Séries

1 **Proposition (Suite géométrique réelle).** Soit $q \in \mathbb{R}$.

— **Limite.**

$$\text{La suite } (q^n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{n'a pas de limite} & \text{si } q \leqslant -1 \\ \text{tend vers } 0 & \text{si } q \in \left]-1,1\right[\\ \text{est constante égale à } 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{tend vers } +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

En particulier, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ssi $q \in \left]-1,1\right[$.

— **Nature.**
La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\Big(q \in \left]-1,1\right[\text{ ou } q = 1\Big)$.

La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.

2 **Proposition (Suite géométrique complexe).** Soit $a \in \mathbb{C}$.

— **Limite.**

$$\text{La suite } (a^n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{tend vers } 0 & \text{si le module de } a \text{ est } < 1 \\ \text{est constante égale à } 1 & \text{si } a = 1 \\ \text{n'a pas de limite} & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ssi $|a| < 1$.

— **Nature.**
La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\Big(|a| < 1 \text{ ou } a = 1\Big)$

La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.

3 **Proposition (la plus simple du monde !).**
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.
Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, c'est-à-dire $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
Alors le terme général u_n s'exprime en fonction des termes de S :

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

et ceci est même vrai pour tout $n \geqslant 0$ à condition de poser $S_{-1} = 0$

- **Attention.** On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

A priori, à l'œil nu, est-ce la suite des sommes partielles d'une certaine suite ?

I. Généralités

4 **Définition.**
Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

— La *série associée à la suite u* (ou encore la *série de terme général u_n*) est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où S_n est défini par $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$.
La série associée à la suite u est notée $\sum u_n$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des sommes partielles.

— On dit que la *série $\sum u_n$ converge* lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
Dans le cas contraire, on dit que la *série diverge*.

— Lorsque la série $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *somme de la série* et notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$.

- **Attention.** Ne pas confondre les notations :
  — $\sum u_n$ est une abréviation pour désigner la série de TG u_n (qu'elle soit convergente ou non) ;
  — $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ est, en cas de convergence, la somme de la série $\sum u_n$, et est donc un scalaire $\in\mathbb{K}$.

  On ne peut donc écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ qu'**après** avoir prouvé la convergence de la série.

- **Vocabulaire.** Il est fréquent que l'on demande d'étudier la *nature* d'une série.
  Il s'agit de déterminer si la série est convergente ou divergente.

- **Un peu de logique.**
  On vous demandera parfois de montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
  Qu'allez-vous montrer ?

- **Un premier exemple bateau.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Par définition, une série n'est pas autre chose qu'une suite (la suite des sommes partielles).
On peut donc lui appliquer tous les résultats concernant les suites, qu'elles soient réelles ou complexes.
Mais une série est donnée par son terme général et non par ses sommes partielles.
On souhaite développer des « outils spécifiques » à l'étude d'une série, en s'intéressant non pas à la suite de ses sommes partielles mais à son terme général.

5 **Proposition (Condition nécessaire mais non suffisante de convergence d'une série).**

— Le terme général d'une série convergente tend vers 0.
Autrement dit :
$$\sum u_n \text{ CV} \quad\Longrightarrow\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Par contraposée : si la SUITE $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la SÉRIE $\sum u_n$ diverge.
On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

— La réciproque est fausse. Il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0.

Exemples de référence

6 **Proposition.**

— La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

— La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

7 **Proposition (Série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$).**
On a
$$\text{la série } \sum q^n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad |q| < 1$$

Dans ce cas, on a :
$$\forall\, |q| < 1, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- **Exemple.**
La série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. WHY?
La série $\sum \mathrm{e}^{-n}$ converge. WHY?

Caractère asymptotique

- **Remarque.**
Lorsque la suite u est définie seulement àpcr n_0, la série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$.
L'étude de la série de TG u_n est alors l'étude de la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ des sommes partielles définie par $\quad \forall\, n \geqslant n_0,\ S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$. Lorsqu'il y a convergence de cette série, sa somme est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

- **Caractère asymptotique.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ ont des sommes partielles qui diffèrent de la constante $C = \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k$.
Donc elles sont de même nature. C'est ce que l'on appelle le *caractère asymptotique* de la notion de convergence des séries.
Lorsqu'elles convergent, leurs sommes diffèrent de C.

