Séries

exercices

Terme général « abstrait »

101 **carré**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

102 **max**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
Montrer que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge si et seulement si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

103 **sqrt**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.
Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente.

104 **Transformation homographique**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

105 **Encadrement pour des séries à termes signés**

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ converge également.

106 **Exponentiation et comparaison**

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in \left]0,1\right[$, la série $\sum u_n^\alpha$ diverge. (Le cas $\alpha = 0$ est vrai aussi !).

107 **Sous-espace vectoriel (belote)**

Soit

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum n^2 u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

108 **Sous-espace vectoriel (rebelote)**

Soit

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum n u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

109 **Une double inégalité (série télescopique)**

Soit (u_n) et (w_n) deux suites de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant w_{n-1} - w_n$$

On suppose de plus que (w_n) converge vers ℓ.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et on note U la limite de (U_n) (c'est licite, WHY ?).

   Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U - w_n + \ell \ \leqslant\ U_n \ \leqslant\ U$$

110 Un classique

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$?
2. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$?

   Écrire a_n en fonction de S_n puis considérer l'équivalent $1 - x \underset{x\to 1}{\sim} -\ln x$.
3. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n^2}$?

   On pourra considérer $\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

111 Un critère de condensation (Cauchy)

Soit (u_n) une suite décroissante positive.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
En déduire la nature de la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

112 Hum...

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente. Réciproque ?

Terme général « concret »

113 Télescopie

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

— Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

— En prenant le log de l'égalité définissant u_n, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

114 Retour aux sommes partielles

1. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

   On exprimera les sommes partielles de la série, en calculant notamment $S_2, S_3, S_4, \dots$
2. On pose $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$

   Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

115 Terme général défini par morceaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \begin{cases} -\frac{4}{n} & \text{si } n \text{ est multiple de } 5 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{5n} u_k$.
2. En déduire que $\sum u_k$ converge et déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

116 Très détaillé

On pose $u_n = \mathrm{e}^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha \leqslant 0$. Montrer que la série $\sum u_n$ est divergente.
2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.

117 **Avec paramètres**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
Lorsque la série converge, calculer sa somme.
Même question avec $\sum \big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\big)$.

118 **Ça se corse**

1. Étudier la convergence de la série $\sum \left(n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}\right)$.
2. Étudier la série de terme général $u_n = n^{\frac{3}{2}} \left(\tan \frac{1}{n} - \operatorname{sh} \frac{1}{n}\right)$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$.

119 **Un calcul de somme**

1. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.
2. En remarquant que $\displaystyle\int_0^1 x^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$, calculer sa somme.

120 **Avec le critère des séries alternées**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
En utilisant le critère des séries alternées, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n-x}$.

121 **Reste d'ordre n**

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
En utilisant le critère des séries alternées, montrer que le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Comparaison série intégrale

122 **Un petit morceau des séries de Bertrand**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha > 1$.
Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

123 **Le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 1$**

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer la divergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln n}$ et donner un équivalent de ses sommes partielles.
Quel développement asymptotique avons-nous obtenu ?

124 **Le cas $\alpha = 1$ et $\beta = -1$**

Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge et donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

125 **Séries de Bertrand (la totale)**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Donner la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

126 **Reste d'indice n**

Soit $\alpha \in \left]1, +\infty\right[$. Justifier l'existence et donner un équivalent de $\displaystyle u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Théorèmes classiques

127 La règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tous non nuls.

On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Peut-on conclure si $\ell = 1$? *On montrera qu'on ne peut pas conclure à l'aide de deux exemples : un où la série converge et un où la série diverge.*

128 Avec d'Alembert (1)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{\sin u_n}{n} \end{cases}$

À l'aide de la règle de d'Alembert, montrer que la série $\sum u_n$ converge.

129 Avec d'Alembert (2)

À l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum z^n \qquad \sum nz^{n-1} \qquad \sum \frac{1}{n+1} z^{n+1} \qquad \sum n! z^n \qquad \sum \frac{1}{n!} z^n \qquad \sum (az)^{2n}$$

130 Avec d'Alembert (3)

1. On pose $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.

   Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?

   Montrer que la suite des sommes partielles de la série $\sum nu_n$ est croissante.

   En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
2. On pose $v_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.

   Quelle est la limite de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$?

   Montrer que, si $0 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leqslant n^\alpha v_n$.

   En déduire que la série de terme général v_n converge.

131 Un critère

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

où a, b sont deux constantes réelles (avec $-a$ et $-b \notin \mathbb{N}$).

1. Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.
2. On pose $v_n = n^{b-a} u_n$.

   Étudier la convergence de la suite (v_n). On introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b + 1 < 0$.
4. Si ce critère est satisfait, montrer $nu_n \to 0$, puis calculer la somme en fonction de a, b, u_0.

132 $\sum u_n$ convergente avec u positive et décroissante

Soit u une suite positive, décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que $nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Majorer nu_{2n} par une expression du type $S_i - S_j$ avec i et j à déterminer en fonction de n.
2. Montrer que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

Pour la culture : la condition de décroissance est indispensable ; en considérant

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^{2023}} & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut montrer que $\sum u_n$ converge et que $u_n \neq \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

133 Cauchy-Schwarz

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent.
Montrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente, et que l'on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n\right|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} {v_n}^2\right).$$

134 Transformation d'Abel

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles ou complexes.
On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Relier :

$$\sum_{n=0}^{N} A_n b_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N} a_{n+1} B_n.$$

Étudier la convergence de $\sum \dfrac{\sin n}{n}$

On pourra commencer par montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin k\right)$ est bornée.

135 Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. On pose :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}.$$

Montrer que $\sum c_n$ est absolument convergente, de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right).$$

136 Séries de Riemann par télescopie

En étudiant la série $\sum\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$ pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et la série $\sum\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$, retrouver la nature des séries de Riemann :

$$\textit{la série } \sum \frac{1}{n^{\beta+1}} \textit{ converge si et seulement si } \beta > 0$$

En vrac

137 Un classique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive.

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par définie par $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$.

