Espace euclidien

exercices

101 Produit scalaire ?

Pour $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\varphi(X, X') = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y \quad \text{et} \quad \psi(X, X') = 2xx' - 2yy' + xy' + x'y.$$

1. Vérifier que φ et ψ sont des formes bilinéaires symétriques.
2. Les applications φ et ψ sont-elles des produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$?

102 Produit scalaire chez les polynômes, exo de khôlle (1)

Soit $n \geqslant 2$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & -\displaystyle\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x \end{array}$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E. Expliciter la norme euclidienne associée.

103 Produit scalaire chez les polynômes (2)

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts.
Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose

$$\langle P, Q\rangle \;=\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \left\{P \in E \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$. Constater que $\mathrm{d}(Q, H) = 0$ si et seulement si $Q \in H$.

104 Matrices

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $\langle \mid \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

105 Orthogonal et opérations

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Où a-t-on utilisé l'hypothèse de dimension finie ?
Défi amusant : déduire la deuxième égalité de la première.

106 Retour sur un théorème du cours

Soit E un espace préhilbertien.
Soit F et G deux sev de E vérifiant $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, c'est-à-dire $\begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G \end{cases}$

Montrer que $G = F^\perp$ (déjà fait en classe, mais à refaire) et $(F^\perp)^\perp = F$ (non fait en classe).
Proposer également une preuve de ces deux points lorsque l'espace E est euclidien (c'est-à-dire de dimension finie).

107 Révision sur inf et conséquence

Soit A une partie de $\mathbb{R}^+$, non vide. On désigne par A^2 la partie $\{a^2, a \in A\}$.
Montrer que $\inf(A^2) = \inf(A)^2$.

Soit E un espace préhilbertien (donc muni d'un produit scalaire, donc d'une norme, donc d'une distance).
Soit B une partie non vide quelconque de E et $x \in E$. On a défini dans le cours la distance de x à B comme étant

$$d(x, B) \;=\; \inf_{b \in B} \|x - b\|$$

Montrer que $d(x, B)^2 = \inf\limits_{b \in B} \|x - b\|^2$.

Avec Cauchy-Schwarz

108 Astucieux

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leqslant 1$. En utilisant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et en exhibant deux vecteurs, montrer que $(x + y + z)^2 \leqslant \frac{17}{10}$.

109 Méga classique

Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Étudier le cas d'égalité.
On suppose en outre que $x_k > 0$ pour tout k. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$$

110 Classique

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2}$$

111 Pas complètement évident

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ strictement positive sur $[0,1]$.
Montrer

$$\frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

112 Délicat

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Montrer que

$$\forall t \in [a,b], \quad f^2(t) \leqslant (t-a)\int_a^t f'^2$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2$$

113 La routine

Soit $E = \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs strictement positives.
Déterminer

$$\inf_{f \in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Des calculs

114

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère $F = \mathrm{Vect}\Big((1,0,2),(1,-1,0)\Big)$.
Le vecteur $(2,2,0)$ est-il dans $F^\perp$?
Déterminer $F^\perp$.

115

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + \ \ y + \ \ z + \ \ t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Déterminer une base de $G^\perp$, puis un système d'équations de $G^\perp$.

116

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Déterminer une base de F.
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

117

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

118

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère le vecteur v et le sous-espace vectoriel F

$$v = (2,2,2) \qquad\qquad F = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0\right\}$$

1. Déterminer le projeté orthogonal de v sur F.
2. Déterminer la distance de v à F.

119 **Gram-Schmidt**

Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

120

On souhaite déterminer

$$m \ = \ \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi \Big(x - (a\cos x + b\sin x)\Big)^2 \mathrm{d}x.$$

1. Justifier que m existe.
2. On note $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.
   (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
   (b) Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   (c) On note id : $[0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Quel est le lien entre id, F et m ?
3. Déterminer le projeté orthogonal de id sur F.
4. En déduire la valeur de m.

Plus abstrait

121 Exemple de sev sans supplémentaire orthogonal

On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

On pourra considérer $t \mapsto tf(t)$.

En déduire plusieurs choses

— On a $E \neq F \oplus F^\perp$

— F n'admet pas de supplémentaire orthogonal

— $(F^\perp)^\perp \neq F$

122 Caractérisation de l'orthogonalité

Soit E un espace vectoriel préhilbertien et x, y deux vecteurs de E.
Montrer que

$$x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\quad \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

123 Projecteur orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E tel que :

$$\forall\, x \in E,\quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.

124 À propos d'unicité dans Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E et deux familles orthonormées $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ de E telles que :

$$\begin{cases} \forall\, p \in [\![1,n]\!], & \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1,\dots,f_p) = \mathrm{Vect}\,(g_1,\dots,g_p) \\ \forall\, p \in [\![1,n]\!], & \langle e_p \mid f_p\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle e_p \mid g_p\rangle > 0. \end{cases}$$

Montrer que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales.

125 Matrice de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. On pose $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j\rangle.$$

1. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre si et seulement si G est inversible.
2. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et on note $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   On pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.
   Montrer que P est triangulaire supérieure et que $G = P^\top P$.
3. En déduire que $0 < \det(G) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^n \|e_i\|^2$ (question non faisable pour l'instant).

126 Famille libre telle que...

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.
On suppose que :

$$\forall\, x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i\rangle^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée.

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on pourra considérer un vecteur unitaire appartenant à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)^\perp$, après en avoir justifié l'existence.

127 Vecteurs unitaires tels que...

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs unitaires de E.
On suppose que :

$$\forall\, x \in E,\ \|x\|^2 \ = \ \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.