- **À retenir.** Les premiers termes n'ont pas d'influence sur la nature d'une série.
En revanche, en cas de convergence, ils influent sur la valeur de la somme.
Par exemple, on a montré que, pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ est convergente.
Pour $|q| < 1$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} q^n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
Pour $|q| \geqslant 1$, la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ n'a aucun sens.

- **Attention.**
Chez les suites, on a :
$$(u_n) \text{ CV} \implies (u_{n+1}) \text{ CV} \qquad \text{et} \qquad (u_n) \text{ CV} \implies (u_{2n}) \text{ CV}$$
Chez les séries, on a :
$$\sum u_n \text{ CV} \implies \sum u_{n+1} \text{ CV} \qquad \text{mais} \qquad \sum u_n \text{ CV} \ \cancel{\implies}\ \sum u_{2n} \text{ CV}$$

Série télescopique

8 **Proposition (lien suite-série ou encore série télescopique)**

— La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.
En cas de convergence, on a l'égalité suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) \;=\; \lim_{n\to+\infty} v_n \;-\; v_0$$

— La série $\sum(w_n - w_{n+1})$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.
En cas de convergence, on a l'égalité suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(w_n - w_{n+1}) \;=\; w_0 \;-\; \lim_{n\to+\infty} w_n$$

9 **Question.** Donner la nature des séries $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$.

Reste d'une série convergente

10 **Définition.**
Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le scalaire :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est appelé *reste d'ordre* n de la série $\sum u_n$.

- **Remarque.** Le symbole $+\infty$ dans la définition précédente a du sens. WHY ?
La locution « *reste d'ordre n* » n'a de sens que pour les séries *convergentes*.
- **Mini attention.** On notera bien que le reste d'ordre n est la somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, et non $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.
Ceci afin d'avoir l'égalité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \;=\; S_n + R_n$$

11 **Proposition.** La suite des restes d'une série convergente tend vers 0.

Opérations

12 **Proposition (opérations sur les séries convergentes).**
L'ensemble $E = \left\{ w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum w_n \text{ CV} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Mieux, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites qui ....

L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \end{array}$ est une forme linéaire.

- **Vocabulaire.** La série associée à la suite nulle s'appelle la *série nulle*. Cette série est bien sûr convergente !
- **Combinaison linéaire.** Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Soit u et v deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{cases} \text{la série } \sum u_n \text{ converge} \\ \text{la série } \sum v_n \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{la série } \sum (\lambda u_n + \mu v_n) \text{ converge.}$$

Et, dans ce cas, on a l'égalité de scalaires $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Grosso-modo, on peut retenir la phrase suivante pour l'oral (une khôlle) :

« une combinaison linéaire de séries CV est une série CV ».

- **Erreur.** Attention à ne pas écrire

$$\xcancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}}$$

- **Corollaire.** On a

$$\begin{cases} \text{la série } \sum u_n \text{ converge} \\ \text{la série } \sum v_n \text{ diverge} \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{la série } \sum (u_n + v_n) \text{ diverge}$$

- **Corollaire.** Soit $\lambda \neq 0$.

$$\begin{cases} \text{la série } \sum u_n \text{ diverge} \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{la série } \sum \lambda u_n \text{ diverge}$$

13 **Proposition (Cas des séries à termes complexes).** Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.

$$\text{La série } \sum u_n \text{ CV} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{les séries } \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ CV}$$

Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

- **Remarque.** L'égalité précédente (qui a lieu en cas de convergence) peut également se traduire par

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) \qquad \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

14 **Question.** Soit $\theta \in]0, \pi[$. Justifier l'existence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta) \cos^n(\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) \cos^n(\theta).$$

15 preuve

Proposition (série exponentielle).
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

- **Remarque.** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \dots\dots\dots\dots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \dots\dots\dots\dots \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \dots\dots\dots\dots$$

- **Pour le fun.**
Soit $a \in \mathbb{R}$. La proposition dit que le réel $\exp(a)$ peut être vu comme une somme *infinie* de nombres réels :

$$\mathrm{e}^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{4!}a^4 + \dots + \frac{1}{n!}a^n + \dots +$$

En particulier, le réel $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718281$ (irrationnel !) est une somme *infinie* de nombres *rationnels* :

$$\mathrm{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

Amusant : wikipédia me signale que les 6 premières décimales de e vérifient $718 + 281 = 999$.
Il me signale aussi que $\mathrm{e} \approx 2{,}7\,1828\,1828$. Et que $\left(\pi^4 + \pi^5\right)^{\frac{1}{6}} \approx 2{,}7182818086\dots$
Et que $\frac{878}{323} \approx 2{,}718$.
Et que $(\pi^2)^2 + (\pi^{2,5})^2 \approx (\mathrm{e}^3)^2$: c'est Pythagore avec un triangle de côté π^2, $\pi^{2,5}$ et e^3. C'est fou !

