Espace euclidien

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I. Produit scalaire

Formes bilinéaires

1 **Définition.**
Soit $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ une application définie sur le produit cartésien $E\times E$ et à valeurs **réelles**.

- On dit que φ est une *forme bilinéaire* lorsque :
  - — pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ est une forme linéaire
  - — pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x_0, y)$ est une forme linéaire
- On dit que φ est *symétrique* lorsque :
$$\forall (x,y)\in E\times E,\quad \varphi(x,y)=\varphi(y,x).$$
- On dit que φ est *positive* lorsque :
$$\forall x\in E,\quad \varphi(x,x)\geqslant 0$$
- On dit que φ est *définie positive* lorsqu'elle est positive et vérifie :
$$\forall x\in E,\quad \varphi(x,x)=0 \implies x=0$$

- **Question.** Est-ce que le fait que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ est utilisé quelque part ?
- **Remarque importante !** Pour montrer qu'une application est une *forme bilinéaire symétrique*, il suffit de montrer la symétrie, **puis** la linéarité par rapport à l'une des deux variables.
- **Vocabulaire.** Lorsque $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, on dit souvent que c'est une forme bilinéaire *sur* E (plutôt que sur $E\times E$).
- **Exemples.** L'application φ_k est-elle bilinéaire, symétrique, positive, définie positive ?

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 5x_1y_1+6x_1y_2+7x_3y_3 \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 6x_1y_1+7x_1y_2+7x_2y_1+8x_2y_2+9x_3y_3 \end{array}$$

$$\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \end{array} \qquad \varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -7x_1y_1+8x_2y_2+9x_3y_3 \end{array}$$

Produit scalaire

2 **Définition.**

— Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

— Un *espace préhilbertien réel* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

— Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Un espace euclidien est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

- **Vocabulaire.** Lorsque φ un produit scalaire sur E et $(x, y) \in E \times E$, le réel $\varphi(x, y)$ est appelé le produit scalaire de x et y. Il est noté généralement $(x \mid y)$ ou $x \cdot y$ ou $\langle x \mid y \rangle$.

  En géométrie (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$), on utilise souvent la notation $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour désigner le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- **Remarque** (sûrement étrange en première lecture ?!).
  Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$, alors l'application induite $\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle \end{array}$ est un produit scalaire sur F. On peut donc considérer F comme un espace préhilbertien réel pour ce produit scalaire qui sera encore noté $\langle \mid \rangle$.

3 **Proposition (exemples de référence).**

— L'application suivante est **un** produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \end{array}$$

C'est **le** *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n$.

— L'application suivante est **un** produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(A^\top B) \end{array}$$

C'est **le** *produit scalaire canonique* sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- **Remarque importante.** Prenons le produit scalaire canonique sur les colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  A-t-il un rapport avec le produit scalaire canonique sur les n-uplets de $\mathbb{R}^n$?
  Autrement dit, en considérant les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \operatorname{tr}(X^\top Y) \end{array}$$

  existe-t-il un lien entre φ et ψ ?

  La réponse est OUI, car en notant $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, on a $\operatorname{tr}(X^\top Y) = \dots$

4 preuve

Exemples.

- Soit $\alpha < \beta$ deux réels. L'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

- Soit $a < b$ deux réels. L'application suivante est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$:

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big) \times \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b fg \end{array}$$

5 sol → 21

Question. Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t f(t) g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Norme associée à un produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$.

6 **Définition.** La *norme associée au produit scalaire* $\langle \mid \rangle$ est l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle} \end{array}$

- **Vocabulaire.** Une norme associée à un produit scalaire est appelée *norme euclidienne*. Vous verrez en Spé qu'il existe des normes qui ne sont pas associées à un produit scalaire.
- **Propriété de séparation de la norme.** On a $\quad \forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E \qquad \heartsuit$
  En effet, on a $\|x\|^2 = \langle x \mid x\rangle$, donc si on suppose que $\|x\| = 0$, on en déduit $\langle x \mid x\rangle = 0$, puis grâce à l'aspect défini positif du produit scalaire, on en déduit $x = 0_E$.
- **Exemples.**
  La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array}$
  La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est (WHY?) $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}^2} \end{array}$
- **Questions pour aborder la prochaine proposition.**
  Comment prouvez-vous les cinq identités remarquables :
  $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
  $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad ab = \dfrac{1}{2}\Big((a+b)^2 - a^2 - b^2\Big)$
  $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\big(a^2+b^2\big)$
  Comment généraliser la première formule à trois réels $(a+b+c)^2 = \ldots$? Et à s réels ?

7 preuve **Proposition (identités remarquables).**
Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire, et $\| \ \|$ la norme associée.

- **Les 3 formules « du collège ».** $\quad \forall x,y \in E, \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$
  $\forall x,y \in E, \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$
  $\forall x,y \in E, \quad \|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y \mid x-y\rangle.$
- **La formule de polarisation.** $\quad \forall x,y \in E, \quad \langle x \mid y\rangle = \dfrac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big)$
- **L'identité du parallélogramme.** $\quad \forall x,y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$

- **Bilinéarité.** La formule du collège ci-dessus est en fait ni plus ni moins que la bilinéarité du produit scalaire et elle se généralise en :

$$\forall x,y \in E, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\mu\langle x \mid y\rangle + \mu^2\|y\|^2$$

- **Généralisation de la 1ere formule du collège.** Soit $(v_1,\ldots,v_s)$ une famille de vecteurs de E. On a

$$\Big\|\sum_{i=1}^s v_i\Big\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- **Remarque.** La formule de polarisation permet de retrouver le produit scalaire si l'on connaît la norme euclidienne.