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n \;=\; \sum_{k=1}^{N} u_k - N v_N$
2. En déduire que la série $\sum v_n$ converge.
3. Montrer ensuite que $N v_N$ tend vers une limite finie lorsque $N \to +\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

138 La série du binôme négatif

On fixe $q \in\,]-1,1[$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit la série $\mathbb{B}(r)$

$$\mathbb{B}(r) \;=\; \sum_{n\geqslant r} \binom{n}{r} q^{n-r} \;=\; \sum_{n'\geqslant 0} \binom{n'+r}{r} q^{n'}$$

On note $\big(S_N(r)\big)_N$ la suite de sommes partielles de la série $\mathbb{B}(r)$. Ainsi

$$\forall\, N \geqslant r,\quad S_N(r) \;=\; \sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r} q^{k-r} \;=\; \sum_{j=0}^{N-r} \binom{j+r}{r} q^{j}$$

1. Quelle est la nature de la série $\mathbb{B}(r)$ pour $r = 0, 1, 2$?
2. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall\, N \geqslant r+1,\quad (1-q) S_N(r+1) \;=\; S_{N-1}(r) - \binom{N}{r+1} q^{N-r}$$
3. Montrer par récurrence sur r que la série $\mathbb{B}(r)$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

139 Série semi-convergente, réagencement des termes

Soit u une suite indexée par $\mathbb{N}^*$.
On réordonne les termes de u en écrivant un terme d'indice impair suivi de deux termes d'indice pair, précisément :

$$u_1 \quad u_2 \quad u_4 \quad u_3 \quad u_6 \quad \ldots$$

On appelle v cette nouvelle suite, que l'on indexe par $\mathbb{N}^*$. Dans cet exemple, on a $v_3 = u_4$.

1. Pour tout $k \geqslant 1$, exprimer v_{3k} en fonction d'un terme u_ℓ. Idem avec v_{3k-2} et v_{3k-1}.
2. On suppose **désormais** que $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ V_{3n} = \dfrac{1}{2} U_{2n} \qquad$ où $U_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k$ et $V_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} v_k$.
3. Rappeler pourquoi la série $\sum u_n$ converge (idée de la preuve).
   Connaissez-vous la valeur de sa somme ?
4. Montrer que la série $\sum v_n$ converge (on pourra considérer $V_{3n}, V_{3n+1}, V_{3n+2}$).
   Quelle est la valeur de sa somme ?
5. Un théorème (largement hors programme) stipule que si une série $\sum w_n$ converge absolument alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la série $\sum w_{\sigma(n)}$ converge (et même absolument) **vers la même somme**.
   Au fait que représente la série $\sum w_{\sigma(n)}$?
   Est-ce que ce résultat tient toujours si l'on suppose $\sum w_n$ seulement convergente (sans convergence absolue) ?

140 En passant par $\mathbb{C}$

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Justifier l'existence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)\, \cos^n(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)\, \cos^n(\theta).$$

141 DA de la série harmonique et la constante d'Euler

oeis.org/A001620

L'objectif est de donner un développement asymptotique à deux termes de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Plus précisément, on veut montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que :

$$H_n \;=\; \ln n \;+\; \gamma \;+\; \mathrm{o}(1)$$

1. Expliquer le « plus précisément ».
2. Donner un DA à 1 terme de H_n.
3. Donner un DA à 2 termes de H_n.

Pour montrer la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
on peut montrer la convergence de la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

4.* Montrer que $\gamma > 0$.
Pour la culture, γ s'appelle la constante d'Euler et $\gamma \approx 0{,}577$.
On ignore toujours si c'est ou non un nombre rationnel.

Faire ses gammes

142 Nature

Déterminer (en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$) la nature des séries de terme général :

(i) $n \sin(1/n)$

(ii) $\dfrac{n^n}{2^n}$

(iii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(v) $1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$

(vi) $\dfrac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$

(vii) $a^n n!$

(viii) $n e^{-\sqrt{n}}$

(ix) $\dfrac{\ln n}{n^a}$

(x) $\ln\left(\dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$

(xi) $\dfrac{\ln(n^2 + 3)\sqrt{2^n + 1}}{4^n}$

(xii) $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$

(xiii) $\sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n} - 1}$

(xiv) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(xv) $\left(n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$

(xvi) $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$

(xvii) $\mathrm{e}^{1/n} - a - \dfrac{b}{n}$

(xviii) $\dfrac{1}{n^a}\left((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right)$.

143 Avec un DA

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$.

144 Riemann (ou pas !)

1. Soit $a > 0$. Donner la nature de $\sum a^{\ln n}$.

   En utilisant que $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$, déterminer la nature de $\sum a^{H_n}$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. Nature de $\sum \dfrac{1}{n^n}$.

3. Nature de $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Essayer de mettre le terme général sous la forme n^{w_n} avec w_n à déterminer.

145 Calculs de somme

Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié l'existence des sommes infinies.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n}\right) = \ln 2$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(3 + (-1)^k\right)^{-k} = \frac{26}{15}$

146 Calculs de somme

Justifier l'existence et calculer la somme des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}$

147 **Exo de khôlle** Voir aussi l'exo 110

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Montrer que $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{a_n}{A_n}$ ont même nature.

Séries
corrigés

101

La série $\sum u_n$ étant convergente, son terme général tend vers 0.
On peut donc trouver un rang n_0 tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1,$$

d'où

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n.$$

La série $\sum u_n$ est convergente.
Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

102

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \max(u_n, v_n)$ et $0 \leqslant v_n \leqslant \max(u_n, v_n)$.
Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$ par positivité de u_n et v_n.
La série de TG $u_n + v_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.
Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.

105

Idée. Faire apparaître des séries à termes positifs.

La clé consiste à écrire $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$.
Par hypothèse, les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. Donc la série $\sum(w_n - u_n)$ converge.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum(v_n - u_n)$ converge.
Donc la série $\sum v_n$ converge (écrire $v_n = (v_n - u_n) + u_n$.