128 Pas trop de vecteurs tels que...

Soit E un espace euclidien.
Soit $e_1, \dots, e_p \in E$ tels que :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \langle e_i \mid e_j \rangle < 0.$$

En raisonnant par récurrence sur la dimension de E, montrer que $p \leqslant \dim E + 1$.

On pourra raisonner considérer une projection orthogonale sur un hyperplan bien choisi.

129 Similitude

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$.
On dit que f est une similitude de rapport λ lorsque pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si,

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$$

3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité :

$$\forall\, x, y \in E, \quad x \perp y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \perp f(y)$$

   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Réciproquement, on suppose que f est non-nulle et préserve l'orthogonalité.
   Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
   Démontrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Conclure.

Vers la Spé

130 Un peu de dualité

— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker}(A^\top)$.

— Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $\left(\operatorname{Im}(M^\top)\right)^\perp = \operatorname{Ker} M$. Amusant, non ?

— Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a toujours $\operatorname{Im}(A+B) \subset \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$.
Quelle inclusion obtient-on en appliquant l'orthogonal ?

— Saviez-vous que $\operatorname{Ker} M \cap \operatorname{Ker} N \subset \operatorname{Ker}(M+N)$?

131 La norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est sous-multiplicative

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire canonique $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$.

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\langle A \mid B \rangle$ à l'aide des coefficients de A et B.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $||A|| = \sqrt{\langle A \mid A \rangle}$. Exprimer $||A||^2$ à l'aide des coefficients de A.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À l'aide de la question précédente et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, montrer que la norme est sous-multiplicative : $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$.

Espace euclidien

corrigés

1. — L'application φ est linéaire à gauche :

   Soit $X_1, X_2, X' \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
   On a $\varphi(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, X') = \alpha_1 \varphi(X_1, X') + \alpha_2 \varphi(X_2, X')$.

   — L'application φ est symétrique car $\varphi(X, X') = \varphi(X', X)$.

   — Ainsi, φ est bilinéaire.

   Bilan. L'application φ est une forme bilinéaire symétrique.
   • De même, ψ est une forme bilinéaire symétrique.

2. On rappelle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

   — L'application φ est positive.

   Soit $X \in \mathbb{R}^2$. On a $\varphi(X, X) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 2\big(x + \frac{1}{2}y\big)^2 + \frac{3}{2}y^2 \geqslant 0$.

   — L'application φ est définie.

   Soit $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(X, X) = 0$.
   Alors $(x + \frac{1}{2}y)^2 = 0$ et $\frac{3}{2}y^2 = 0$.
   Donc $y = 0$, puis $x = 0$.
   D'où $X = 0$.

   Bilan. L'application φ est un produit scalaire.
   • En revanche, ψ n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas positive.
   En effet, pour $X = (0, 1)$, on a $\psi(X, X) = -2$.

1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

   — $0 \in E$.

   — Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   On a $\quad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda P + \mu Q)(0) = (\lambda P + \mu Q)(1) = 0$.
   donc $\lambda P + Q \in E$.

   Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, donc a fortiori est un espace vectoriel.
   Remarque. On peut aussi élever le débat en remarquant que $E = \operatorname{Ker}\psi_0 \cap \operatorname{Ker}\psi_1$ où $\psi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(k) \end{array}$ est une forme linéaire.
   Donc $\operatorname{Ker}\psi_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Par intersection, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, a fortiori est un espace vectoriel.

2. — L'application φ est une forme bilinéaire, par linéarité de l'intégrale et linéarité de la dérivation.

   — Soit $P, Q \in E$.
   Une intégration par parties fournit :

$$\varphi(P,Q) \ = \ -\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x = -\underbrace{\Big[P(x)Q'(x)\Big]_0^1}_{=0} + \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x \ = \ \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x$$

   L'expression étant symétrique, on a $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$.
   Donc φ est symétrique.

   — Soit $P \in E$. On a $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
   Donc φ est positive.

   — Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x = 0$.
   La fonction $x \mapsto P'(x)^2$ est continue, positive sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle ; c'est donc la fonction nulle.
   Ainsi, la fonction $x \mapsto P(x)$ est constante sur l'intervalle $[0,1]$.
   Or $P(0) = 0$, donc $x \mapsto P(x)$ est la fonction nulle sur $[0,1]$.
   Ainsi, le polynôme P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.
   Ainsi, φ est définie.

   En conclusion, φ est un produit scalaire.
   De plus, la norme euclidienne associée à ce produit scalaire est :

$$\|P\| \ = \ \left(\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

1. Seul l'aspect « défini positif » est non évident.
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\langle P \mid P\rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geqslant 0$.
   Supposons $\langle P \mid P\rangle = 0$. Alors $\forall\, k \in [\![0,n]\!],\ P(a_k) = 0$.
   Ainsi, P admet $n+1$ racines distinctes et $\deg P \leqslant n$.
   Donc $P = 0$.
2. Considérons la famille $(L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ des polynômes de Lagrange associés à ces réels $a_0, \ldots, a_n$.
   - La famille $(L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthonormée (à vérifier).
     Donc elle est libre.
   - Cette famille possède $n+1$ vecteurs, c'est-à-dire autant que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Bilan. La famille $(L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une *base* orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On applique la formule du cours en remarquant que $H = \mathrm{Vect}(X^0)^\perp$.
   On a l'inclusion $H \subset \mathrm{Vect}(X^0)^\perp$ (WHY ?) et l'égalité des dimensions (WHY ?).
   On a donc d'après le cours,
   $$\mathrm{d}(Q,H) \;=\; \frac{|\langle Q, X^0\rangle|}{\|X^0\|}$$
   On calcule les deux termes qui interviennent
   $$\|X^0\|^2 = \sum_{k=0}^n a_k^0 a_k^0 = n+1 \qquad \text{d'où } \|X^0\| = \sqrt{n+1}$$
   et
   $$\langle Q, X^0\rangle \;=\; \sum_{k=0}^n Q(a_k) a_k^0$$
   D'où
   $$\mathrm{d}(Q,H) \;=\; \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=0}^n Q(a_k)\right|}{\sqrt{n+1}}$$
   Remarque. On constate que $\mathrm{d}(Q,H) = 0$ si et seulement si $Q \in H$.