8 sol → 22 **Question.** Montrer qu'un endomorphisme qui conserve la norme conserve le produit scalaire.
Autrement dit, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Montrer que $\forall x,y \in E$, $\langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$.

9 preuve

Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz). On a

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\langle x \mid y\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

C'est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

- **Preuve.** On va en fait prouver que $\big|\langle x \mid y\rangle\big|^2 \leqslant \|x\|^2\,\|y\|^2$ ou encore que $\Big(2\,\langle x \mid y\rangle\Big)^2 \leqslant 4\|x\|^2\,\|y\|^2$.

10

Proposition.

1. On a l'inégalité :

$$(\clubsuit) \qquad \forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

2. On a l'inégalité :

$$\forall\, f, g \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \quad \Big|\int_a^b f g\Big| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\,\sqrt{\int_a^b g^2}$$

- **Cas particulier.** Que dit l'inégalité ($\clubsuit$) pour $n = 1$ et pour $n = 2$?

11

Proposition (norme). La norme associée au produit scalaire $\langle\ \mid\ \rangle$ vérifie :

- ⋆ $\forall\, x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$ (séparation)
- ⋆ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E, \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité)
- ⋆ $\forall\, x, y \in E, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
  avec égalité si et seulement si x et y sont *positivement colinéaires* :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad y = \alpha x \qquad \text{ou} \qquad \exists\, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad x = \beta y.$$

- **Illustration dans $\mathbb{R}^2$.** L'inégalité triangulaire s'énonce

$$\forall\,(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Conséquence. Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres :

$$AC \leqslant AB + BC$$

12

Proposition (seconde inégalité triangulaire). On a :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

II. Orthogonalité

Généralités

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel.
On note $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire et $\| \ \|$ la norme associée.

13 **Définition.**

- — On dit qu'un vecteur est *unitaire* lorsqu'il est de norme 1.
- — On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* lorsque $\langle x \mid y\rangle = 0$.

- **Remarque.** Par symétrie du produit scalaire, si $\langle x \mid y\rangle = 0$, alors $\langle y \mid x\rangle = 0$.
  Ainsi, la relation d'orthogonalité est symétrique.
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs $u = (3,0)$ et $v = (0,1)$ sont orthogonaux.
  En effet, $\langle u \mid v\rangle = 3\times 0 + 0\times 1 = 0$.
- **Exemple.** Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, montrer que la matrice identité est orthogonale à toute matrice N de trace nulle.
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que les polynômes X et X^2 sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
  Sont-ils orthogonaux pour $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{0}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Exemple.** Dans $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$, montrer que les fonctions cosinus et sinus sont orthogonales.

14 **Proposition.**

- — Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E.
- — Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.
- — Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur de E.

15 **Théorème de Pythagore.** Soit $x, y \in E$.
On a l'équivalence :

$$x \text{ et } y \text{ orthogonaux} \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- **Illustration dans $\mathbb{R}^2$.** Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, le théorème de Pythagore s'énonce

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

On retrouve le résultat du collège !

$$\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } B \iff AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

16 **Définition.** Soit A une partie de E.
L'*orthogonal* de A est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs $a \in A$:

$$A^{\perp} = \left\{x \in E \mid \forall\, a \in A,\ \langle x \mid a\rangle = 0\right\}.$$

- **Reformulation.** Pour tout $a \in A$, on note $\varphi_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x \mid a\rangle \end{array}$ Alors on a $A^{\perp} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

17 preuve **Proposition.**

i) L'orthogonal d'une partie A de E est un sous-espace vectoriel de E.
ii) L'orthogonal de $\{0_E\}$ est E.
iii) L'orthogonal de E est $\{0_E\}$.
iv) Soit A une partie de E. Alors $A \cap A^{\perp} = \{0_E\}$.
v) Soit A une partie de E. Alors $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
vi) Soit A et B deux parties de E. Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
vii) On a

$$\forall\, v_1, \ldots, v_s \in E, \quad \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)^{\perp} = \left\{v_1, \ldots, v_s\right\}^{\perp}$$

18 **Proposition.** Soit F un sev de E de dimension finie, et $\mathscr{B}_F$ une base de F.
Soit $x \in E$. Alors :

$$x \in F^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ est orthogonal à tout vecteur de } \mathscr{B}_F$$

19 **Proposition.** Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul.
On a l'égalité

$$E = \mathrm{Vect}(a) \oplus \left\{a\right\}^{\perp}$$

En particulier, $\left\{a\right\}^{\perp}$ est un hyperplan de E.

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur cette somme directe, à savoir :

$$x = \quad \ldots\ldots\, a \quad + \quad \underset{\text{il n'y a plus le choix}}{}$$

Familles orthogonales et orthonormées

20 **Définition.**

- Une *famille orthogonale* de E est une famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.
- Une *famille orthonormée* de E est une famille de vecteurs de E unitaires et deux à deux orthogonaux.

- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, connaissez-vous des familles orthogonales ? Et orthonormée ?
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, la famille $(1, X, X^2)$ est-elle orthogonale ?
- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}[X]$, trouver un produit scalaire pour lequelle la famille $(1, X, X^2)$ est-elle orthogonale. Puis orthonormée.
- **Exemple.** Dans $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$, la famille $(\cos, \sin)$ est-elle orthogonale ? orthonormée ?

21 **Proposition.** Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre.
En particulier, une famille orthonormée de E est libre.

- **Attention !** Une famille orthogonale est susceptible de contenir le vecteur nul donc l'hypothèse de non nullité est indispensable.

22 **Proposition.** Soit $(v_1, \dots, v_s)$ une famille de vecteurs de E.
Si $(v_1, \dots, v_s)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{s} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{s} \|v_i\|^2.$$

- **Attention.** Pour $s \geqslant 3$, la réciproque est fausse.
Prendre $E = \mathbb{R}^3$ et $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-\frac{1}{2})$, $v_3 = (0,0,1)$.
Montrer que cela constitue un contre-exemple à la réciproque.

Bases orthonormées

Puisque nous allons parler de base, nous supposons ici (cf. programme PCSI) que E est euclidien.

23 **Définition.** Une *base orthonormée* de E est une base de E qui est une famille orthonormée.

- **Remarque très importante.** Pour montrer qu'une famille est une BON, il suffit de montrer que la famille est orthonormée et de bon cardinal. WHY ?

24 **Proposition.**

— Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

— Il en est de même dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

25 preuve **Proposition.** Un espace euclidien possède une base orthonormée.

26 **Proposition (expression dans une BON).**
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base *orthonormée* de E.

— **Expression d'un vecteur.** Soit $x \in E$. On a

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i.$$

— **Expression du p.s.** Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \, e_i$ deux vecteurs de E.

Alors

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

En posant $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$, on a

$$\langle x \mid y \rangle = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = X^\top X$$

- **Reformulation.** Au cours de la preuve, on a vu que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $x_i = \langle x \mid e_i \rangle$ (attention, on utilise le fait que $\mathscr{B}$ est une BON).
- **Abus de langage.** Dans la dernière formulation :

  — à gauche de l'égalité, $\langle x \mid y \rangle$ est un réel

  — à droite $X^\top Y$ est une matrice carrée de taille 1.

  On pourrait enlever cet abus de langage en utilisant la trace :

  $$\langle x \mid y \rangle = \mathrm{tr}(X^\top Y) \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \mathrm{tr}(X^\top X)$$

  mais il faut aussi savoir gérer les abus de langage (nombreux en sciences).
- **Pour les yeux.** La formule $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$ est en fait à retenir sous la forme

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle y \mid e_i \rangle \qquad \text{où } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une BON de } E$$

- **Pour la culture.** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
  On rappelle que l'application
  $$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$
  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  Si l'on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, la proposition montre que cet isomorphisme conserve la norme et le produit scalaire.

27 sol → 22

Question. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels distincts.

1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k) \end{array}$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de E pour le produit scalaire φ.
3. Soit $P \in E$. Donner l'expression de P dans cette base de Lagrange.

28 sol → 23

Question. Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit f une forme linéaire sur E.
Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\quad \forall\, x \in E, \quad f(x) = \langle a \mid x \rangle$.
Et l'expliciter dans la base $\mathscr{B}$.

III. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel.
On note $\langle\ |\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

Supplémentaire orthogonal

29 **Définition.**
Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *orthogonaux* lorsque $\quad \forall\,(x,y) \in F \times G, \quad \langle x \mid y\rangle = 0.$

- **Reformulation.** L'orthogonalité de F et G est équivalente à $F \subset G^{\perp}$ (bien sûr, c'est aussi équivalent à $G \subset F^{\perp}$).
- **Attention.** ~~F et G orthogonaux ne signifie pas $F = G^{\perp}$~~
  Penser dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, à $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3)$.
- **Fait.** Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.
  En effet, par définition les éléments de $F^{\perp}$ sont orthogonaux à tous les éléments de F.

- **Une question se pose.** Soit F un sev de E.
  Existe-t-il G sev de E tel que $E = F \oplus G$ et $F \perp G$?
  La réponse est oui si F est de dimension finie (cf. proposition suivante), et un tel G est unique !
  En revanche, on ne peut rien dire si F n'est pas de dimension finie.

30 preuve **Proposition.** Soit E un espace préhilbertien.
Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie.**
Il existe un unique sev G de E tel que $\begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G \end{cases}$ à savoir $G = F^{\perp}$.
En particulier, $\quad E \ = \ F \oplus F^{\perp}.$

- **En français.** Un sev de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- **Vocabulaire.** Ainsi, $F^{\perp}$ est **un** supplémentaire de F, pourvu que F soit de dimension finie.
  C'est même **le** supplémentaire orthogonal de F.
- **À retenir.** Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F.
  Un vecteur x de E possède une écriture unique sur la somme directe $F \oplus F^{\perp}$, à savoir :

$$x \quad = \quad \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k\rangle e_k \quad + \quad \text{il n'y a plus le choix}$$

Pour retenir cette formule, penser au cas où $x \in F$; dans ce cas, $x = x + 0$ et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée, on a $x = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k\rangle e_k$.