1. Supposons que $\sum u_n$ CV.
Soit $\alpha > 1$.
Montrons que la série $\sum u_n^\alpha$ CV.
Comme $\sum u_n$ CV, on a $u_n \longrightarrow 0$.

Ainsi, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant 1$.
La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est croissante sur $]0,+\infty[$ (car $\alpha - 1 \geqslant 0$).
Donc
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n^{\alpha-1} \leqslant 1$$
Multiplions par $u_n \geqslant 0$.
D'où
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n^\alpha \leqslant u_n$$
Or la série $\sum u_n$ CV.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n^\alpha$ CV.

Autre argument. Dire que $u_n^\alpha = \mathrm{o}(u_n)$, car $u_n^{\alpha-1} \longrightarrow 0$, car $u_n \longrightarrow 0$, car $\sum u_n$ CV.

2. **Jolie preuve.** On montre la contraposée.
On suppose qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\sum u_n^\alpha$ CV.
Montrons que $\sum u_n$ CV.
Posons $\beta = \dfrac{1}{\alpha} > 1$.
On a $\begin{cases} \sum u_n^\alpha \text{ CV} \\ \beta > 1 \end{cases}$.
D'après la première question, on en déduit que $\sum (u_n^\alpha)^\beta$ CV, c'est-à-dire (car $\alpha\beta = 1$), la série $\sum u_n$ CV.

Autre preuve.
Supposons que $\sum u_n$ DV.
Soit $\alpha \in]0,1[$.
Montrons que la série $\sum u_n^\alpha$ DV.

• **Cas $u_n \longrightarrow 0$.**

Alors àpcr, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
Comme $\alpha \in [0,1[$, on a
$$\text{àpcr}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_n^\alpha$$
Par hypothèse la série $\sum u_n$ DV.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n^\alpha$ DV.

• **Cas u_n ne tend pas vers 0.**
Alors on montre que u_n^α ne tend pas vers 0.
En effet, supposons que $u_n^\alpha \longrightarrow 0$.

Alors en composant cette limite avec $t^{\frac{1}{\alpha}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ car $\frac{1}{\alpha} > 0$, on obtient $u_n \longrightarrow 0$.
Dans ce cas, la série $\sum u_n^\alpha$ DV grossièrement.

107

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

• Il est clair que la suite nulle est dans F. En effet, la série de terme général $n^2 0^2 = 0$ converge ! (sa somme est nulle !).

• Montrons que F est stable par combinaison linéaire.
Soit $u, v \in F$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$, càd montrons que la série $\sum n^2 (\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge.
Prenons le terme général de cette série. Il vaut :

$$n^2 (\lambda u_n + \mu v_n)^2 \; = \; \lambda^2 \, n^2 u_n^2 \; + \; 2\lambda\mu \, n^2 u_n v_n \; + \; \mu^2 \, n^2 v_n^2$$

Examinons les 3 termes de cette somme.

▷ Comme $u \in F$, la série $\sum n^2 u_n^2$ converge.
▷ Idem pour v.
▷ Montrons que la série $\sum n^2 u_n v_n$ converge.
Appliquons l'inégalité $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ à $a = nu_n$ et $b = nv_n$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |n^2 u_n v_n| \; = \; |(nu_n)(nv_n)| \; \leqslant \; \frac{1}{2}\Big(n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2\Big)$$

Les séries $\sum n^2 u_n^2$ et $\sum n^2 v_n^2$ convergent (car $u, v \in F$). Par opération sur les séries convergentes, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{2}\Big(n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2\Big)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |n^2 u_n v_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum n^2 u_n v_n$ converge absolument, donc converge (par théorème).

Bilan : Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n^2 (\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge, ce qui signifie que $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarque. On aurait pu vérifier la stabilité par combinaison linéaire en deux temps. En vérifiant d'abord la stabilité par multiplication par un scalaire, puis par somme.

108

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

• Il est clair que la suite nulle est dans F. En effet, la série de terme général $n0^2 = 0$ converge ! (sa somme est nulle !).

• Montrons que F est stable par combinaison linéaire.
Soit $u, v \in F$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$, càd montrons que la série $\sum n(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge.
Prenons le terme général de cette série. Il vaut :

$$n(\lambda u_n + \mu v_n)^2 \;=\; \lambda^2\, n u_n^2 \;+\; 2\lambda\mu\, n u_n v_n \;+\; \mu^2\, n v_n^2$$

Examinons les 3 termes de cette somme.

▷ Comme $u \in F$, la série $\sum n u_n^2$ converge.
▷ Idem pour v.
▷ Montrons que la série $\sum n u_n v_n$ converge.
Appliquons l'inégalité $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$ à $a = \sqrt{n}u_n$ et $b = \sqrt{n}v_n$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |n u_n v_n| \;=\; |\sqrt{n}u_n \sqrt{n}v_n| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\Big(n u_n^2 + n v_n^2\Big)$$

Les séries $\sum n u_n^2$ et $\sum n v_n^2$ convergent (car $u, v \in F$). Par opération sur les séries convergentes, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{2}\Big(n u_n^2 + n v_n^2\Big)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |n u_n v_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum n u_n v_n$ converge absolument, donc converge (par théorème).

Bilan : Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge, ce qui signifie que $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarque. On aurait pu vérifier la stabilité par combinaison linéaire en deux temps. En vérifiant d'abord la stabilité par multiplication par un scalaire, puis par somme.

109

1. On a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant w_{n-1} - w_n$$
La série télescopique $\sum (w_{n-1} - w_n)$ a même nature que la suite (w_n) qui converge.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.
2. Fixons n. On a :
$$\forall\, N \geqslant n+1, \quad 0 \;\leqslant\; \sum_{k=n+1}^{N} u_k \;\leqslant\; \sum_{k=n+1}^{N} (w_{k-1} - w_k) = w_n - w_N$$
Par passage à la limite dans les inégalités larges quand $N \to +\infty$ (licite, car chaque limite existe), on a
$$0 \;\leqslant\; \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{U-U_n} \;\leqslant\; w_n - \ell$$

110

1. Supposons que $\sum a_n$ converge. Montrons que $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ converge.

   On a $S_n \longrightarrow \ell > 0$, donc $\dfrac{1}{S_n} \longrightarrow \dfrac{1}{\ell}$.

