = e_p - \sum_{k=1}^{p-1} \langle e_p \mid f_k \rangle f_k$$

- **Remarque.** Si les premiers vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ forment une famille orthonormée, alors il est facile de voir que l'algorithme de Gram-Schmidt les conserve.

- **Retour sur un théorème.** *Un espace euclidien possède une base orthonormée.*
  Nouvelle preuve.
  Considérons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (licite : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie !).
  D'après l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à cette famille (licite, car cette famille est libre), il existe une famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E (vérifiant … mais on n'en a pas besoin ici).
  La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc libre et possède $n = \dim E$ éléments.
  C'est donc une base orthonormée de E.
  Autre argument.
  D'après l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à cette famille (licite, car cette famille est libre), il existe une famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E *engendrant le même espace que la famille* $(e_1, \dots, e_n)$, donc engendrant E.
  Donc cette famille est libre (car orthonormée) et génératrice de E, donc c'est une base orthonormée de E.

43 sol → 29

Question. Considérons la famille libre $\big((1,1),(1,0)\big)$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^2$.
Lui appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

V. Distance

44 **Définition (distance entre deux vecteurs).**
La *distance associée au produit scalaire* $\langle\,|\,\rangle$ est l'application $\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$

45 **Proposition (propriétés de la distance).**
Soit d la distance associée au produit scalaire sur E. Pour tout $(x,y,z)\in E^3$, on a :

- ⋆ $d(x,y)=0 \iff x=y$ (séparation)
- ⋆ $d(x,y)=d(y,x)$ (symétrie)
- ⋆ $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (inégalité triangulaire)
- ⋆ $d(x,z)\geqslant \big|d(x,y)-d(y,z)\big|$ (seconde inégalité triangulaire)

46 **Définition (distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel).**
Soit $x\in E$.
Soit A une partie non vide de E.
On appelle *distance* de x à A la quantité :

$$d(x,A) \;=\; \inf_{a\in A} d(x,a) \qquad \text{ou encore} \qquad d(x,A) \;=\; \inf_{a\in A}\|x-a\|$$

- **Existence.**
La partie $\{d(x,a),\ a\in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée (par 0), donc admet une borne inférieure.

Quand le contexte est favorable (cf. la proposition suivante), cette borne inférieure est en fait un minimum.
Ci-dessous, on note p_F la projection orthogonale sur F.

47 preuve **Proposition très importante.** Soit $x\in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
La distance du vecteur x au sev F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

Autrement dit :

- ⋆ $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|$
- ⋆ $\forall\, y\in F,\quad \Big(d(x,F)=\|x-y\| \iff y=p_F(x)\Big)$

- **Remarque.** On a (WHY? Faire un dessin)

$$d(x,F)^2 \;=\; \|x\|^2-\|p_F(x)\|^2$$

48 **Question.** On souhaite déterminer

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(t - (a\cos t + b\sin t)\Big)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Qui joue le rôle de E ? de F ? de x ?
Quel est le produit scalaire ?

49
preuve

Proposition (distance à un hyperplan). Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in E \setminus \{0\}$ et $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
Soit $x \in E$.
Alors

$$d(x,H) = \frac{|\langle x \mid u\rangle|}{\|u\|}.$$

Espace euclidien

preuve et éléments de correction

4

Symétrie. Soit $(P,Q) \in E^2$. On a

$$\varphi(P,Q) \; = \; \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t \; = \; \int_0^1 Q(t)P(t)\mathrm{d}t \; = \; \varphi(Q,P)$$

Bilinéarité. Soit $(P,Q,R) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q, R) \; = \; \lambda \int_0^1 P(t)R(t)\mathrm{d}t \; + \; \mu \int_0^1 Q(t)R(t)\mathrm{d}t \; = \; \lambda\varphi(P,R) + \mu\varphi(Q,R)$$

ce qui prouve que φ est linéaire par rapport à la première variable.
Comme φ est symétrique, on en déduit que φ est bilinéaire.

Positivité. Soit $P \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$.