31 sol → 25 **Question.** Soit $E = \mathscr{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \Big\{ f \in E \mid f(0) = 0 \Big\}$.
Montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$. A-t-on $F \oplus F^{\perp} = E$?

32 preuve

Proposition (en dimension finie). Soit E un espace *euclidien* (donc de dimension finie).
Soit F un sev de E. Alors

- $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$

- **À propos d'hyperplan.**

Par définition même, **un supplémentaire** d'un hyperplan est une droite (c'est la définition en dimension quelconque).

En dimension finie, c'est-à-dire lorsque E est euclidien, **l'orthogonal** d'un hyperplan est une droite, et comme elle n'est pas incluse dans l'hyperplan, cette droite est **un supplémentaire** (c'est le supplémentaire orthogonal, tout vecteur dirigeant cette droite est appelé *vecteur normal* à H, il existe deux vecteurs normaux *unitaires*, opposés l'un à l'autre).

En dimension infinie, **l'orthogonal** d'un hyperplan n'est pas toujours une droite (penser à l'exemple précédent), mais **UN supplémentaire** est une droite !

33

Proposition.
Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont des bases orthonormées de deux supplémentaires orthogonaux.

— Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F et $F^{\perp}$ admettent respectivement $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ comme bases orthonormées, alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

34 preuve

Proposition (Théorème de la base orthonormée incomplète).
Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

Projection orthogonale

35 **Définition.**
Soit E un espace préhilbertien.
Soit F un sous-espace vectoriel de *dimension finie*, de sorte que (WHY?) $E = F \oplus F^{\perp}$.
La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$, qui est un endomorphisme de E, est appelée la *projection orthogonale* sur F.
L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le *projeté orthogonal* de x sur F.

- **Notation.** La projection orthogonale sur F est notée p_F.
- **Caractérisation.** Soit $x \in E$.

  Le projeté orthogonal de x sur F, noté $p_F(x)$, est l'unique vecteur y vérifiant $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$

  Ainsi, $p_F(x)$ est **le** vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

36 preuve **Proposition.**
Soit F un sev de dimension finie, et $\mathscr{B}_F$ une base.
Soit $x \in E$ (moralement, dont on cherche à calculer le projeté orthogonal sur F).
On a

$$\forall\, y \in F, \qquad \Big(y = p_F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, e \in \mathscr{B}_F,\ \langle x - y \mid e \rangle = 0\Big)$$

- **Remarque pour les exos.** En notant $p = \dim F$, il est important de voir l'équivalence précédente comme :

$$\underbrace{\forall\, y \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F)}_{\text{se donner } p \text{ scalaires}}, \qquad \Big(y = p_F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\forall\, e \in \mathscr{B}_F,\ \langle y \mid e \rangle = \underbrace{\langle x \mid e \rangle}_{\text{à calculer}}}_{\text{il y a } p \text{ égalités}}\Big)$$

37 sol → 26 **Question.** Considérons $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.
Même question avec le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

38 **Question.** Considérons $E = \mathscr{C}^0\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.
Déterminer le projeté orthogonal de $\varphi : t \longmapsto t$ sur $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

39 preuve

Proposition (expression du projeté avec une BON.)
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $x \in E$.
Alors le projeté orthogonal de x sur F est :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid f_k \rangle f_k \qquad \text{où } \mathscr{B} = (f_1, \dots, f_p) \text{ une base } \textit{orthonormée} \text{ de } F$$

ou encore

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\langle x \mid v_k \rangle}{\| v_k \|^2} v_k \qquad \text{où } \mathscr{B} = (v_1, \dots, v_p) \text{ une base } \textit{orthogonale} \text{ de } F$$

- **Remarque.** Par construction, le vecteur $x - p_F(x)$ est dans $F^\perp$, donc avec les notations précédentes

$$x - \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid f_k \rangle f_k \in F^\perp$$

40 preuve

Proposition (projection sur une droite).
Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul de E.
Posons $D = \mathrm{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$. On a

$$p_D(x) = \frac{\langle x \mid u \rangle}{\| u \|^2} u$$

Dans la proposition suivante, on suppose E de dimension finie pour être en conformité avec le programme officiel de PCSI. En réalité, c'est inutile.

41

Proposition (Projection sur un hyperplan).
Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul de E.
Posons $H = \{u\}^\perp$.
Soit $x \in E$. On a

$$p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid u \rangle}{\| u \|^2} u$$

IV. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

42
preuve

Proposition (orthonormalisation de Gram-Schmidt).
Soit $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille *libre* de E.
Alors il existe une famille *orthonormée* $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall\, p \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}\big(e_1, \dots, e_p\big) \;=\; \mathrm{Vect}\big(f_1, \dots, f_p\big).$$

- **Non unicité.** Une telle famille $(f_1, \dots, f_n)$ n'est pas unique, WHY ?