   Ainsi, $\dfrac{a_n}{S_n} \sim \dfrac{1}{\ell} a_n$.

   On termine par comparaison de séries à termes positifs.

2. **Autre preuve.** Un élève me dit que, pour la question 2, traiter la contraposée est tout aussi sympathique, et je suis d'accord avec lui.

   Supposons que $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ converge.

   Montrons que la suite (S_n) converge (il suffit de montrer la convergence de $(\ln S_n)$).

   Alors $\dfrac{a_n}{S_n} \longrightarrow 0$ et on a l'équivalent (WHY ?) :

   $$\frac{a_n}{S_n} \;=\; 1 - \frac{S_n}{S_{n-1}} \;\sim\; -\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) \;=\; \ln(S_{n-1}) - \ln S_n$$

   Par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum(\ln(S_{n-1}) - \ln S_n)$ converge, donc la suite $(\ln S_n)$ aussi, donc (S_n) aussi.

3. A taper.

Soit (u_n) positive, décroissante.

Mq $\sum u_n$ CV $\iff$ $\sum 2^n u_{2^n}$ CV

Dans cet exo, on va travailler avec les sommes partielles. On ne va donc pas utiliser les th de comparaison de SATP.

On rappelle que la notion de CV d'une série est une notion asymptotique donc les premiers termes n'ont pas d'incidence sur la nature de la série.

On décide ici (voir la preuve pour comprendre) de poser :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}$$

Comme (u_n) est positive, la CV de $\sum u_n$ équivaut au fait que la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a :

$$\underbrace{(u_1)}_{\leqslant u_1} + \underbrace{(u_2 + u_3)}_{\leqslant 2u_2} + \underbrace{(u_4 + u_5 + u_6 + u_7)}_{\leqslant 4u_4} + \underbrace{(u_8 + \dots + u_{15})}_{\leqslant 8u_8}$$

Ainsi $\boxed{S_{2^{n+1}-1} \leqslant T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}}$

D'où

$$\begin{array}{ccc} (T_n) \text{ CV} & & (S_n) \text{ CV} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ & & (S_n) \text{ majorée} \\ & & \Uparrow \\ (T_n) \text{ majorée} & \Rightarrow & (S_{2^{n+1}-1}) \text{ majorée} \end{array}$$

Variante

$$\begin{array}{ccc} (S_n) \text{ DV} & & (T_n) \text{ DV} \\ \Downarrow & & \\ S_n \longrightarrow +\infty & & \Uparrow \\ \Downarrow & & \\ S_{2^{n+1}-1} \longrightarrow +\infty & \Longrightarrow & T_n \longrightarrow +\infty \end{array}$$

Soit n fixé.

On a :

$$\underbrace{(u_1)}_{\geqslant u_2} + \underbrace{(u_2 + u_3)}_{\geqslant 2u_4} + \underbrace{(u_4 + u_5 + u_6 + u_7)}_{\geqslant 4u_8} + \underbrace{(u_8 + \dots + u_{15})}_{\geqslant 8u_{16}}$$

En multipliant par 2

$$2\Big(\underbrace{(u_1)}_{\geqslant 2u_2} + \underbrace{(u_2 + u_3)}_{\geqslant 4u_4} + \underbrace{(u_4 + u_5 + u_6 + u_7)}_{\geqslant 8u_8} + \underbrace{(u_8 + \dots + u_{15})}_{\geqslant 16u_{16}}\Big)$$

$$2S_{2^n-1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} 2^n u_{2^n}$$

Ainsi $\boxed{T_n \leqslant 2S_{2^n-1}}$

D'où

(S_n) CV $\quad\quad\quad$ (T_n) CV

$\Downarrow \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \Uparrow$

(S_n) majorée

$\Downarrow$

(S_{2^n-1}) majorée $\Rightarrow$ (T_n) majorée

__Variante__

$$\begin{tikzcd}
(T_n)\ \text{DV} \arrow[dd, Rightarrow] & & (S_n)\ \text{DV} \\
& & S_n \longrightarrow +\infty \arrow[u, Rightarrow] \\
T_n \longrightarrow +\infty \arrow[rr, Rightarrow] & & S_{2^n-1} \longrightarrow +\infty \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

On pose $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$.
Alors
$$2^n u_{2^n} \;=\; \frac{1}{\ln(2^n)^\beta} \;=\; \frac{1}{n^\beta (\ln 2)^\beta} \text{ du type } c\frac{1}{n^\beta}$$
On a les équivalences
$$\sum u_n \mathrm{CV} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum 2^n u_{2^n} \mathrm{CV} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum \frac{1}{n^\beta} \mathrm{CV} \quad\Longleftrightarrow\quad \beta > 1$$

- Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

  — La suite u est décroissante.
  En effet, on montre par récurrence immédiate que $\forall\, n,\ u_n > 0$.
  Donc $\forall\, n,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n} < 1$.
  Donc $\forall\, n,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

  — La suite u est minorée par 0.

  BILAN : la suite u converge d'après le th de la limite monotone.
  Notons ℓ sa limite.
  En passant à la limite dans l'égalité $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n}$, on obtient

$$\ell = \ell\mathrm{e}^{-\ell} \qquad \text{d'où} \qquad \ell(1-\mathrm{e}^{-\ell}) = 0 \qquad \text{d'où (WHY ?)} \qquad \ell = 0$$

- Étudions la nature de la série $\sum u_n$.
  On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n}$ et la suite u est à termes > 0, on peut donc prendre le log népérien.
  D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - u_n$$

  Ou encore

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ = \ \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$$

  Ainsi, étudier la série $\sum u_n$ revient à étudier la série télescopique $\sum \big(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})\big)$, qui a même nature (d'après le cours) que la SUITE $\big(\ln u_n\big)$.
  Cette suite diverge (car $u_n \to 0$).