Caractère défini. Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, c'est-à-dire tel que $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$.
La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue (car polynomiale), positive et d'intégrale nulle.
Par le critère de nullité, cette fonction est nulle, donc $\forall\, t \in [0,1],\; P(t)^2 = 0$.
Ainsi, tous les réels du segment $[0,1]$ sont racines de P.
Donc P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

6

Montrons que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t f(t) g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

- Par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, l'application φ est une forme bilinéaire symétrique.
- Soit $f \in E$. Montrons que $\langle f \mid f\rangle \geqslant 0$.
  On a $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_0^1 t f(t)^2 \mathrm{d}t$. La fonction intégrée est positive. Par positivité de l'intégrale, l'intégrale est un réel positif.
- Soit $f \in E$ tel que $\varphi(f,f) = 0$.
  La fonction $t \mapsto t f(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle donc cette fonction est nulle.
  On en déduit :
  $$\forall\, x \in \,]0,1],\; f(x) = 0$$
  Par continuité de f en 0, on en déduit que f est nulle sur $[0,1]$ tout entier, donc f est la fonction nulle.

Montrons que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin t| f(t) g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^0\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$.

- φ est une forme bilinéaire symétrique.
- φ est positive (facile, à faire)
- φ est définie positive. Soit $f \in E$ tel que $\varphi(f,f) = 0$.
  Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin t| f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$.
  La fonction $t \mapsto |\sin t| f(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc cette fonction est nulle.
  On en déduit $\forall\, t \in [0,2\pi], |\sin t| f(t)^2 = 0$.
  Donc $\forall\, t \in [0,2\pi] \setminus \{0,\pi,2\pi\},\; f(t) = 0$.
  Par continuité de f en 0, en π et en 2π, on en déduit que f est nulle sur $[0,2\pi]$ tout entier, donc f est la fonction nulle.

8

On a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y \mid x+y\rangle \\ &= \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle && \text{(bilinéarité)} \\ &= \langle x \mid x\rangle + 2\langle x \mid y\rangle + \langle y \mid y\rangle, && \text{(caractère symétrique)}\end{aligned}$$

On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$ et, en remplaçant y par $-y$, on obtient :

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$$

En sommant ces deux égalités, on obtient

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Cette égalité traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.

9

Soit $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\langle f(x) \mid f(y)\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) && \text{formule de polarisation} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) && \text{linéarité de } f \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) && \text{hypothèse} \\ &= \langle x \mid y\rangle. && \text{formule de polarisation}\end{aligned}$$

Ainsi, un endomorphisme qui conserve la norme conserve le produit scalaire.

10

Considérer $\lambda \mapsto \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$.
Autre preuve. On peut aussi commencer par prouver l'inégalité avec des vecteurs unitaires x' et y' en utilisant $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ puis $(\lambda, \mu) = (1, -1)$. L'une prouve $\langle x' \mid y'\rangle \geqslant -1$ et l'autre prouve $\langle x' \mid y'\rangle \leqslant 1$.

18

Supposons que $A \subset B$.
Montrons $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
Soit $b \in B^{\perp}$.
Montrons que $b \in A^{\perp}$, c'est-à-dire montrons que $\forall a \in A,\ \langle b \mid a\rangle = 0$.

> Soit $a \in A$.
> Comme $A \subset B$, on a $a \in B$.
> Comme $b \in B^{\perp}$, ce vecteur b est orthogonal à tous les vecteurs de B en particulier est orthogonal à a.
> D'où $\langle b \mid a\rangle = 0$.

26

Par récurrence sur la dimension de l'espace euclidien.
Et on utilise $E = \mathrm{Vect}(a)^{\perp} \oplus \mathrm{Vect}(a)$

28

1. — Symétrie, bilinéarité, positivité : à vous.
   — **Caractère défini.**
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.
   Alors $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$.
   Donc $\forall\, k \in [\![0,n]\!],\ P(a_k) = 0$.
   Le polynôme P possède donc $n+1$ racines distinctes et est de degré au plus n.
   Donc $P = 0$.
2. Notons $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$.
   La famille $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est une famille libre (WHY ?) de bon cardinal).
   Montrons qu'elle est orthonormée pour le produit scalaire φ.
   Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. On a :
$$\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$
   Ainsi, $(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ.
3. Comme la famille $(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, on a
$$P = \sum_{i=0}^{n} \langle P \mid L_i\rangle L_i$$
   Or, un calcul (lequel) montre que $\langle P \mid L_i\rangle = P(a_i)$.
   D'où $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

29

Preuve élégante.
Considérons l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \langle a \mid \bullet\rangle \end{array}$$
C'est une application linéaire (WHY ?), *injective*, entre deux espaces vectoriels de même dimension finie.