- **À retenir.** Le procédé de construction de la démonstration précédente est le suivant. On l'appelle *l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt* :

$$g_p \;=\; e_p - \sum_{k=1}^{p-1} \langle e_p \mid f_k \rangle\, f_k \qquad \text{et} \qquad f_p \;=\; \frac{g_p}{\|g_p\|}.$$

Ainsi, g_p est obtenu en retranchant à e_p son projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}(\underbrace{f_1, \dots, f_{p-1}}_{\text{BON}}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$.

- **Remarque.** Si les premiers vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ forment une famille orthonormée, alors il est facile de voir que l'algorithme de Gram-Schmidt les conserve.

43
sol → 28

Question. Considérons la famille libre $\big((1,1),(1,0)\big)$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^2$.
Lui appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

V. Distance

44 **Définition (distance entre deux vecteurs).**
La *distance associée au produit scalaire* $\langle \mid \rangle$ est l'application $\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$

45 **Proposition (propriétés de la distance).**
Soit d la distance associée au produit scalaire sur E. Pour tout $(x,y,z)\in E^3$, on a :

- ⋆ $d(x,y)=0 \iff x=y$ (séparation)
- ⋆ $d(x,y)=d(y,x)$ (symétrie)
- ⋆ $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (inégalité triangulaire)
- ⋆ $d(x,z)\geqslant \left|d(x,y)-d(y,z)\right|$ (seconde inégalité triangulaire)

46 **Définition (distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel).**
Soit $x\in E$.
Soit A une partie non vide de E.
On appelle *distance* de x à A la quantité :

$$d(x,A) \;=\; \inf_{a\in A} d(x,a) \qquad \text{ou encore} \qquad d(x,A) \;=\; \inf_{a\in A}\|x-a\|$$

- **Existence.**
La partie $\{d(x,a),\ a\in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée (par 0), donc admet une borne inférieure.

Quand le contexte est favorable (cf. la proposition suivante), cette borne inférieure est en fait un minimum.
Ci-dessous, on note p_F la projection orthogonale sur F.

47 preuve **Proposition très importante.** Soit $x\in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
La distance du vecteur x au sev F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

Autrement dit :

- ⋆ $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|$
- ⋆ $\forall\, y\in F,\quad \Big(d(x,F)=\|x-y\| \iff y=p_F(x)\Big)$

- **Remarque.** On a (WHY? Faire un dessin)

$$d(x,F)^2 \;=\; \|x\|^2-\|p_F(x)\|^2$$

48 **Question.** On souhaite déterminer

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(t-(a\cos t+b\sin t)\Big)^2 \mathrm{d}t.$$

Qui joue le rôle de E ? de F ? de x ?
Quel est le produit scalaire ?

49 preuve

Proposition (distance à un hyperplan). Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in E\setminus\{0\}$ et $H = \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.
Soit $x \in E$.
Alors

$$d(x,H) = \frac{|\langle x \mid u\rangle|}{\|u\|}.$$

Espace euclidien

preuve et éléments de correction

4

Symétrie. Soit $(P,Q) \in E^2$. On a

$$\varphi(P,Q) \;=\; \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 Q(t)P(t)\mathrm{d}t \;=\; \varphi(Q,P)$$

Bilinéarité. Soit $(P,Q,R) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q,\, R) \;=\; \lambda \int_0^1 P(t)R(t)\mathrm{d}t \;+\; \mu \int_0^1 Q(t)R(t)\mathrm{d}t \;=\; \lambda\varphi(P,R) + \mu\varphi(Q,R)$$

ce qui prouve que φ est linéaire par rapport à la première variable.
Comme φ est symétrique, on en déduit que φ est bilinéaire.

Positivité. Soit $P \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$.

Caractère défini. Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, c'est-à-dire tel que $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$.

La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue (car polynomiale), positive et d'intégrale nulle.
Par le critère de nullité, cette fonction est nulle, donc $\forall\, t \in [0,1],\; P(t)^2 = 0$.
Ainsi, tous les réels du segment $[0,1]$ sont racines de P.
Donc P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

5

— Par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, l'application φ est une forme bilinéaire symétrique.

— Soit $f \in E$. Montrons que $\langle f \mid f\rangle \geqslant 0$.
On a $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_0^1 t f(t)^2 \mathrm{d}t$. La fonction intégrée est positive, donc l'intégrale est un réel positif.

— Soit $f \in E$ tel que $\varphi(f,f) = 0$.
La fonction $t \mapsto t f(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle donc cette fonction est nulle.
On en déduit :

$$\forall\, x \in\,]0,1],\; f(x) = 0$$

Par continuité de f en 0, on en déduit que f est nulle sur $[0,1]$.

7

On a :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y \mid x+y\rangle \\
&= \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle && \text{(bilinéarité)} \\
&= \langle x \mid x\rangle + 2\langle x \mid y\rangle + \langle y \mid y\rangle, && \text{(caractère symétrique)}
\end{aligned}$$

On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$ et, en remplaçant y par $-y$, on obtient :

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$$

En sommant ces deux égalités, on obtient

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

Cette égalité traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.

8

Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\begin{array}{rcll} \langle f(x) \mid f(y)\rangle & = & \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) & \text{formule de polarisation} \\ & = & \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) & \text{linéarité de } f \\ & = & \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) & \text{hypothèse} \\ & = & \langle x \mid y\rangle. & \text{formule de polarisation} \end{array}$$

Ainsi, un endomorphisme qui conserve la norme conserve le produit scalaire.