16 **Question.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$$

17 **Question.** Soit $z \in \mathbb{K}$.
Montrer que les séries $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

Attention.
Chez les suites, on a :

$$(u_n) \text{ CV} \implies (u_{n+1}) \text{ CV} \qquad \text{et} \qquad (u_n) \text{ CV} \implies (u_{2n}) \text{ CV}$$

Chez les séries, on a :

$$\sum u_n \text{ CV} \implies \sum u_{n+1} \text{ CV} \qquad \text{mais} \qquad \sum u_n \text{ CV} \;\cancel{\implies}\; \sum u_{2n} \text{ CV}$$

Mais il est bien vrai que, si (u_n) est à termes positifs, alors $\sum u_n \text{ CV} \implies \sum u_{2n} \text{ CV}$

II. Séries à termes positifs

Dans cette section, il est question de séries dont le terme général est un *réel positif.*
En pratique, grâce au caractère asymptotique de la notion de limite, **on peut souvent se contenter de la positivité à partir d'un certain rang.**

18 **Proposition.**

— La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante.

— Si la suite des sommes partielles d'une suite à termes positifs est majorée, alors la série CV.

- **Remarque fondamentale.** Pour montrer qu'une série à termes positifs converge, il suffit donc de montrer que la suite de ses sommes partielles est majorée.

  Mais, sauf dans de rares cas, on n'utilisera pas ce critère.

  On utilisera plutôt les théorèmes de comparaison ci-dessous qui permettent de travailler sur le TG de la série et non sur ses sommes partielles.

Théorème de comparaison

19 **Proposition (comparaison avec des inégalités).** Soit u et v deux suites à termes positifs.

— On a :

$$\begin{cases} \text{àpcr } 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

— Par contraposée :

$$\begin{cases} \text{àpcr } 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{cases} \implies \sum v_n \text{ diverge}$$

- **Précision.** On a

$$\begin{cases} \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \sum u_n \ \text{ et } \sum v_n \text{ CV} \end{cases} \implies \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

  Ce résultat pourrait s'intituler « croissance du symbole Sigma, sous couvert de convergence ».

- **à l'oral.** Donner la nature des séries

$$\sum \frac{1}{1+2^n} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{\sqrt{n}}$$

20 **Proposition (comparaison avec ∼).** Soit u et v deux suites à termes positifs.

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ \text{àpcr } u_n \geqslant 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ ont même nature}$$

- **Remarque importante.** Il est inutile de vérifier la positivité du terme général des *deux* séries ; vérifier la positivité de l'un des deux suffit puisque, par équivalence, l'autre est alors positif àpcr.

- **Question (à l'oral !).** En rappelant la nature de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n^2}$.
Donner la nature des séries

$$\sum \frac{-1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n(n+\sqrt{n})} \qquad \sum \frac{1}{n^2\,(3+\sin n)} \qquad \sum \mathrm{e}^{-3n} \qquad \sum \mathrm{e}^{-n^3}$$

- **Attention !** Si $u_n \sim v_n \geqslant 0$ et la série $\sum v_n$ converge, alors on peut dire que $\sum u_n$ converge, mais on ne peut pas dire que les sommes des deux séries sont égales.

$$\cancel{\begin{cases} u_n \sim v_n \geqslant 0 \\ \sum u_n \text{ CV} \end{cases} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n}$$

Voici un contre-exemple.

$$\text{On a } \begin{cases} \dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{n(n+1)} \text{ CV} \end{cases} \qquad \text{mais} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

- **Autre attention.** L'hypothèse de positivité est indispensable.

$$\cancel{u_n \sim v_n \qquad \Longrightarrow \qquad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ ont même nature}}$$

Autrement dit, deux séries dont les TG sont équivalents peuvent ne pas être de même nature.