Soit $a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $a \in E$ et $\varphi(a) = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$.
Autrement dit, $\langle a \mid \bullet\rangle = 0$, donc pour tout $x \in E$, on a $\langle a \mid x\rangle = 0$.
En particulier, pour $x = a$, on obtient $\langle a \mid a\rangle = 0$, d'où $a = 0$ (d'après le caractère défini du produit scalaire).

Ainsi, φ est bijective, et on obtient qu'il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \langle a \mid \bullet\rangle$.
On obtient donc l'existence et l'unicité du vecteur a cherché mais pas son expression.
Pour l'expression, écrivons a sur la base $\mathscr{B}$ orthonormée de l'énoncé : $a = \sum_{i=1}^{n} \langle a \mid e_i\rangle e_i$.
Comme $f = \langle a \mid \bullet\rangle$, on en déduit que $\langle a \mid e_i\rangle = f(e_i)$, d'où
$$a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$$

Autre preuve, à la main.

Analyse Supposons qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que....

Écrivons a sur la base $\mathscr{B}$ qui est orthonormée.

On a donc $a = \sum_{i=1}^{n} \langle a \mid e_i \rangle e_i$.

Par définition de f, on a alors $\langle a \mid e_i \rangle = f(e_i)$.

Donc $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$.

Synthèse Posons $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$.

Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de a dans $\mathscr{B}$ vaut $\langle a \mid e_i \rangle$.

D'autre part, cette $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut $f(e_i)$.

D'où $f(e_i) = \langle a \mid e_i \rangle$.

Alors les formes linéaires f et $x \mapsto \langle a \mid x \rangle$ coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ donc sont égales.

31

• **ANALYSE.** Soit G un tel sev. Alors on montre par double inclusion que $G = F^{\perp}$.
Montrons que $G = F^{\perp}$ par double inclusion.

— On a $G \subset F^{\perp}$, car F et G sont orthogonaux.

— Montrons l'autre inclusion.
Soit $x \in F^{\perp}$.
A fortiori $x \in E$ donc il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

Idée. On veut montrer que $x \in G$, autrement dit, on veut montrer que $y = 0$, ce qui revient à montrer que $\langle y \mid y \rangle = 0$ (par caractère défini du produit scalaire).

On a $x = y + z$.
En « effectuant le produit scalaire par y » (autrement dit, en appliquant $\langle \bullet \mid y \rangle$), on a

$$\langle x \mid y \rangle \;=\; \langle y \mid y \rangle + \langle z \mid y \rangle$$

Comme $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$, on a $\langle x \mid y \rangle = 0$.
Comme F et G sont orthogonaux par hypothèse, on a $\langle z \mid y \rangle = 0$.
D'où $\langle y \mid y \rangle = 0$, d'où $y = 0$.
Ainsi, $x \in G$.

Bilan. Si un tel G existe, nécessairement c'est $F^{\perp}$.

• **SYNTHESE.** Montrons que $G = F^{\perp}$ convient.
Évidemment, F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.
Reste à montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$.
Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.

Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.

BUT. On cherche à exprimer y en fonction de x et $\mathscr{B}$.

— Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
On a

$$y \;=\; \sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle\, e_k$$

— Montrons que $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.
En appliquant $\langle \bullet \mid e_k \rangle$ à l'égalité $x = y + z$, on a :

$$\forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad \langle x \mid e_k \rangle \;=\; \langle y \mid e_k \rangle + \langle z \mid e_k \rangle$$

Comme $z \in F^\perp$ et $e_k \in F$, on a $\langle z \mid e_k \rangle = 0$.
D'où, $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.

Ainsi, $\quad y \;=\; \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle\, e_k$.

Synthèse. Posons $y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle\, e_k$ et $z = x - y$.