1. Fait en classe.
   Remontrons la symétrie :

$$\begin{array}{rcll} \langle A \mid B\rangle & = & \operatorname{tr}(A^\top B) & \\ & = & \operatorname{tr}\left((A^\top B)^\top\right) & \text{car } \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(M^\top) \\ & = & \operatorname{tr}(B^\top A) & \text{propriétés de la transposée} \\ & = & \langle B \mid A\rangle & \end{array}$$

2. Montrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
   Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   On a
   $$\langle A \mid S\rangle \;=\; \operatorname{tr}(A^\top S) \;\overset{\star}{=}\; \operatorname{tr}(-AS^\top) \;\overset{\bigstar}{=}\; -\operatorname{tr}(S^\top A) \;=\; -\langle S \mid A\rangle$$
   où l'égalité $\star$ est justifiée par le fait que $A^\top = -A$ et $S^\top = S$;
   et l'égalité $\bigstar$ provient du fait que la trace est invariante par permutation circulaire.
   On a donc montré que $\langle A \mid S\rangle = -\langle S \mid A\rangle$.
   Donc $\langle A \mid S\rangle = 0$.
   Bilan général. Les sous-espaces $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
3. La question précédente montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp$.
   Comme on est en dimension finie, on a
   $$\dim \left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp \;=\; \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$$
   Par ailleurs, on a
   $$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$$
   Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp$ ont même dimension.
   Par inclusion et égalité des dimensions, ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

   Autre preuve (qui nécessite d'être très très précis dans le vocabulaire et de citer précisément le résultat utilisé).
   On sait depuis longtemps que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   Or ces deux sous-espaces sont orthogonaux. Ainsi, la somme est directe-orthogonale :
   $$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
   Or on a démontré en classe un résultat très général concernant l'unicité d'un tel supplémentaire et sa valeur. Redonnons cet énoncé (cf. aussi l'exo 106)

   Soit E préhilbertien, avec F de dimension finie, et G quelconque.
   $$E \;=\; F \overset{\perp}{\oplus} G \;\Longrightarrow\; G = F^\perp$$

   Dans notre contexte, on en déduit que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

— Montrons $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a $\begin{cases} (F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \\ (F+G)^{\perp} \subset G^{\perp} \end{cases}$, donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Montrons que x est orthogonal à tout vecteur de $F+G$.
Soit $z \in F+G$ que l'on écrit $z = z_F + z_G$ avec $(z_F, z_G) \in F \times G$.
Par linéarité à droite du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} \langle x \mid z \rangle &= \underbrace{\langle x \mid z_F \rangle}_{=0} + \langle x \mid z_G \rangle && \text{car } x \in F^{\perp} \text{ et } z_F \in F \\ &= 0 && \text{Idem pour l'autre terme} \end{aligned}$$

Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.

— Montrons $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
Le premier point montre que pour tout couple de sous-espaces vectoriels $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$, on a $(\widetilde{F} + \widetilde{G})^{\perp} = \widetilde{F}^{\perp} \cap \widetilde{G}^{\perp}$, d'où en appliquant l'orthogonal, $\widetilde{F} + \widetilde{G} = \left(\widetilde{F}^{\perp} \cap \widetilde{G}^{\perp}\right)^{\perp}$.
On applique cela à $\widetilde{F} = F^{\perp}$ et $\widetilde{G} = G^{\perp}$.
Comme E est de dimension finie, on a $\widetilde{F}^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp} = F$ et de même, $\widetilde{G}^{\perp} = G$.
On obtient $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

- Montrons que $G = F^\perp$ par double inclusion.
  - On a $G \subset F^\perp$, car F et G sont orthogonaux.
  - Montrons l'autre inclusion.
    Soit $x \in F^\perp$.
    A fortiori $x \in E$ donc il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$.

    Idée. On veut montrer que $x \in G$, autrement dit, on veut montrer que $a = 0$, ce qui revient à montrer que $\langle a \mid a \rangle = 0$ (par caractère défini du produit scalaire).

    On a $x = a + b$.
    En « effectuant le produit scalaire par a » (autrement dit, en appliquant $\langle \bullet \mid a \rangle$), on a

    $$\langle x \mid a \rangle \;=\; \langle a \mid a \rangle + \langle b \mid a \rangle$$

    Comme $x \in F^\perp$, on a $\langle x \mid a \rangle = 0$.
    Comme F et G sont orthogonaux, on a $\langle b \mid a \rangle = 0$.
    D'où $\langle a \mid a \rangle = 0$, d'où $a = 0$.
    Ainsi, $x \in G$.

Bilan. On a donc montré $F^\perp = G$.

- Montrons que $(F^\perp)^\perp = F$.

Comme F et G jouent des rôles symétriques, on obtient $G^\perp = F$.
Or $G = F^\perp$, donc cela se réécrit $(F^\perp)^\perp = F$.

- **Lorsque E est un espace euclidien.** On peut alors utiliser l'opérateur « dimension ».
  - Montrons que $G = F^\perp$.
    - ⋆ On a $G \subset F^\perp$ (car F et G sont orthogonaux).
    - ⋆ Comme E est de dimension finie, on a $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.
      Comme $E = F \oplus G$ avec E de dimension finie, on a $\dim G = \dim E - \dim F$.
      D'où $\dim F^\perp = \dim G$.