  BILAN : La série $\sum u_n$ diverge.

115

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_{5n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} - \frac{4}{5k+5} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{5k+5} \\
&= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.
\end{aligned}$$

Ce dernier terme est du type

$$I_{4n} = \frac{4}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+\frac{4k}{4n}} \quad \text{où l'on a posé} \quad I_m = \frac{4}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{4k}{m}}.$$

La suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une somme de Riemann de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, continue sur $[0,4]$. Donc :

$$I_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \int_0^4 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \ln 5.$$

Par extraction, on a $I_{4m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \ln 5$ c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{5n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 5$$

2. Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = 0$, on en déduit que $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1}$ a aussi pour limite $\ln 5$.
De la même manière, on montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{5n+2} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+3} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+4} = \ln 5$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ln 5$ et donc que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \;=\; \ln 5$$

116

1. La série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leqslant 0$ puisque son TG ne tend pas vers 0.
2. Soit $\alpha > 0$. Par croissances comparées :

$$n^2\, u_n = (n^\alpha)^{2/\alpha}\, e^{-n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$
Comme $2 > 1$, on en déduit que $\sum u_n$ converge absolument.

Bilan. On vient de prouver que

$$\sum u_n \text{ CV} \iff \alpha > 0$$

117

On a $u_n = \sqrt{n}\left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)$.

— Le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\sqrt{1+t}$ fournit $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + \mathrm{O}(t^2)$.
On obtient un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \sqrt{n}\left((1+a+b) + \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

— Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$.
Le terme général u_n ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2}+b \neq 0$.
Alors $u_n \sim \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$).
Par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n$ diverge.

— Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2}+b = 0$.
Alors $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
Or la série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge absolument (c'est Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)
Par comparaison, on en déduit que $\sum u_n$ converge (absolument).

Comme on a $\left(1+a+b=0 \text{ et } \frac{a}{2}+b=0\right) \iff (a=-2 \text{ et } b=1)$, on en déduit :

$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \iff (a,b) = (-2,1)$$

— On suppose que $(a,b) = (-2,1)$. Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} - 2\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2}\sqrt{k}\\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 1\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - 1.\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$.

1. On peut écrire $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\left[1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$.
   Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, on a $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   On en déduit que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   Donc $u_n = n^{\frac{1}{n}}\left[-\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})\right]$.
   Puisque $n^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ \ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$, d'où la convergence absolue de $\sum u_n$.
2. Les fonctions tan et sh étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elles admettent un $\mathrm{DL}_3(0)$ que l'on peut écrire, par imparité, $\tan x = x + \mathrm{O}(x^3)$ et $\operatorname{sh} x = x + \mathrm{O}(x^3)$.
   Ainsi,
   $$\tan x - \operatorname{sh} x \ = \ \mathrm{O}(x^3)$$
   D'où
   $$\tan \tfrac{1}{n} - \operatorname{sh}\tfrac{1}{n} \ = \ \mathrm{O}(\tfrac{1}{n^3})$$
   Puis, en multipliant par $n^{\frac{3}{2}}$:
   $$u_n \ = \ n^{3/2} \times \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
   La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge absolument (série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), donc par comparaison, il en est de même la série $\sum u_n$.
3. On a $u_n = \exp(v_n)$ avec $v_n = n^\alpha \ \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \ \left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$.
   Ainsi,
   — Cas $\alpha \leqslant 2$. Alors v_n ne tend pas vers $-\infty$ et donc u_n ne tend pas vers 0 ;
     Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   — Cas $\alpha > 2$. Montrons que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$.
     Autrement dit, montrons que $n^2 u_n = \exp(v_n + 2\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
     Comme $v_n \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$ et $\alpha > 2$, on a $v_n \to \ -\infty$ et $\ln n = \mathrm{o}(v_n)$ par croissances comparées.
     Donc $v_n + 2\ln n = v_n + \mathrm{o}(v_n) \sim v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
     Donc $\exp(v_n + 2\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
     On a montré que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$.
     La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc par comparaison la série $\sum u_n$ converge absolument
   Bilan : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

119

1. On a
$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}\right| \sim \frac{1}{4n^2}$$
D'où la convergence absolue, et donc la convergence.

2. La relation $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$ pourrait faire penser à une somme télescopique ; mais ce n'est pas le cas ici à cause des changements de signes occasionnés par les « $(-1)^n$ ».
Calculons les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+3} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{2n+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (1-x^2)\,(-x^2)^n\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^2-(1-x^2)\,(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,(-x^2)^{N+1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$
• Intéressons-nous à la deuxième intégrale. Par inégalité triangulaire, on a
$$\left|\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}x^{2N+2}\,\mathrm{d}x$$
En notant K un majorant de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ sur $[0,1]$ (licite), on a
$$\left|\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant K\int_0^1 x^{2N+2}\,\mathrm{d}x = K\frac{1}{2N+3}$$
Donc :
$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$
• Calculons la première intégrale.
$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -1+2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2}-1$$
Bilan
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

120

Posons $u_n = \frac{1}{n-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant x$.
La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est (positive) décroissante et tend vers 0.
On en déduit, d'après le théorème des séries alternées, la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (-1)^n \, u_n$
donc, par le caractère asymptotique de la notion de série convergente, la convergence de la série $\sum (-1)^n \, u_n$.

121

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est une série alternée et la suite $\left(\frac{1}{(n+x)^2}\right)$ décroît et tend vers 0.

D'après le critère des séries alternées, on en déduit que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ converge et que son reste d'ordre n vérifie :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison, la série $\sum R_n$ est absolument convergente, donc convergente.