Alors

- ⋆ $x = y + z$
- ⋆ $y \in F$ car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- ⋆ $z \in F^\perp$ car

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \langle z \mid e_i \rangle \;=\; \langle x - y \mid e_i \rangle \;=\; \langle x \mid e_i \rangle - \langle y \mid e_i \rangle \;\overset{\text{WHY}}{=}\; 0$$

Justifions la dernière égalité sans calcul, càd montrons sans effort que $\langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle$.
D'une part, on a par définition $y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle\, e_k$.
D'autre part, comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON, y s'écrit $\sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle e_k$.
Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a alors $\langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle$.

32

— Comme E est de dimension finie, il en est de même de F.
Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires d'après 31.
On a alors (licite, car E est de dimension finie) l'égalité $\dim F + \dim F^\perp \;=\; \dim E$.

— En appliquant le premier point au sous-espace $F^\perp$ qui est de dimension finie (car E est euclidien), on a

$$\dim E \;=\; \dim F^\perp \;+\; \dim\,(F^\perp)^\perp$$

Or $\dim E = \dim F \;+\; \dim F^\perp$.
En combinant ces deux égalités, on obtient $\dim F = \dim\,(F^\perp)^\perp$.
On a toujours l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit $F = (F^\perp)^\perp$.

— **Autre preuve plus élégante, fournie par Aurélie.**
Pour un espace préhilbertien E, et pour tout sev V de dimension finie, il existe un unique W sev de E tel que $\begin{cases} E = V \oplus W \\ V \perp W \end{cases}$, à savoir $W = V^\perp$.
Appliquons cela à deux reprises avec F et $F^\perp$, qui sont tous les deux de dimension finie car E est euclidien. On a donc

$$\begin{cases} E = F \oplus F^\perp \\ F \perp F^\perp \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp \\ F^\perp \perp (F^\perp)^\perp \end{cases}$$

Ce que l'on réécrit :

$$\begin{cases} E = F \oplus F^\perp \\ F \perp F^\perp \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} E = (F^\perp)^\perp \oplus F^\perp \\ (F^\perp)^\perp \perp F^\perp \end{cases}$$

Par unicité de W, on a donc $F = (F^\perp)^\perp$.

33

Soit E un espace euclidien.
Soit $\mathscr{F}$ une famille orthonormée de E.
Posons $F = \text{Vect}(\mathscr{F})$ (comme $\mathscr{F}$ est orthonormée, $\mathscr{F}$ est libre ; comme elle est par définition génératrice de F, c'est une base de F).
Comme F est de dimension finie, on a $E = F \oplus F^\perp$.
Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est de dimension finie (car E est euclidien), et admet, en vertu de..., une base orthonormée$\mathscr{B}_{F^\perp}$.
Alors, on vérifie que $\mathscr{F} \vee \mathscr{B}_{F^\perp}$ est une base orthonormée de E (c'est une famille orthonormée de bon cardinal).
Ainsi, $\mathscr{F}$ peut être complétée en une base orthonormée.

34

Soit $g \in F^\perp$. On a alors

$$(\star) \qquad \forall f \in F, \quad \langle f \mid g \rangle = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 fg = 0$$

Idée. On veut montrer que $g = 0$.
Ce serait bien si l'on pouvait prendre pour fonction f la fonction g, car on aurait alors $\langle g \mid g \rangle = 0$, puis $g = 0$ (par le caractère défini du produit scalaire).
Mais aucune raison pour que g soit dans F.
On a donc l'idée de prendre $f : t \mapsto tg(t)$ qui est bien dans F.

Posons $f : t \mapsto tg(t)$. Cette fonction f est continue et vérifie $f(0) = 0$, donc $f \in F$.
On a alors d'après $(\star)$

$$\int_0^1 fg = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 tg(t)\,g(t) = 0$$

La fonction $t \mapsto tg^2(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle.
D'après le critère de nullité, c'est la fonction nulle :

$$\forall t \in [0,1], \quad tg^2(t) = 0$$

D'où

$$\forall t \in \,]0,1], \quad g^2(t) = 0$$

Ainsi, la fonction $g_{|]0,1]}$ est la fonction nulle.
Par continuité de g en 0, on en déduit que g est la fonction nulle.