    On conclut par inclusion et égalité des dimensions.
  - Montrons que $(F^\perp)^\perp = F$.
    - ⋆ On a $F \subset (F^\perp)^\perp$.
    - ⋆ On a $\dim(F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp$, qui vaut $\dim F$.

    On conclut par inclusion et égalité des dimensions.

108

Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
D'une part, l'hypothèse $2x^2+y^2+5z^2 \leqslant 1$ se reformule $\|w\|^2 \leqslant 1$ où $w = (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$.
D'autre part, on réalise la somme $x+y+z$ comme un produit scalaire en posant $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}})$:

$$x+y+z \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}x \ + \ 1 \times y \ + \ \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}z \ = \ \langle v \mid w \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle v \mid w \rangle^2 \ \leqslant \ \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Comme $\|v\|^2 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \right) = \dfrac{17}{10}$ et $\|w\|^2 \leqslant 1$, on a :

$$(x+y+z)^2 \ \leqslant \ \frac{17}{10}.$$

1. Fixons $t \in [a, b]$ une fois pour toutes.
Considérons le produit scalaire (je vous laisse vérifier que c'est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive) $\langle g \mid h \rangle = \int_a^t gh$ sur l'espace $\mathcal{C}^0([a,t], \mathbb{R})$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annule en a, on a par le théorème fondamental de l'Analyse :
$$f(t) = \int_a^t f' = \int_a^t 1 \times f'$$
Ainsi, t étant toujours fixé, le réel $f(t)$ se présente comme le produit scalaire $\langle 1 \mid f' \rangle$ (pour être rigoureux, il faudrait parler de la restriction $f'_{|[a,t]}$).
On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\langle 1 \mid f' \rangle^2 \leqslant \|1\|^2 \|f'\|^2$$
D'où
$$\begin{aligned} f^2(t) &\leqslant \left(\int_a^t 1\right)\left(\int_a^t f'^2\right) \\ &\leqslant (t-a)\int_a^t f'^2 \end{aligned}$$

2. Reprenons ce qui précède à t fixé :
$$\begin{aligned} f^2(t) &\leqslant (t-a)\int_a^t f'^2 \\ &\leqslant (t-a)\int_a^b f'^2 \quad \text{car } f'^2 \geqslant 0 \text{ et } t \leqslant b \end{aligned}$$
Réumons. On a
$$\forall\, t \in [a,b], \quad f^2(t) \leqslant (t-a)\int_a^b f'^2$$
Par croissance de l'intégrale :
$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t &\leqslant \left(\int_a^b (t-a)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'^2\right) \\ &\leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2 \end{aligned}$$

113

Utilisons le produit scalaire sur E défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$.
Soit $f \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire

$$\left|\langle \sqrt{f} \mid \frac{1}{\sqrt{f}}\rangle\right|^2 \leqslant \|\sqrt{f}\|^2 \times \|\frac{1}{\sqrt{f}}\|^2$$

d'où

$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$$

Autrement dit, $(b-a)^2$ est un minorant de l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \mid f \in E\right\}$, qui est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
D'où

$$(b-a)^2 \leqslant \inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

De plus, pour $f_0 = 1$ qui est élément de E, on a l'égalité $(b-a)^2 = \displaystyle\int_a^b f_0 \times \int_a^b \frac{1}{f_0}$.
Ainsi, la borne inférieure est atteinte (c'est donc un minimum), par exemple par la fonction identiquement égale à 1 (et plus généralement, par les fonctions constantes).
On a donc montré

$$\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) = \min_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) = (b-a)^2$$

115

Par construction, on a

$$\mathrm{Vect}((1,1,1,1),(1,2,3,4)) \ \subset \ G^{\perp}$$

De plus, $\dim G = 2$ (WHY), donc $\dim G^{\perp} = 4 - 2 = 2$.
Et $\dim \mathrm{Vect}((1,1,1,1),(1,2,3,4)) = 2$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on a l'égalité

$$\mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1,1,1)}_{u},\underbrace{(1,2,3,4)}_{v}) \ \subset \ G^{\perp}$$

Cherchons un système d'équations pour $G^{\perp}$.
On a $w = (a,b,c,d) \in G^{\perp}$ ssi il existe λ, μ tel que $w = \lambda u + \mu v$, autrement dit ssi le système suivant est compatible

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

En échelonnant, on trouve les conditions $a - 2b + c = 0$ et $2a - 3b + d = 0$.
Cela vaut le coup de vérifier que u et v satisfont ces deux équations.

116

Une base de F est $\Big((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\Big)$.
Une base orthonormée de F est (f_1,f_2) où $f_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $f_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$.
Notons p_F la projection orthogonale sur F.
Comme la famille (f_1,f_2) est une base orthonormée de F, on a l'expression de p_F :

$$\forall\, v\in\mathbb{R}^4,\quad p_F(v)=\langle v\mid f_1\rangle f_1+\langle v\mid f_2\rangle f_2$$

La matrice de p dans la base canonique est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(p_F)\ =\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

Détaillons la première colonne.
En notant $\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, on a

$$\begin{aligned}p_F(\varepsilon_1)&=\underbrace{\langle\varepsilon_1\mid f_1\rangle}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}f_1+\underbrace{\langle\varepsilon_1\mid f_2\rangle}_{=0}f_1\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}f_1\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)\\&=\frac{1}{2}(1,0,-1,0)\end{aligned}$$

117

Commençons par lire des rappels de cours.