122

Prenons le terme général.
Comme $\alpha > 1$, on peut trouver $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < \alpha$, par exemple $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$.
Comme $\alpha - \gamma > 0$, on a par croissances comparées (et même directement par opérations si $\beta \geqslant 0$) :

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \;=\; \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^\gamma}\Big)$$

En effet,

$$n^\gamma \,\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \;=\; \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln n)^\beta} \;\xrightarrow[n\to+\infty]{}\; 0$$

La convergence absolue de la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ (Riemann avec $\gamma > 1$) assure celle de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

123

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\,\ln x}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$ (comme inverse d'une fonction continue à valeurs strictement positives et évidemment croissante).
On obtient donc l'encadrement

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(n) \;\leqslant\; \sum_{k=2}^{n} f(k) \;\leqslant\; \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(2)$$

c'est-à-dire en notant F une primitive de f :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad F(n) \;-\; F(2) \;+\; f(n) \;\leqslant\; \sum_{k=2}^{n} f(k) \;\leqslant\; F(n) \;-\; F(2) \;+\; f(2).$$

Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est $F : x \mapsto \ln(\ln x)$, donc

$$F(n) \;\longrightarrow\; +\infty \qquad \text{et} \qquad f(n) \;\longrightarrow\; 0.$$

Un équivalent du membre gauche est donc

$$F(n) - F(2) + f(n) \;\sim\; F(n).$$

Ce membre gauche tend vers $+\infty$.
Par minoration, on en déduit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, donc la série $\sum f(n)$ diverge.
Déterminons un équivalent du membre droit :

$$F(n) - F(2) + f(n) \;\sim\; F(n).$$

Les membres extrêmes sont équivalents à $F(n)$, donc par théorème des Gendarmes avec les équivalents, on a

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \;\sim\; F(n)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ln k} \;\sim\; \ln(\ln n).$$

• La divergence est immédiate ou presque, car $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.

• On va chercher un équivalent des sommes partielles, ce qui redonnera, a posteriori, la divergence de la série.

Une étude de fonction montre que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$.
On obtient donc l'encadrement

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(n) \;\leqslant\; \sum_{k=3}^{n} f(k) \;\leqslant\; \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(3)$$

c'est-à-dire en notant F une primitive de f :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad F(n) \;-\; F(3) \;+\; f(n) \;\leqslant\; \sum_{k=3}^{n} f(k) \;\leqslant\; F(n) \;-\; F(3) \;+\; f(3).$$

Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$, donc

$$F(n) \;\longrightarrow\; +\infty \qquad \text{et} \qquad f(n) \;\longrightarrow\; 0.$$

Ce membre gauche tend vers $+\infty$.
Par minoration, on en déduit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, donc la série $\sum f(n)$ diverge.

Un équivalent du membre gauche est

$$\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(n) \;=\; F(n) - F(3) + f(n) \;\sim\; F(n)$$

Déterminons un équivalent du membre droit :

$$\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(3) \;=\; F(n) - F(3) + f(3) \;\sim\; F(n)$$

Les membres extrêmes sont équivalents à $F(n)$, donc

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \;\sim\; F(n) = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Donc (WHY), on a (look at the premier terme) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \;\sim\; \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

125

- Cas $\alpha > 1$. C'est Riemann qui fait tout.
  On a (WHY ?)
$$\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^\gamma}\Big) \qquad \text{où } \gamma = \frac{1+\alpha}{2}$$

- Cas $\alpha = 1$. Dans ce cas, Riemann nous lâche, mais un « Riemann-logarithmique » prend le relai.
  Il y a 3 cas à distinguer, à savoir $\beta = 1$, puis $\beta < 1$, puis $\beta > 1$.
  ◦ Le cas $\beta = 1$ a été traité dans l'exo 123.
  ◦ Pour $\beta < 1$, on écrit $0 \leqslant \frac{1}{n\ln n} \leqslant \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ et on termine par comparaison de séries à termes positifs, pour dire que la série diverge.
  ◦ Pour $\beta > 1$, on montre que la série converge avec une comparaison série-intégrale. Pour la culture, lire l'exo sur critère de Condensation de Cauchy 111.

- Cas $\alpha < 1$. C'est Riemann qui fait tout.
  On a (WHY ?)
$$\frac{1}{n^\gamma} = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\Big) \qquad \text{où } \gamma = \frac{\alpha+1}{2}$$

126

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ; cela justifie l'existence de u_n.
La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, une comparaison série-intégrale donne :

$$(\star) \qquad \int_{n+1}^{N} f(t)\mathrm{d}t + f(N) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_{n+1}^{N} f(t)\mathrm{d}t + f(n+1)$$

Or

$$\int_{n+1}^{N} f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

Par passage à la limite dans $(\star)$, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

D'où $u_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ a même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 2$.

1.
2. **Jolie preuve.**
   Supposons que $\ell > 1$. Montrons que $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   On a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$.
   Par passage à l'inverse (licite, WHY ?), on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell} < 1$.
   Ou encore $\left|\dfrac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{u_{n+1}}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell} < 1$.
   D'après la question 1, on en déduit que la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ converge.
   Donc $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (attention, ici, on a une suite à coefficients complexes).
   D'où $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc (u_n) ne tend pas vers 0.
   Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

1. Posons $w_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$. On sait que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ssi la série $\sum(w_{n+1}-w_n)$ converge.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une SATP convergente (série de Riemann), donc par théorème de comparaison, $\sum(w_{n+1}-w_n)$ est absolument convergente, donc convergente, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, vers un réel noté λ. Par continuité de exp, $n^{b-a}u_n \to e^\lambda \neq 0$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{e^\lambda}{n^{b-a}}}$.
   On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive àpcr et $\sum u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{n-a}}$ (par théorème de comparaison des SATP).
   Connaissant les cas de convergence des séries de Riemann, on en déduit
   $$\boxed{\sum u_n \text{ converge } \iff b-a>1}.$$
   On suppose désormais que $b-a>1$.
2. On a $nu_n \sim \dfrac{e^\lambda}{n^{b-a-1}}$ avec $b-a-1>0$, donc $\dfrac{e^\lambda}{n^{b-a-1}} \to 0$ et par conservation de la limite dans les équivalents, $\boxed{nu_n \to 0}$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$
   donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1} - nu_n + (b-1)u_{n+1} - au_n = 0$
   donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1} - nu_n + (b-1)(u_{n+1}-u_n) + (b-1-a)u_n = 0.$
   En sommant pour n de 0 à N, on obtient par télescopage :
   $$\underbrace{(N+1)u_{N+1}}_{\to 0 \text{ d'après 2.}} - 0u_0 + (b-1)\underbrace{u_{N+1}}_{\to 0} - u_0 + (b-1-a)\sum_{n=0}^{N} u_n.$$
   On a $u_N \to 0$ (terme général d'une série convergente) donc en passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient
   $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{(b-1)u_0}{b-a-1}}.$$