9

Considérer $\lambda \mapsto \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$.
Autre preuve. On peut aussi commencer par prouver l'inégalité avec des vecteurs unitaires x' et y' en utilisant $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ puis $(\lambda, \mu) = (1, -1)$. L'une prouve $\langle x' \mid y'\rangle \geqslant -1$ et l'autre prouve $\langle x' \mid y'\rangle \leqslant 1$.

17

Supposons que $A \subset B$.
Montrons $B^\perp \subset A^\perp$.
Soit $b \in B^\perp$.
Montrons que $b \in A^\perp$, c'est-à-dire montrons que $\forall\, a \in A,\ \langle b \mid a\rangle = 0$.

> Soit $a \in A$.
> Comme $A \subset B$, on a $a \in B$.
> Comme $b \in B^\perp$, ce vecteur b est orthogonal à tous les vecteurs de B en particulier est orthogonal à a.
> D'où $\langle b \mid a\rangle = 0$.

25

Soit E un espace euclidien.
Considérons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (licite : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie !).
D'après l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à cette famille (licite, car cette famille est libre), il existe une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de E (vérifiant une certaine condition).
La famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est donc libre et possède $n = \dim E$ éléments.
C'est donc une base de E.
Comme cette famille est orthonormée, c'est une base orthonormée de E.
Autre argument. D'après l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à cette famille (licite, car cette famille est libre), il existe une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de E *engendrant le même espace que la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$, donc engendrant E.

27

1. — Symétrie, bilinéarité, positivité : à vous.

— **Caractère défini.**
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$.
Alors $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$.
Donc $\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P(a_k) = 0$.
Le polynôme P possède donc $n+1$ racines distinctes et est de degré au plus n.
Donc $P = 0$.

2. Notons $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est une famille libre (WHY?) de bon cardinal).
Montrons qu'elle est orthonormée pour le produit scalaire φ.
Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$. On a :

$$\varphi(L_i, L_j) \;=\; \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) L_j(a_k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} \;=\; \delta_{i,j}.$$

Ainsi, $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ.

3. Comme la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$P \;=\; \sum_{i=0}^{n} \langle P \mid L_i \rangle L_i$$

Or, un calcul (lequel) montre que $\langle P \mid L_i \rangle = P(a_i)$.
D'où $P \;=\; \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

28

Analyse Supposons qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que....

Écrivons a sur la base $\mathscr{B}$, disons $a = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i$.
Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad a_i = \langle a \mid e_i \rangle$$

Par définition de f, on a alors $a_i = f(e_i)$.
Donc $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$.

Synthèse Posons $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$.

Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de a dans $\mathscr{B}$ vaut $\langle a \mid e_i \rangle$.
D'autre part, cette $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut $f(e_i)$.
D'où $f(e_i) = \langle a \mid e_i \rangle$.
Alors les formes linéaires f et $x \mapsto \langle a \mid x \rangle$ coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ donc sont égales.

Autre preuve. On peut aussi considérer l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \langle a \mid \bullet \rangle \end{array}$$

C'est une application linéaire *injective* entre deux espaces vectoriels de même dimension finie.

Soit $a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $a \in E$ et $\varphi(a) = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$.
Autrement dit, $\langle a \mid \bullet \rangle = 0$, donc pour tout $x \in E$, on a $\langle a \mid x \rangle = 0$.
En particulier, pour $x = a$, on obtient $\langle a \mid a \rangle = 0$, d'où $a = 0$ (d'après le caractère défini du produit scalaire).

Ainsi, φ est bijective, et on obtient qu'il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \langle a \mid \bullet \rangle$.
On obtient donc l'existence et l'unicité du vecteur a cherché mais pas son expression.

30

Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Soit $x \in E$.
Montrons qu'il existe un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.
Pour cela, raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.

Idée. On cherche à exprimer y en fonction de x et $\mathscr{B}$.

En appliquant $\langle \bullet \mid e_k \rangle$, on a :

$$(\spadesuit) \qquad \forall k \in [\![1, p]\!], \quad \langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle + \langle z \mid e_k \rangle$$

— Comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a :

$$y = \sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle \, e_k$$

— Comme $z \in F^{\perp}$ et $e_k \in F$, on a $\langle z \mid e_k \rangle = 0$.

D'où, en reprenant ($\spadesuit$), on a $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.
Ainsi,

$$y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$$

Autre rédaction de l'Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base de F, le vecteur y s'écrit

$$y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, e_k$$

Idée. On cherche à exprimer y, donc les λ_k en fonction de x et $\mathscr{B}$.

Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Appliquons $\langle \bullet \mid e_i \rangle$.

$$\langle x \mid e_i \rangle = \langle y \mid e_i \rangle + \langle z \mid e_i \rangle$$

— Comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a :

$$\lambda_i = \langle y \mid e_i \rangle$$

— Comme $z \in F^{\perp}$ et $e_i \in F$, on a $\langle z \mid e_i \rangle = 0$.

Ainsi,

$$y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$$

Synthèse. Posons $y = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$ et $z = x - y$.