Rappel.

• Soit E équipé d'une décomposition $F \oplus G$ (ici aucune hypothèse de dimension).
La projection $p_{F/\!/G}$ de F parallèlement à G est dite orthogonale lorsque $F \perp G$.

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
Alors on a $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ avec le bonus que $x = f(x) + \big(x - f(x)\big)$.
Ainsi, la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ est l'application $x \mapsto f(x)$, qui est ni plus ni moins que f. Autrement dit, $p_{\operatorname{Im} f /\!/ \operatorname{Ker} f} = f$.

• Un projecteur f est dit orthogonal lorsque $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.

• Lorsque F est de dimension finie et $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, alors la projection $p_{F/\!/G}$ est orthogonale et coïncide avec la projection orthogonale sur F.
En effet, si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ avec F de dimension finie, alors on peut montrer (cf. 106) que $G = F^{\perp}$.

Retour à l'exercice. Nous allons montrer que

$$\begin{cases} f \text{ est un projecteur : } f^2 = f \\ \operatorname{Im} f \text{ et } \operatorname{Ker} f \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$$

Pour le premier point, il suffit de vérifier que $A^2 = A$.
Ce qui est facile en remarquant que

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De plus, cette matrice est de rang 1 (la colonne C_1 est une base de l'image).
On a

$$\operatorname{Im} f \;=\; \operatorname{Vect} \underbrace{\big((1,0,-1)\big)}_{\mathcal{F}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} f \;=\; \operatorname{Vect} \underbrace{\big((0,1,0),(1,0,1)\big)}_{\mathcal{G}}$$

Il est facile de voir que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont orthogonaux aux vecteurs de $\mathcal{G}$, de sorte que $\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$.
Ainsi, f est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(\big((1,0,-1)\big)$.

119

Il y a pas mal de calculs. Mais c'est la vie.
Il faut démarrer l'exercice en ayant en tête les notations que nous allons prendre.
Je vous propose ici de garder celle du cours, mais de décaler la numérotation, car la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est naturellement indexée par $[\![0,2]\!]$ (et non pas par $[\![1,3]\!]$).

Pour tout k, notons $e_k = X^k$.

Étape numéro 0.
On pose $f_0 = \dfrac{1}{\|e_0\|}e_0$.
Après calcul (lesquel), on a $f_0 = X^0$.

Étape numéro 1. On pose $g_1 = e_1 - p_{F_0}(e_1)$ où $F_0 = \mathrm{Vect}(f_0)$.
Comme (f_0) est une BON de F_0, on a $p_{F_0}(e_1) = \langle e_1 \mid f_0\rangle f_0$.
On a $\langle e_1 \mid f_0\rangle = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $g_1 = X - \dfrac{1}{2}$.

Posons $f_1 = \dfrac{1}{\|g_1\|}g_1$.
On a $\|g_1\|^2 = \dfrac{1}{12}$, d'où (après simplification), $f_1 = 2\sqrt{3}\Big(X - \dfrac{1}{2}\Big)$.

Étape numéro 2. On pose $g_2 = e_2 - p_{F_1}(e_2)$ où $F_1 = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$.
Comme (f_0, f_1) est une BON de F_1, on a $p_{F_1}(e_2) = \langle e_2 \mid f_0\rangle f_0 + \langle e_2 \mid f_1\rangle f_1$.
On a $\langle e_2 \mid f_0\rangle = \displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$.
On a $\langle e_2 \mid f_1\rangle = 2\sqrt{3}\displaystyle\int_0^1 t^2(t - \frac{1}{2})\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\Big[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1 = 2\sqrt{3}\frac{1}{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
D'où

$$g_2 \;=\; X^2 \;-\; \left[\frac{1}{3}X^0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}2\sqrt{3}\Big(X - \frac{1}{2}\Big)\right]$$

Bref $g_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.
Reste à calculer la norme de g_2. C'est LE calcul pénible (jusqu'à présent, c'était facile).
On trouve $\|g_2\|^2 = \dfrac{1}{180}$.
Puis on finit par trouver $f_2 = 5\sqrt{6}\Big(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\Big)$.

Question subsidiaire.
Est-ce que les polynômes 1, $X - \dfrac{1}{2}$ et $X^2 - X + \dfrac{1}{6}$ vous disent quelque chose ?
Pour les élèves de la promo 2026 (année 2024-2025), oui ! C'était la pâle 6.

Ce sont les polynômes de Bernoulli !