Considérons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

$$\text{On a } u_n \sim v_n \text{(WHY?)} \qquad \text{mais} \qquad \begin{cases} \sum u_n \text{ CV (cf. plus tard)} \\ \sum v_n \text{ DV (WHY ?).} \end{cases}$$

Comparaison série-intégrale

- **Question.**

Savez-vous calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$?

Savez-vous calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t \ln t} \mathrm{d}t$?

Savez-vous calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$?

Savez-vous calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$?

21 **Proposition (encadrement d'une somme partielle)**
Soit $a < b \in \mathbb{Z}$ deux entiers. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
Si f est **décroissante**, alors :

$$\int_a^b f + f(b) \quad \leqslant \quad \sum_{k=a}^{b} f(k) \quad \leqslant \quad f(a) + \int_a^b f$$

- **Commentaires.** En particulier, pour f définie sur $[n_0, +\infty[$, on a

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \int_{n_0}^n f + f(n) \quad \leqslant \quad \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad \leqslant \quad f(n_0) + \int_{n_0}^n f$$

— L'inégalité de gauche peut permettre de montrer une divergence de série par minoration des sommes partielles.

— L'inégalité de droite peut permettre de montrer une convergence de série par majoration des sommes partielles (pourvu que f soit positive).

— Cette double inégalité peut permettre de trouver, par encadrement

  ⋆ un équivalent du reste d'ordre n (d'une série CV)

  ⋆ un équivalent de la somme partielle d'indice n (d'une série DV)

22 **Proposition (série de Riemann).** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a

$$\text{la série } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

- **Lemme pratique.** On a

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha < 1 \\ \ln n & \text{si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

III. Séries absolument convergentes

Convergence absolue

23 **Définition.**
On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente (ou converge absolument) lorsque la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ converge.

- **En abrégé.** On a :

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \qquad \text{signifie} \qquad \sum |u_n| \text{ converge}$$

- **Une évidence.** Pour une série *à termes positifs*, il n'y a pas de différence entre la convergence et la convergence absolue (WHY ?).
  La notion de convergence absolue est donc intéressante uniquement pour les séries à valeurs réelles dont le terme général change sans cesse de signe, ou à valeurs complexes.

24 **Proposition.** Une série absolument convergente est convergente.

- **En abrégé.**

$$\sum |u_n| \text{ converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum u_n \text{ converge}$$

- **Réciproque fausse.**
  Par exemple, pour $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$, on a $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

- **Attention.**
  Il n'y a pas de notion d'absolue divergence et encore moins de théorème semblable avec le mot « divergente ».

$$\cancel{\sum |u_n| \text{ diverge} \qquad \not\Longrightarrow \qquad \sum u_n \text{ diverge}}$$

- **Exemples.** Donner la nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \sum \frac{\sin n}{n^2} \qquad \sum \frac{\mathrm{e}^{in}}{n^2} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

25 **Proposition (Inégalité triangulaire pour des séries absolument convergentes).**
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. On a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

26 **Proposition.** Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

— Avec un grand O

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \text{la série } \sum v_n \text{ converge } \textbf{absolument} \end{cases} \implies \text{la série } \sum u_n \text{ converge absolument, donc CV}$$

— Avec un petit o

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ \text{la série } \sum v_n \text{ converge } \textbf{absolument} \end{cases} \implies \text{la série } \sum u_n \text{ converge absolument, donc CV}$$

- **Cas particulier.** Soit $\sum u_n$ une série à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\sum v_n$ une série convergente à TG *positif*.
Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc a fortiori est convergente.
- **Cas très usuel.** Soit $\sum u_n$ une série à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si on est dans l'une des situations :
  — il existe $q \in [0,1[$ tel que $u_n = \mathrm{O}(q^n)$
  — il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$
alors, la série $\sum u_n$ converge absolument.

27 **Corollaire (cas de $v_n \geqslant 0$).**

i) On a $$\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \text{la série } \sum v_n \text{ converge} \\ v_n \geqslant 0 \end{cases} \implies \text{la série } \sum u_n \text{ converge (absolument)}$$

ii) On a $$\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \text{la série } \sum u_n \text{ diverge} \\ v_n \geqslant 0 \end{cases} \implies \text{la série } \sum v_n \text{ diverge}$$

- **Exemple.** Nature de $\sum \frac{\ln n}{n2^n}$ et de $\sum \frac{n\sqrt{n}}{2^n + \sqrt{n}}$.