Alors

⋆ $x = y + z$

- ⋆ $y \in F$ car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- ⋆ $z \in F^{\perp}$ car

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \langle z \mid e_i \rangle \;=\; \langle x - y \mid e_i \rangle \;=\; \langle x \mid e_i \rangle - \langle y \mid e_i \rangle \;=\; 0$$

  Justifions la dernière égalité.

  Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON, y s'écrit $\sum\limits_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle e_k$.

  Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a alors $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.

31

Soit $g \in F^{\perp}$. On a alors

$$(\star) \qquad \forall\, f \in F, \quad \langle f \mid g \rangle = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 fg = 0$$

Idée. On veut montrer que $g = 0$.
Ce serait bien si l'on pouvait prendre pour fonction f la fonction g, car on aurait alors $\langle g \mid g \rangle = 0$, puis $g = 0$ (par le caractère défini du produit scalaire).
Mais aucune raison pour que g soit dans F.
On a donc l'idée de prendre $f : t \mapsto tg(t)$ qui est bien dans F.

Posons $f : t \mapsto tg(t)$. Cette fonction f est continue et vérifie $f(0) = 0$, donc $f \in F$.
On a alors d'après $(\star)$

$$\int_0^1 fg = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 tg(t)\, g(t) = 0$$

La fonction $t \mapsto tg^2(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle.
D'après le critère de nullité, c'est la fonction nulle :

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad tg^2(t) = 0$$

D'où

$$\forall\, t \in \,]0, 1], \quad g^2(t) = 0$$

Ainsi, la fonction $g_{|]0,1]}$ est la fonction nulle.
Par continuité de g en 0, on en déduit que g est la fonction nulle.

Bilan. On a montré l'inclusion $F^{\perp} \subset \{0\}$.
Comme l'autre inclusion est évidente, on a $F^{\perp} = \{0\}$.
Ainsi, $F \oplus F^{\perp} = F$.
Par ailleurs, on a évidemment $F \subsetneq E$ (il existe des fonctions continues qui ne s'annulent pas en 0), donc $F \oplus F^{\perp} \subsetneq E$.

32

Comme E est de dimension finie, il en est de même de F.
Alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires d'après 30.
On a alors (licite, car E est de dimension finie) l'égalité $\dim F + \dim F^{\perp} \;=\; \dim E$.

On a toujours l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
En appliquant le premier point au sous-espace $F^{\perp}$, on a

$$\dim F^{\perp} \;+\; \dim (F^{\perp})^{\perp} \;=\; \dim E$$

Or $\dim F \;+\; \dim F^{\perp} \;=\; \dim E$.
En combinant ces deux égalités, on obtient $\dim F = \dim (F^{\perp})^{\perp}$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

34

Soit E un espace euclidien.
Soit $\mathscr{F}$ une famille orthonormée de E.
Posons $F = \text{Vect}(\mathscr{F})$ (comme $\mathscr{F}$ est orthonormée, $\mathscr{F}$ est libre, donc c'est une base de F).
Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est de dimension finie et admet, en vertu de..., une base orthonormée$\mathscr{B}_{F^\perp}$.
Alors $\mathscr{F} \vee \mathscr{B}_{F^\perp}$ est une base orthonormée de E, en vertu du deuxième point de la proposition précédente.

36

Soit $y \in F$.

— On suppose que $y = p_F(x)$.
Alors $x - y \in F^\perp$.
Donc ce vecteur est orthogonal à tout vecteur de F, en particulier à tous les vecteurs $e \in \mathscr{F}$.
On vient de traduire le fait que $F^\perp \subset \mathscr{F}^\perp$.

— Supposons que $\forall\, e \in \mathscr{F},\ \langle x - y \mid e\rangle = 0$.
Alors $x - y \in \mathscr{F}^\perp = \text{Vect}(\mathscr{F})^\perp = F^\perp$.
De plus, $y \in F$.
Donc $y = p_F(x)$.

37

Notons $p_F(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \text{Vect}(1, X)$.
C'est l'unique vecteur de F tel que $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$.
Comme ce projeté appartient à F, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $p_F(X^2) = \lambda + \mu X$.
Comme $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$, on a $\begin{cases} \langle X^2 - p_F(X^2) \mid 1\rangle = 0 \\ \langle X^2 - p_F(X^2) \mid X\rangle = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \langle p_F(X^2) \mid 1\rangle = \langle X^2 \mid 1\rangle \\ \langle p_F(X^2) \mid X\rangle = \langle X^2 \mid X\rangle \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 2\lambda + \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{4} \end{cases}$

D'où $\lambda = -\dfrac{1}{6}$ et $\mu = 1$.

Ainsi, $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$.