1. La borne inférieure existe car la partie ... est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée (par 0).
   (a) IL est évident que F est de dimension 2.
   (b) Calculons :
$$\langle \cos \mid \sin \rangle \;=\; \int_0^\pi \cos t\, \sin t \;\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^\pi \;=\; 0$$
   et
$$\|\cos\|^2 \;=\; \langle \cos \mid \cos \rangle \;=\; \int_0^\pi \cos^2 t \;\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\pi \frac{1+\cos(2t)}{2}\;\mathrm{d}t \;=\; \dots \;=\; \frac{\pi}{2}$$
   et
$$\|\sin\|^2 \;=\; \langle \sin \mid \sin \rangle \;=\; \int_0^\pi \sin^2 t \;\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2}\;\mathrm{d}t \;=\; \dots \;=\; \frac{\pi}{2}$$
   Ainsi, une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|\cos\|}\cos,\; \frac{1}{\|\sin\|}\sin\right)$.
   (c) On a $m = \mathrm{d}(\mathrm{id}, F)^2 = \|\mathrm{id} - p_F(\mathrm{id})\|^2$, ce qui vaut, d'après Pythagore, $\|\mathrm{id}\|^2 - \|p_F(\mathrm{id})\|^2$.
2. Notons $\widetilde{\cos} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos$. Idem pour sinus.
   Utilisons l'expression du projeté à l'aide d'une base orthonormée :
$$\begin{aligned} p_F(\mathrm{id}) \;&=\; \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\cos}\rangle\widetilde{\cos} \;+\; \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\sin}\rangle\widetilde{\sin} \\ &=\; \langle \mathrm{id} \mid \cos\rangle \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos \;+\; \langle \mathrm{id} \mid \sin\rangle \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin \end{aligned}$$
   Calculons
$$\langle \mathrm{id} \mid \cos \rangle \;=\; \int_0^\pi t\cos t \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \langle \mathrm{id} \mid \sin \rangle \;=\; \int_0^\pi t\sin t \,\mathrm{d}t$$
   Pour cela, calculons qu'une seule intégrale, à savoir $\int_0^\pi t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$. Effectuons une IPP. Après calculs, on trouve $-2+\mathrm{i}\pi$.
   Donc
$$\langle \mathrm{id} \mid \cos \rangle \;=\; -2 \qquad \text{et} \qquad \langle \mathrm{id} \mid \sin \rangle \;=\; \pi$$
   On a donc
$$\begin{aligned} p_F(\mathrm{id}) \;&=\; \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\cos}\rangle\widetilde{\cos} \;+\; \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\sin}\rangle\widetilde{\sin} \\ &=\; -2\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos \;+\; \pi\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin \\ &=\; -\frac{4}{\pi}\cos \;+\; 2\sin \end{aligned}$$
3. Reprenons, on a $m = \|\mathrm{id}\|^2 \;-\; \|p_F(\mathrm{id})\|^2$ avec
$$\|\mathrm{id}\|^2 \;=\; \int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{3}\pi^3$$
   et
$$\|p_F(\mathrm{id})\|^2 \;=\; \|\lambda\cos + \mu\sin\|^2 \qquad \text{avec } \lambda = -\frac{4}{\pi} \text{ et } \mu = 2$$
   Ainsi,
$$\|p_F(\mathrm{id})\|^2 \;=\; \lambda^2\|\cos\|^2 \;+\; 2\lambda\mu\langle \cos \mid \sin \rangle \;+\; \mu^2\|\sin\|^2 \;=\; \frac{16}{\pi^2}\frac{\pi}{2} \;+\; 4\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{8}{\pi} \;+\; 2\pi$$
   D'où
$$m \;=\; \frac{1}{3}\pi^3 \;-\; \frac{8}{\pi} \;-\; 2\pi$$

— Montrons que $F^\perp = \{0\}$.
Soit $g \in F^\perp$. On a alors

$$(\star) \qquad \forall\, f \in F, \quad \langle f \mid g \rangle = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 fg = 0$$

Idée. On veut montrer que $g = 0$.
Ce serait bien si l'on pouvait prendre pour fonction f la fonction g, car on aurait alors $\langle g \mid g \rangle = 0$, puis $g = 0$ (par le caractère défini du produit scalaire).
Mais aucune raison pour que g soit dans F.
On a donc l'idée de prendre $f : t \mapsto tg(t)$ qui est bien dans F.

Posons $f : t \mapsto tg(t)$. Cette fonction f est continue et vérifie $f(0) = 0$, donc $f \in F$.
On a alors d'après $(\star)$

$$\int_0^1 fg = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 tg(t)\, g(t) = 0$$

La fonction $t \mapsto tg^2(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle.
D'après le critère de nullité, c'est la fonction nulle :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad tg^2(t) = 0$$

D'où

$$\forall\, t \in \,]0,1], \quad g^2(t) = 0$$

Ainsi, la fonction $g_{|]0,1]}$ est la fonction nulle.
Par continuité de g en 0, on en déduit que g est la fonction nulle.

Bilan. On a montré l'inclusion $F^\perp \subset \{0\}$.
Comme l'autre inclusion est évidente, on a $F^\perp = \{0\}$.

— Comme $F^\perp = \{0\}$, on a $F \oplus F^\perp = F$.
Par ailleurs, on a évidemment $F \subsetneq E$ (il existe des fonctions continues qui ne s'annulent pas en 0), donc $F \oplus F^\perp \subsetneq E$.

— D'après le cours, s'il existe G sev de E tel que $\begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G \end{cases}$, alors nécessairement $G = F^\perp$.
Comme $F^\perp$ ne convient pas, il n'existe pas de tel G.

— Comme $F^\perp = \{0\}$, on a $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp$, qui vaut donc E et est différent de F.

La condition $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$ se reformule

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\lambda\langle x \mid y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ \|y\|^2\lambda^2 \ +\ 2\langle x \mid y\rangle\lambda$$

que l'on peut voir comme une fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\langle x \mid y\rangle = 0$.
Alors la dernière assertion des équivalences ci-dessus est vraie, puisqu'on a bien

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ \|y\|^2\lambda^2$$

D'où la condition nécessaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$.
Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ \|y\|^2\lambda^2 \ +\ 2\langle x \mid y\rangle\lambda$$

On a donc une hypothèse du type

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ a\lambda^2 + b\lambda$$

et on cherche à montrer que $b = 0$.
Plusieurs façons de conclure.
On peut distinguer le cas $a = 0$ et $a \neq 0$ (dans ce dernier cas, on a une fonction polynomiale de degré exactement 2 qui est positive, donc son discriminant est négatif ou nul, donc $b^2 - 4 \times a \times 0 \leqslant 0$, donc $b = 0$).
On peut aussi raisonner par l'absurde, supposer $b \neq 0$.
Au voisinage de 0, on a alors (car $b \neq 0$) l'équivalent $a\lambda^2 + b\lambda \sim b\lambda$.
Or $a\lambda^2 + b\lambda$ ne change pas de signe, alors que $b\lambda$ change de signe. D'où la contradiction.