28 **Proposition.** La série exponentielle converge absolument.

Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.

29 **Question.** Donner la nature des séries

$$\sum \sin(n\theta)\cos^n(\theta) \quad \text{où } \theta \in]0,\pi[\qquad\qquad \sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad \text{où } \alpha < 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

30 **Question.** Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ et de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

IV. Divers exemples

Étude d'un exemple : petit o versus Grand O

Donner la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

• **1$^{\text{ère}}$ tentative (échec).**
En utilisant des développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ et $\cos x$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{2(\sqrt{n})^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On ne peut malheureusement rien conclure de cette relation quant à la convergence de la série $\sum u_n$.
Il faut donc être plus précis.

• **2$^{\text{ème}}$ tentative.**
On pourrait pousser un cran plus loin les DL utilisés, pour obtenir :

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{2(\sqrt{n})^2}+\frac{1}{24(\sqrt{n})^4}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n})^4}\right)\right) \\ &= \frac{7}{24n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne $u_n \sim \frac{7}{24n^2}$.
Par comparaison à une série de Riemann convergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge (absolument).

• **3$^{\text{ème}}$ tentative (la meilleure !).**
On peut obtenir la même conclusion sans calculer les deux termes complémentaires des DL de départ.
On a

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{2(\sqrt{n})^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Étude de la suite harmonique

31 **Question.** Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite harmonique $(H_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Plus précisément, montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Pour cela, on pourra exploiter l'idée suivante.

- **Idée.** Pour montrer la convergence d'une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut montrer la convergence de la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$.
  Penser également à étudier la série $\sum(u_n - u_{n-1})$, où l'on a décalé les indices.

V. Divers (hors programme de sup)

Séries alternées (spé)

32 **Théorème (critère des séries alternées).**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers 0.
Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, son reste d'ordre n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

est du signe de $(-1)^{n+1}$ et vérifie $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.
En particulier, la somme de la série est comprise entre 0 et u_0.

- **Remarque 1.** La suite (u_n) est nécessairement positive (car elle décroît vers 0).

- **Remarque 2.** L'inégalité $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ est à lire sous la forme $|R_n| \leqslant |(-1)^{n+1} u_{n+1}|$
ou encore
$$|S_n - \ell| \leqslant |S_n - S_{n+1}|$$

- **Vocabulaire.** On appelle *série alternée*, un série réelle $\sum v_n$ telle que $(-1)^n v_n$ soit de signe constant.
Le résultat précédent, quitte à l'appliquer à la suite $(-u_n)$, nous dit qu'une série alternée *dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers* 0 est convergente et que sa somme, et plus généralement tous ses restes, sont du signe de leur premier terme et majorés par la valeur absolue de ce dernier.

- **Remarque.** Une série alternée ne converge pas nécessairement, même si son terme général tend vers 0.
La décroissance de la valeur absolue de son terme général est essentielle.

En effet, posons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = 0$ et $u_{2p+1} = \frac{1}{p+1}$.
La série $\sum u_n$ est divergente, bien qu'elle soit alternée ($\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n u_n \leqslant 0$) et que son terme général tende vers 0.
En effet, les sommes partielles S_n sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

33 **Proposition.**
Pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge.

Formule de Stirling (spé)

34 **Vers la Spé.** Montrer que

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{ou encore que} \qquad \begin{cases} n! \quad \sim \quad K n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n} \\ \text{avec } K = \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

Étape 1.
Montrons que la suite $(u_n) = \left(\dfrac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}\right)$ converge vers un réel $K > 0$.
Pour cela, il *suffit* de montrer que la suite $(\ln u_n)$ converge.
Il suffit de montrer que la série télescopique $\sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ converge.

Étape 2. Montrons que $K = \sqrt{2\pi}$.
Considérons les intégrales de Wallis $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$. On rappelle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \quad \text{et} \quad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Séries

preuve et éléments de correction

15

Soit $z \in \mathbb{C}$. La fonction $f_z : t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)} : t \longmapsto z^n \mathrm{e}^{tz} = z^n f(t).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et 1 :

$$\left|\mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| = \left|f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant M_{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$$

où M_{n+1} est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[0,1]$.
Or, la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc y est bornée par un certain réel M.
On peut donc prendre $M_{n+1} = |z|^{n+1} M$, ce qui donne :

$$\left|\mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant M \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$