Bilan. On a montré l'inclusion $F^\perp \subset \{0\}$.
Comme l'autre inclusion est évidente, on a $F^\perp = \{0\}$.
Ainsi, $F \oplus F^\perp = F$.
Par ailleurs, on a évidemment $F \subsetneq E$ (il existe des fonctions continues qui ne s'annulent pas en 0), donc $F \oplus F^\perp \subsetneq E$.

37

Notons $p_F(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \text{Vect}(1, X)$.
C'est l'unique vecteur de F tel que $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$.
Comme ce projeté appartient à F, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ uniques tels que $p_F(X^2) = \lambda + \mu X$.
On les détermine en exploitant le fait que $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$.

On a $\begin{cases} \langle X^2 - p_F(X^2) \mid 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - p_F(X^2) \mid X \rangle = 0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \langle p_F(X^2) \mid 1\rangle = \langle X^2 \mid 1\rangle \\ \langle p_F(X^2) \mid X\rangle = \langle X^2 \mid X\rangle \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 2\lambda + \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{4} \end{cases}$

D'où $\lambda = -\dfrac{1}{6}$ et $\mu = 1$.

Ainsi, $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$.

• Notons $p_F(X^3)$ le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.
Comme ce projeté appartient à F, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ uniques tels que $p_F(X^3) = aX^2 + bX + c$.
On les détermine en exploitant le fait que $X^3 - p_F(X^3) \in F^\perp$.
On a

$$\begin{cases} \langle X^3 - p_F(X^3) \mid 1\rangle = 0 \\ \langle X^3 - p_F(X^3) \mid X\rangle = 0 \\ \langle X^3 - p_F(X^3) \mid X^2\rangle = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \langle p_F(X^3) \mid 1\rangle = \langle X^3 \mid 1\rangle \\ \langle p_F(X^3) \mid X\rangle = \langle X^3 \mid X\rangle \\ \langle p_F(X^3) \mid X^2\rangle = \langle X^3 \mid X^2\rangle \end{cases}$$

ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = 3 \\ 15a + 20b + 30c = 12 \\ 12a + 15b + 20c = 10. \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2$ donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = 3 \\ a + b + 2c = 1 \\ 12a + 15b + 20c = 10 \end{cases}$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ 2b + 4c = -1 \\ 3b - 4c = -2 \end{cases}$$

On obtient ainsi $b = -\dfrac{3}{5}$, $c = \dfrac{1}{20}$ et $a = \dfrac{3}{2}$.

D'où

$$p_F(X^3) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}.$$

39

Décomposons $p_F(x)$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}$:

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle p_F(x) \mid e_k\rangle\, e_k.$$

Or, d'après...., on a $\langle p_F(x) \mid e_k\rangle = \langle x \mid e_k\rangle$, d'où le résultat.

40

La famille $\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ est une base orthonormée de $D = \text{Vect}(u)$.
Donc

$$p_F(x) = \left\langle x \,\middle|\, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle x \mid u\rangle}{\|u\|^2} u$$

41

On a $E = H \oplus D$, donc $\text{id} = p_H + p_D$, d'où le résultat.

42

Construisons la famille $(f_1,\dots,f_n)$ par récurrence.
Autrement dit, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, on note

$$\mathscr{H}_p: \quad \text{il existe } (f_1,\dots,f_p) \text{ orthonormée telle que } \mathrm{Vect}\big(f_1,\dots,f_p\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1,\dots,e_p\big).$$

Remarque. Il suffit de demander l'inclusion $\mathrm{Vect}\big(f_1,\dots,f_p\big) \subset \mathrm{Vect}\big(e_1,\dots,e_p\big)$.
En effet, la famille $(f_1,\dots,f_p)$ est orthonormée, elle est libre, donc les deux Vect sont de dimension p.

Initialisation. On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Alors, (f_1) est une famille orthonormée vérifiant $\mathrm{Vect}(f_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

D'où $\mathscr{H}_1$.

Hérédité. Soit $p \in [\![1,n-1]\!]$.

Supposons $\mathscr{H}_p$.