123

Soit $(x, y) \in \operatorname{Im}(p) \times \operatorname{Ker}(p)$.
Montrons $\langle x \mid y \rangle = 0$.
D'après l'hypothèse faite sur p, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|p(\lambda x + y)\|^2 \leqslant \|\lambda x + y\|^2$$

Or, comme $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$, on a $p(\lambda x + y) = \lambda x$.
D'où

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \|x\|^2 \leqslant \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2,$$

On en déduit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle \geqslant 0.$$

Autrement dit, la fonction affine $\lambda \mapsto \|y\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
Donc elle est de pente nulle, donc $\langle x \mid y \rangle = 0$.

Bilan. Les espaces vectoriels $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$ sont orthogonaux.

124

Remarquons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est de dimension finie égale à k.

On va montrer que $\forall\, p \in [\![1, n]\!], f_p = g_p$.
Fixons $p \in [\![1, n]\!]$.
Considérons l'espace euclidien $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ dans lequel vivent les f_j et g_j car, par hypothèse, $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_p)$.
Comme la famille $\mathcal{F}$ est orthonormée, f_p est orthogonale à tout vecteur f_j, donc est orthogonal à l'hyperplan de F suivant :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{p-1})$$

Idem pour g_p.
Ainsi, f_p et g_p se retrouvent orthogonaux à l'hyperplan commun $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1})$.
Les vecteurs f_p et g_p appartiennent donc à une même droite vectorielle (l'orthogonal d'un hyperplan est une droite vectorielle en dimension finie).
Donc ils sont colinéaires.
Comme ils sont unitaires, on a $f_p = \pm g_p$.
Les conditions $\langle e_p \mid f_p \rangle > 0$ et $\langle e_p \mid g_p \rangle > 0$ empêchent le cas $f_p = -g_p$ et imposent donc $f_p = g_p$.

BILAN : Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales.

1. Commençons par un rappel.

   Rappel. *Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ carrée, on a l'équivalence*

$$A \text{ inversible} \iff \text{la famille } \big(\mathrm{Col}_1(A), \dots, \mathrm{Col}_n(A)\big) \text{ est libre}$$

   Sens direct Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est ibre.

   Vérifions que G est inversible en montrant que la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille libre.

   Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$.

   En examinant le $i^{\text{ème}}$ coefficient des colonnes qui vaut $G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j \rangle$, on a

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i \mid e_j \rangle = 0$$

   puis par bilinéarité du produit scalaire, $\langle e_i \mid \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \rangle = 0$.

   On en déduit que :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \ \in\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \cap \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$$

   Or cette intersection est réduite au vecteur nul, d'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$.

   Par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   Sens réciproque Supposons que G est inversible.

   Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$.

   En remontant les calculs précédents, on obtient $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$,

   ce qui constitue une combinaison linéaire nulle de la famille des colonnes de la matrice inversible G.

   On en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

2. — D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, on a

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \qquad \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_j)$$

   Ainsi,

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \qquad e_j \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_j)$$

   Donc

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \qquad e_j = \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_j f_j + 0 f_{j+1} + \cdots + 0 f_n$$

   Ainsi, la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est la colonne

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   ce qui justifie que P est une matrice triangulaire supérieure.

   — Montrons que $G = P^{\top} P$ en travaillant sur les coefficients.

   Montrons donc que

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(G) \ = \ \mathrm{coeff}_{i,j}(P^{\top} P)$$

c'est-à-dire

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(G) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathrm{coeff}_{k,i}(P)\,\mathrm{coeff}_{k,j}(P)$$

Que vaut le coefficient (k,j) de P ? Réponse : la coordonnée de e_k sur f_j.
Comme la famille $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_n)$ est orthonormée, cette cooordonnée vaut $\langle e_k \mid f_j\rangle$.
Ainsi,

$$\mathrm{coeff}_{k,j}(P) \;=\; \langle e_k \mid f_j\rangle$$

Il suffit donc de montrer que

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle e_i \mid e_j\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} \langle e_i \mid f_k\rangle\langle e_j \mid f_k\rangle.$$

Ce qui est assuré par le rappel suivant (savoir prouver ce petit rappel de cours).
Rappel. Pour deux vecteurs x et y, comme la base orthonormée $(f_1,\dots,f_n)$, on a

$$\langle x \mid y\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid f_k\rangle\langle y \mid f_k\rangle$$

3. Montrons l'inégalité de gauche.
   D'après la question précédente, on a

   $$\det(G) = \det(P^\top P) = \det(P^\top)\det(P) = \det(P)^2 \geqslant 0$$

   La matrice G est inversible donc de déterminant non nul.
   On a donc $\det(G) > 0$.
   Montrons l'inégalité de droite.
   Comme P est une matrice triangulaire, on a $\det(P)^2 = \prod_{j=1}^n (p_{j,j})^2 = \prod_{j=1}^n \langle e_j \mid f_j\rangle^2$.
   D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le caractère unitaire des vecteurs f_j, on a :

   $$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad \langle e_j \mid f_j\rangle^2 \leqslant \|e_j\|^2.$$

   Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs, on en déduit :

   $$\det(G) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2.$$

1. Posons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
   Montrons que $E = F$.
   Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on a $E = F \oplus F^\perp$.
   Montrons que $F^\perp = \{0_E\}$.
   Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)^\perp$.
   D'après l'hypothèse, on a $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2 = 0$ car x est orthogonal aux vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.
   Ainsi, $\|x\|^2 = 0_\mathbb{R}$. Donc $x = 0_E$.