132

1. — Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Par décroissance de u, on a
   $$\forall\, k \in [\![n+1,\ 2n]\!], \quad 0 \ \leqslant\ u_{2n} \ \leqslant\ u_k$$
   Par somme, on a
   $$0 \ \leqslant\ nu_{2n} \ \leqslant\ \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} u_k}_{S_{2n}-S_n}$$
   — On a donc
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \ \leqslant\ nu_{2n} \ \leqslant\ S_{2n} - S_n$$
   Par hypothèse, la série $\sum u_n$ converge, donc la suite (S_n) converge, donc $S_{2n} - S_n \to 0$.
   D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit $nu_{2n} \to 0$.
2. Montrons que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.
   Montrons que la suite (nu_n) tend vers 0.
   En notant $v_n = nu_n$, il s'agit de montrer que $v_{2n+1} \to 0$ et $v_{2n} \to 0$.
   - On a $(2n+1)u_{2n+1} = 2 \times nu_{2n+1} + u_{2n+1}$.
     On a $u_{2n+1} \to 0$ car $\sum u_n$ converge.
     Montrons que $nu_{2n+1} \to 0$.
     On a, par décroissance de u,
     $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \ \leqslant\ nu_{2n+1} \ \leqslant\ nu_{2n}$$
     Or $nu_{2n} \to 0$ d'après la première question.
     Le théorème des Gendarmes fournit $nu_{2n+1} \to 0$.

     Ainsi $v_{2n+1} = (2n+1)u_{2n+1} \to 0$.
   - Or $nu_{2n} \to 0$, donc $v_{2n} = 2nu_{2n} \to 0$.

   BILAN : la suite (nu_n) tend vers 0 (car les suites extraites d'indice pair et impair tendent vers 0).

133

Considérer l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Ecrire Cauchy-Schwarz avec des sommes partielles. Puis passer à la limite.

136

Soit $\beta \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta}\underbrace{\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right)}_{\sim -(-\beta)\frac{1}{n}} \sim \frac{\beta}{n^{\beta+1}}.$$

Comme la suite de terme général $v_n = \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$ est de signe constant, la série $\sum v_n$ a même nature que la série télescopique $\sum \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$, donc a même nature que la *suite* $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.
Or, cette dernière suite converge ssi $\beta > 0$ (ici, $\beta \neq 0$).
Donc pour $\beta \neq 0$, La série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ converge ssi $\beta > 0$.

Pour $\beta = 0$. On a

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \geqslant 0$$

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ a même nature que la série télescopique $\sum \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big)$, qui a même nature que la suite $\big(\ln n\big)$, qui diverge.
Donc, pour $\beta = 0$, la série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ diverge.

Bilan.
La série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ converge ssi $\beta > 0$.
Autrement dit, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

1. Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. On utilise la définition de v_n, on fait apparaître une somme double, on intervertit les sommes, puis on décompose la fraction $\frac{1}{n(n+1)}$ en $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; et enfin, on télescope !

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \right) \\
&= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N} \left(\frac{1}{n(n+1)} k u_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(k u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} u_k \; - \; \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} u_k \; - \; N v_N
\end{aligned}$$

2. Montrons que la série $\sum v_n$ converge.

   On va montrer que la **suite** des sommes partielles $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{n=1}^{N} v_n \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge.

   Tout d'abord, comme le terme général v_n est positif, la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   Reste à montrer qu'elle est majorée.
   D'après 1, on a
   $$V_N \; = \; U_N - N v_N \qquad \text{d'où} \qquad V_N \leqslant U_N$$
   Or la série $\sum u_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(U_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge, donc est en particulier majorée, disons par M.
   Comme $V_N \leqslant U_N$ pour tout N, on en déduit que la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par M.

3. D'après 1, on a
   $$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad N v_N = U_N - V_N$$
   Les suites U et V convergent (hypothèse et 2), donc la suite $(N v_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge également.
   Montrons que $\lim N v_N = 0$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim N v_N = \ell \neq 0$.
   On a alors
   $$v_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \ell \times \frac{1}{N}$$
   Or $\frac{1}{N}$ est le terme général d'une série divergente.
   Par comparaison de séries à termes positifs (le terme général v_N l'est), on en déduit que la série $\sum v_N$ diverge, ce qui contredit 2.

4. Il suffit de passer à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'égalité 1 (c'est licite, WHY ?) et d'utiliser la question 3 qui dit que $N v_N \to 0$.

1. Un DA à 2 termes pourrait être du type
   $H_n = n + 3 + \mathrm{o}(1)$.
   Ou encore
   $H_n = \ln n + \sqrt{\ln n} + \mathrm{o}(\sqrt{\ln n})$.
   Ou encore
   $H_n = n + 3\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n})$.

   On pourrait dire « donner un DA à 2 termes, à la précision 1 de H_n ».
   Un tel DA pourrait être de la forme $H_n = n + 3 + \mathrm{o}(1)$, ce qui n'est toujours pas la forme cherchée.