Montrons $\mathscr{H}_{p+1}$.

Autrement dit, montrons qu'il existe $(f_1,\dots,f_{p+1})$ orthonormée tq $\mathrm{Vect}\big(f_1,\dots,f_{p+1}\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1,\dots,e_{p+1}\big)$.

D'après $\mathscr{H}_p$, on peut trouver $(f_1,\dots,f_p)$ orthonormée telle que $\mathrm{Vect}\big(e_1,\dots,e_p\big) = \mathrm{Vect}\big(f_1,\dots,f_p\big)$.

• Il nous faut construire f_{p+1}. Faisons une analyse au brouillon.

Demander l'existence d'un tel f_{p+1} est **équivalent** à demander (WHY?) :

- f_{p+1} est unitaire
- $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p)^\perp$
- $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1}) \overset{\mathscr{H}_p}{=} \mathrm{Vect}(f_1,\dots f_p) \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1})$

Commençons par trouver un vecteur g_{p+1} tel que

- $g_{p+1} \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p)^\perp$
- $g_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1}) \overset{\mathscr{H}_p}{=} \mathrm{Vect}(f_1,\dots f_p) \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1})$

Notons $\boxed{F_p = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p)}$.

On a donc nécessairement qq chose du type

$$g_{p+1} = \lambda e_{p+1} + \text{truc dans } F_p \quad \in F_p^\perp$$

On ne peut pas avoir $\lambda = 0$ (WHY?). On essaie $\lambda = 1$.

Alors le truc dans F_p est nécessairement égal à $-p_{F_p}(e_{p+1})$.

• Posons $g_{p+1} = e_{p+1} - p_{F_p}(e_{p+1})$ et posons $f_{p+1} = \dfrac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$.

Alors

- f_{p+1} est unitaire
- $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p)^\perp$
- $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots f_p) \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1}) \overset{\mathscr{H}_p}{=} \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1})$

Donc

- $(f_1,\dots,f_p,f_{p+1})$ est orthonormée
- $\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_{p+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1})$

D'où $\mathscr{H}_{p+1}$

43

On pose $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.
On pose

$$\begin{aligned} g_2 &= e_2 - p_{F_1}(e_2) \\ &= e_2 - \langle e_2 \mid f_1 \rangle f_1 \\ &= (1,0) \;-\; (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 \langle (1,0) \mid (1,1) \rangle \,(1,1) \\ &= (1,0) - \tfrac{1}{2}(1,1) \\ &= \tfrac{1}{2}(1,-1) \end{aligned}$$

Puis on pose $f_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|}$.
On a $\|g_2\| = \dfrac{1}{2}\|(1,1)\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
D'où $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

47

Soit $x \in E$.
Montrons que $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.
Autrement dit que $\inf\limits_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$.
Autrement dit que $\inf\left\{\|x-y\|, y \in F\right\} = \|x - p_F(x)\|$.
En fait, on va montrer que c'est un minimum;

$$\min\left\{\|x-y\|, y \in F\right\} = \|x - p_F(x)\|$$

- On a $\|x - p_F(x)\| \in \left\{\|x-y\|, y \in F\right\}$.
- Montrons que $\|x - p_F(x)\|$ est un minorant.
  Soit $y \in F$. On a

  $$\|x - p_F(x)\|^2 \;\leqslant\; \|\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp}\|^2 \;+\; \|\underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}\|^2$$

  D'après Pythagore :

  $$\|x - p_F(x)\|^2 \;\leqslant\; \|x - y\|^2$$

De plus, soit $y \in F$. On a

$$d(x,F) = \|x-y\| \iff \|x - p_F(x)\|^2 = \|x-y\|^2 \iff \|p_F(x) - y\|^2 = 0 \iff y = p_F(x).$$

49

Soit $x \in E$. On a

$$d(x,H) \;=\; \|x - p_H(x)\| \;=\; \left\|\frac{\langle x \mid u\rangle}{\|u\|^2} u\right\| \;=\; |\langle x \mid u\rangle| \frac{\|u\|}{\|u\|^2} \;=\; \frac{|\langle x \mid u\rangle|}{\|u\|}$$