   On en déduit que $E = F$, donc la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de E.
   Comme par hypothèse elle est libre, c'est une base de E.
2. D'après la question précédente, la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, qui est donc en particulier de dimension p.

   Soit $i \in [\![1, p]\!]$.
   Objectif.

   — Montrer que $\|e_i\|^2 \geqslant 1$. Cela fait penser à Cauchy-Schwarz...
   ... avec un vecteur u vérifiant $\|u\|^2 = \langle u \mid e_i \rangle^2$.

   — Puis montrer que $\|e_i\|^2 \leqslant 1$, et enfin $\quad \forall\, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\},\ \langle e_i \mid e_j \rangle = 0$.

   Allons-y.

   — Notons $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p)$
   On a $\dim F_i = p - 1$ (car $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p)$ est une sous-famille d'une famille libre).
   Ainsi,
   $$\dim F_i^\perp \;=\; p - (p-1) \;=\; 1$$
   Considérons une base de cet espace $F_i^\perp$, disons (u).
   Ainsi $\forall\, j \neq i,\ \langle u \mid e_j \rangle = 0$.
   L'hypothèse appliquée à ce vecteur u fournit
   $$\|u\|^2 \;=\; \langle u \mid e_i \rangle^2 \qquad \text{qui n'est pas nul, car } u \text{ n'est pas le vecteur nul}$$

   — L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit
   $$\langle u \mid e_i \rangle^2 \;\leqslant\; \|u\|^2 \|e_i\|^2$$
   D'où (WHY ?) :
   $$1 \;\leqslant\; \|e_i\|^2$$

   — L'hypothèse appliquée au vecteur e_i fournit :
   $$(\star) \qquad \|e_i\|^2 \;=\; \|e_i\|^4 + \underbrace{\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \langle e_i \mid e_j \rangle^2}_{\geqslant 0}$$
   D'où
   $$\|e_i\|^2 \geqslant \|e_i\|^4 \qquad \text{d'où} \qquad \|e_i\| \leqslant 1$$

   — Par double inégalité, on en déduit $\|e_i\| = 1$.

   — En reprenant $(\star)$, on a :
   $$0 \;=\; \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \langle e_i \mid e_j \rangle^2$$
   D'où
   $$\forall\, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}, \quad \langle e_i \mid e_j \rangle = 0$$

   Bilan : la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: « pour tout espace euclidien de dimension n, on a . . . .

— Soit un espace euclidien de dimension 0.
  Donnons-nous p vecteurs tels que . . .
  Montrons que $p \leqslant 1$.
  Supposons donc avoir au moins 2 tels vecteurs et aboutissons à une absurdité.
  Soit (e_1, e_2) tel que $\langle e_1 \mid e_2 \rangle < 0$.
  Comme on est en dimension 0, on a $e_1 = e_2 = 0$ donc $\langle e_1 \mid e_2 \rangle = 0$. D'où la contradiction.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour tout espace euclidien de dimension n.
  Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E vérifiant la condition requise sur les produits scalaires.

  — Si $p = 1$, il n'y a rien à faire car $1 \leqslant n+1$. On supposera donc $p \geqslant 2$ dans la suite.

  — Tout d'abord, $\langle e_1 \mid e_p \rangle < 0$ donc $e_p \neq 0$.
    Posons $H = \{e_p\}^\perp$. C'est un hyperplan, donc de dimension $n = \dim E - 1$.
    Notons p_H la projection orthogonale sur H.
    Montrons que la famille $(p_H(e_1), \dots, p_H(e_{p-1}))$ de vecteurs de H satisfait la condition requise sur les produits scalaires.
    On pourra en déduire que $p - 1 \leqslant \dim H + 1$, d'où $p \leqslant n+2$, ce qui achèvera la preuve de l'hérédité.

  — On a
  $$\forall x \in E, \quad p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid e_p \rangle}{\|e_p\|^2} e_p.$$
    Soit $(i,j) \in [\![1, p-1]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On a :
  $$\langle p_H(e_i) \mid p_H(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle - \frac{\langle e_i \mid e_p \rangle \langle e_j \mid e_p \rangle}{\|e_p\|^2},$$
    par bilinéarité et symétrie du produit scalaire.
    Le premier terme de cette soustraction est strictement négatif.
    Le second est strictement positif (produit de deux négatifs).
    Ainsi $\langle p_H(e_i) \mid p_H(e_j) \rangle < 0$.

Mq $\inf(A^2) = (\inf A)^2$
où A est une partie de $\mathbb{R}^+$

- A est une partie non vide, minorée par 0
Donc A admet une borne inférieure.
Et $\inf A \geq 0$ (car 0 est un minorant de A)
De même, $\inf(A^2)$ existe.

- Mq la borne inférieure de A^2 existe et vaut $(\inf A)^2$
en mq $\begin{cases} (\inf A)^2 \text{ est un minorant de } A^2 & \bullet \\ \exists (b_n) \in (A^2)^{\mathbb{N}},\ b_n \longrightarrow (\inf A)^2 & \bullet\bullet \end{cases}$

• On a $\forall a \in A,\ 0 \leq \inf A \leq a$
Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall a \in A \quad (\inf A)^2 \leq a^2$$

Ainsi $(\inf A)^2$ est un minorant de A^2

•• Par déf de l'inf, on peut trouver $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to \inf A$
Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n^2$
* On a $(b_n) \in (A^2)^{\mathbb{N}}$
* On a $a_n \to \inf A$.
Par élévation au carré, $a_n^2 \longrightarrow (\inf A)^2$