   Ainsi, l'énoncé donne donc une partie de la question !
2. Par comparaison série/intégrale avec une fonction décroissante définie sur $[1, +\infty[$, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^n f \ + \ f(n) \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} f(k) \ \leqslant \ \int_1^n f + f(1)$$
   Pour la fonction inverse, on a donc
   $$\bigstar \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln n + \frac{1}{n} \ \leqslant \ H_n \ \leqslant \ \ln n + 1$$
   Le membre gauche est $\sim$ à $\ln n$.
   Le membre droit est $\sim$ à $\ln n$.
   D'après le théorème des Gendarmes, on a $H_n \sim \ln n$.
3. Montrons maintenant que la suite $(H_n - \ln n)$ converge. On pose $u_n = H_n - \ln n$.
   Première preuve. Montrons que (u_n) converge en montrant que la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
   On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(1 - \dfrac{1}{n})$, ou encore, autre calcul, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln(1 + \dfrac{1}{n+1})$.
   Un calcul de DL (lequel) montre que $u_{n+1} - u_n = \mathrm{O}(\dfrac{1}{n^2})$.
   Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument, on en déduit que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, donc converge (par théorème).

   Pour info, un calcul plus précis avec des o fournit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{2n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$.
   On en déduit au passage que $u_{n+1} - u_n$ est $\leqslant 0$ à partir d'un certain rang.

   Deuxième preuve. On montre que $u_{n+1} - u_n$ est négatif pour tout n, avec l'inégalité de concavité du log.
   Par ailleurs, (u_n) est bornée ($u_n \in [0, 1]$ d'après $\bigstar$)
   D'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge.

4. Montrons que la limite de (u_n) est > 0. C'est plus délicat.
   On peut reprendre la comparaison série-intégrale sur $[2, n]$:
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_2^n f \ + \ f(n) \ \leqslant \ \sum_{k=2}^{n} f(k)$$
   Ainsi, pour la fonction inverse, on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\ln n - \ln 2) \ + \ \frac{1}{n} \ \leqslant \ H_n - 1$$
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \ln 2 + \frac{1}{n} \ \leqslant \ H_n - \ln n$$
   D'où, a fortiori,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \ln 2 \ \leqslant \ H_n - \ln n$$
   Ainsi, la limite de u_n est $\geqslant 1 - \ln 2$ qui est > 0.
   Une calculatrice donne $1 - \ln 2 \approx 0.30685281944$.

Les relations d'équivalence ou de domination données dans la suite sont parfois le fruit d'un calcul non trivial.

(i) On a $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: la série diverge grossièrement.

(ii) On a $\left(\frac{n}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: la série diverge grossièrement.

(iii) On a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(iv) On a $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(v) On a $1-\cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{2\,n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(vi) On a $\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(vii) On a $|a^n\,n!| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ dès que $a \neq 0$. Ainsi, la série converge (elle est nulle à partir d'un certain rang) si $a = 0$, et diverge grossièrement dans tous les autres cas.

(viii) On a $ne^{-\sqrt{n}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(ix) Distinguons trois cas :

— si $a \leqslant 0$, la série diverge grossièrement ;

— si $0 < a \leqslant 1$, on a $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^a}\right)$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;

— si $a > 1$, on peut trouver un réel $1 < b < a$, et on a $\frac{\ln n}{n^a} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^b}\right)$ (par croissance comparée) : la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(x) On a $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \sim \frac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(xi) On a $\frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xii) On a $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \sim \frac{\ln n}{n}$, donc $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\right)$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(xiii) On a $\sqrt{\operatorname{ch}\frac{1}{n}-1} \sim \frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(xiv) On a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xv) On a $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = \exp\left[-\frac{1}{6}n^{\alpha-2}+o(n^{\alpha-2})\right]$. On montre alors que la série diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 2$ et qu'elle converge si $\alpha > 2$ car son terme général est alors $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xvi) On a $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3} = \left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi,

— si $a \neq \frac{9}{2}$, le terme général est équivalent à $\underbrace{\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{2}\right)}_{\neq 0}\frac{1}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;

— si $a = \frac{9}{2}$, le terme général est $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(xvii) On a $e^{1/n}-a-\frac{b}{n} = (1-a)+\frac{1-b}{n}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

— si $a \neq 1$, le terme général tend vers $1-a \neq 0$, et la série diverge grossièrement ;

— si $a = 1$ et $b \neq 1$, le terme général est équivalent à $\frac{1-b}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;

— si $a = b = 1$, le terme général est $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

Remarque : il était habile d'effectuer un développement du terme général avec un terme d'erreur en $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ plutôt que d'écrire un terme en $\frac{*}{n^2}$ (qui n'aurait pas eu d'importance) puis un terme d'erreur en $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(xviii) Le terme général est équivalent à $2\frac{\ln(n)}{n^a}$. Ainsi, en reprenant le résultat sur les séries de Bertrand, la série converge si et seulement si $a > 1$.

143

Déterminons un développement asymptotique de u_n. On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \;+\; \frac{1}{n} \;+\; \underbrace{\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{v_n}.
\end{aligned}$$

On a

- convergence de la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
- divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$
- convergence absolue, par comparaison à une série de Riemann, de la série $\sum v_n$

D'où la divergence de la série $\sum u_n$.

145

(i) La convergence de la série est facile en utilisant $\ln(1+x) \sim x$ en 0.
Pour la valeur de la somme, il y a du télescopage à réaliser proprement.
Remarque : on peut faire du « deux en un » en calculant la somme de la série via un calcul de sommes partielles et en constatant, a posteriori, la convergence.

(ii) Comment voir la convergence de la série ?
Attention à l'erreur classique d'un élève qui dit $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$.
Or la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
Donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.
Il y a une erreur. Où ? ? ?

Pour redresser le raisonnement, on peut écrire $\ln(1+x) = x + \mathrm{O}(x^2)$.

Pour la valeur de la somme, on peut calculer S_{2n} et S_{2n+1}.
On constate que $S_{2n} = \dots$ et $S_{2n+1} = 0$.
Ainsi, $S_{2n} \longrightarrow 0$ et $S_{2n+1} \longrightarrow 0$.
D'où (WHY ?) $S_n \longrightarrow 0$.

Attention à ne pas dire « dans tous les cas, S_n tend vers 0 », phrase qui ne veut rien dire.

(iii)

(iv)