• Notons $p_F(X^3)$ le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.
Comme ce projeté appartient à F, il existe $a, b, c \in R$ tels que $p_F(X^3) = aX^2 + bX + c$.
Comme $X^3 - p_F(X^3) \in F^\perp$, on a

$$\begin{cases} \langle X^3 - P \mid 1\rangle = 0 \\ \langle X^3 - P \mid X\rangle = 0 \\ \langle X^3 - P \mid X^2\rangle = 0 \end{cases}$$

ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = 3 \\ 15a + 20b + 30c = 12 \\ 12a + 15b + 20c = 10. \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2$ donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = 3 \\ a + b + 2c = 1 \\ 12a + 15b + 20c = 10 \end{cases}$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ 2b + 4c = -1 \\ 3b - 4c = -2 \end{cases}$$

On obtient ainsi $b = -\frac{3}{5}$, $c = \frac{1}{20}$ et $a = \frac{3}{2}$.
D'où

$$p_F(X^3) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}.$$

39

Décomposons $p_F(x)$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}$:

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle p_F(x) \mid e_k \rangle \, e_k.$$

Comme $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et $e_k \in F$, on en déduit :

$$\langle x - p_F(x) \mid e_k \rangle = 0$$

D'où $\langle x \mid e_k \rangle = \langle p_F(x) \mid e_k \rangle$.

40

La famille $\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ est une base orthonormée de $D = \mathrm{Vect}(u)$.
Donc

$$p_F(x) = \left\langle x \,\middle|\, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u$$

42

Construisons la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ par récurrence.
Autrement dit, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note

$\mathscr{H}_p$: il existe $(f_1, \ldots, f_p)$ orthonormée telle que $\forall\, k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}\big(f_1, \ldots, f_k\big)$.

Initialisation. On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
Alors, (f_1) est une famille orthonormée vérifiant $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(f_1)$.
D'où $\mathscr{H}_1$.

Hérédité. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.
Supposons $\mathscr{H}_p$. Montrons $\mathscr{H}_{p+1}$.
D'après $\mathscr{H}_p$, il existe $(f_1, \ldots, f_p)$ orthonormée telle que ...

Idée. Il suffit de construire f_{p+1} tel que

- $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$
- la famille $(f_1, \ldots, f_{p+1})$ est orthonormée.

Car $(f_1, \ldots, f_{p+1})$ sera une famille libre de $p+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$, donc sera une base de cet espace, et on aura l'égalité convoitée.

On va commencer par construire un certain vecteur g_{p+1}

- non nul
- $g_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$

— la famille $(f_1,\dots,f_p,g_{p+1})$ est orthogonale.

• On pose
$$g_{p+1} \;=\; e_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1} \mid f_k\rangle\, f_k$$

Alors

— Le vecteur g_{p+1} est non nul (WHY?).

Si g_{p+1} était nul, on aurait
$$e_{p+1} \in \mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_p\right) \overset{\mathscr{H}_p}{=} \mathrm{Vect}\left(e_1,\dots,e_p\right)$$
ce qui contredit le fait que $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1})$ est libre.

— On a $g_{p+1} \in \mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_p,e_{p+1}\right)$, qui vaut $\mathrm{Vect}\left(e_1,\dots,e_{p+1}\right)$ d'après $\mathscr{H}_p$.

— Le vecteur g_{p+1} est orthogonal à $f_1,\dots,f_p$ car :
$$\forall\, j \in [\![1,p]\!],\quad \langle g_{p+1} \mid f_j\rangle \;=\; \langle e_{p+1} \mid f_j\rangle - \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1} \mid f_k\rangle\langle f_k \mid f_j\rangle = 0.$$

• On pose $f_{p+1} = \frac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$.

Et on vérifie que

— $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1})$

— la famille $(f_1,\dots,f_{p+1})$ est orthonormée.

La famille $(f_1,\dots,f_{p+1})$ est une famille orthonormée (donc libre) de $p+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}\left(e_1,\dots,e_{p+1}\right)$. Elle en est donc une base donc
$$\mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_{p+1}\right) \;=\; \mathrm{Vect}\left(e_1,\dots,e_{p+1}\right)$$

43

On pose $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.
On pose
$$\begin{aligned} g_2 &= (1,0) - \langle (1,0) \mid f_1\rangle f_1 \\ &= (1,0) - \tfrac{1}{2}(1,1) \\ &= \tfrac{1}{2}(1,-1) \end{aligned}$$

Puis on pose $f_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

47

Soit $x \in E$.
Montrons que $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.
Autrement dit que $\inf\limits_{y\in F} \|x-y\| = \|x - p_F(x)\|$.
Autrement dit que $\inf\left\{\|x-y\|,\, y \in F\right\} = \|x - p_F(x)\|$.
En fait, on va montrer que c'est un minimum;
$$\min\left\{\|x-y\|,\, y\in F\right\} = \|x - p_F(x)\|$$

— On a $\|x - p_F(x)\| \in \left\{\|x-y\|, y \in F\right\}$.

— Montrons que $\|x - p_F(x)\|$ est un minorant.
Soit $y \in F$. On a
$$\|x - p_F(x)\|^2 \leqslant \|\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp}\|^2 + \|\underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}\|^2$$
D'après Pythagore :
$$\|x - p_F(x)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2$$

De plus, soit $y \in F$. On a
$$d(x,F) = \|x-y\| \iff \|x - p_F(x)\|^2 = \|x-y\|^2 \iff \|p_F(x) - y\|^2 = 0 \iff y = p_F(x).$$

49

Soit $x \in E$. On a
$$d(x,H) = \|x - p_H(x)\| = \left\|\frac{\langle x \mid u\rangle}{\|u\|^2} u\right\| = |\langle x \mid u\rangle| \frac{\|u\|}{\|u\|^2} = \frac{|\langle x \mid u\rangle|}{\|u\|}$$