Déterminants

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
De plus, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.

I. Déterminant d'une famille de n vecteurs

Définition de $\det_{\mathscr{B}}$

1 **Définition.** Soit $\varphi : E\times E\to\mathbb{K}$ une application.
On dit que φ est bilinéaire lorsque φ est linéaire par rapport à chacune des variables.

2 **Définition.**
Soit $\varphi : E^p\to\mathbb{K}$ une application.
On dit que φ est une *forme p-linéaire* lorsque φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire lorsque pour toute famille $(u_1,\dots,u_p)\in E^p$ et pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \varphi(u_1,\dots,u_{i-1},x,u_{i+1},\dots,u_p) \end{array}$$

est une forme linéaire.

3 **Définition.** Soit $\varphi : E^p\to\mathbb{K}$ une forme p-linéaire sur E.

— On dit que φ est *alternée* lorsque

$$\forall\,(u_1,\dots,u_p)\in E^p,\quad \forall\, i\neq j,\quad \Big(u_i=u_j \implies \varphi(u_1,\dots,u_p)=0.\Big)$$

— On dit que φ est *antisymétrique* lorsque

$$\forall\,(u_1,\dots,u_p)\in E^p,\quad \forall\, i\neq j,\quad \varphi(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) = -\varphi(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$$

4 **Proposition.** Si φ est alternée, alors elle est *antisymétrique*.

- **Remarque.** La réciproque est vraie car $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ce ne serait pas vrai dans un corps $\mathbb{K}$ où $2=0$.
- **Question ?** A-t-on utilisé le fait que E est de dimension finie jusqu'à présent ?

Le théorème suivant est un résultat théorique fondamental. Il est **admis**.
Rappel. Ici, E est de dimension finie, et on pose $n=\dim E$.

5 **Théorème.** Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

— Il existe une unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathscr{B}} : E^n\to\mathbb{K}$ vérifiant $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})=1$.

— Toute forme n-linéaire alternée φ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$,
donc il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\varphi=\lambda\det_{\mathscr{B}}$.

- **Résumons.** Le théorème vient donc de créer une forme n-linéaire alternée particulière, qui dépend du choix d'une base $\mathscr{B}$ de E. Elle est notée $\det_{\mathscr{B}}$.
  Ainsi $\det_{\mathscr{B}}$ « mange » n vecteurs de E, ou dit autrement, mange une famille de n vecteurs de E.
  Cette forme n-linéaire alternée est particulière dans le sens où son évaluation en $\mathscr{B}$ vaut 1.
  De plus, toute autre forme n-linéaire alternée lui est proportionnelle.
- **Au fait,** dans le deuxième point, que vaut λ ? De qui dépend-il ?

Règles de calcul sur $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$

On rappelle que $n = \dim E$

6

Proposition (opérations élémentaires TDP).
Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- ⋆ En effectuant $u_i \leftarrow u_i + \lambda\, u_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant n'est pas modifié :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_i+\lambda u_j,\dots,u_n) \;=\; \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n)$$

- ⋆ En effectuant $u_i \leftarrow \lambda u_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant est modifié :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,\lambda u_i,\dots,u_n) \;=\; \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n)$$

- ⋆ En effectuant $u_i \leftrightarrow u_j$, avec $i \neq j$, le déterminant est modifié :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_n) \;=\; -\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_n)$$

7
preuve

Proposition (règles de calcul).

— Le déterminant est inchangé si l'on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

— Le déterminant est multiplié par λ si l'on multiplie l'un des vecteurs par λ,
donc est multiplié par λ^n si l'on multiplie tous les vecteurs par λ.

— Le déterminant est multiplié par -1 si l'on permute (échange) deux vecteurs.

- **Pour les yeux.**

  - ⋆ $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,0_E,\dots,u_n) = \dots$

  - ⋆ Si $\quad x = u_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k u_k, \quad$ alors $\det_{\mathscr{B}}(x,u_2,\dots,u_n) = \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$
    Autrement dit,

$$\det_{\mathscr{B}}\left(u_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k u_k,\; u_2,\dots,\; u_n\right) \;=\; \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$$

  - ⋆ $\det_{\mathscr{B}}(\lambda u_1,\dots,\lambda u_n) \;=\; \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$

  - ⋆ $\det_{\mathscr{B}}(u_1,u_2,\dots,u_n) \;=\; -\det_{\mathscr{B}}(u_2,u_1,\dots,u_n)$

Dimensions 2 et 3

8
preuve

Proposition (dimension 2).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
Soit $x = ae_1 + be_2$ et $y = ce_1 + de_2$ deux vecteurs de E.
Alors $\det_{\mathscr{B}}(x, y) = ad - bc$.

- **Résumé.**
Si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x, y) = \ldots$, alors $\det_{\mathscr{B}}(x, y) = \ldots$

- **Exemple.** Considérons $E = \mathbb{K}_1[X]$ qui est de dimension 2 et $\mathscr{F} = (X+9,\ 8X+7)$.
Calculer le déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X)$.

9
preuve

Proposition (dimension 3).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit $x_1, x_2, x_3 \in E$ que l'on décompose ainsi dans la base $\mathscr{B}$:

$$\forall\, j \in [\![1,3]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j} e_i.$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3) = \ldots$

Alors on a :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3) = \quad & a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ +\ a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} \ +\ a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} \\ & - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3} \ -\ a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} \ -\ a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3}.\end{aligned}$$

Interprétation géométrique

- **Dans le plan.** Soit A, B, D trois points du plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B}$.
  Que représente $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$?
  On écrit sous forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{AD}} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'},$$

de sorte que $\overrightarrow{AB} = r\cos(\theta)e_1 + r\sin(\theta)e_2$ et $\overrightarrow{AD} = r'\cos(\theta')e_1 + r'\sin(\theta')e_2$.

Considérons le parallélogramme $ABCD$ construit à l'aide de A, B, D.
D'une part, l'aire **géométrique** de $ABCD$ est donnée par $rr'\left|\sin(\theta' - \theta)\right|$ (théorème de lycée).
D'autre part, un calcul montre que :

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) &= \begin{vmatrix} r\cos\theta & r'\cos\theta' \\ r\sin\theta & r'\sin\theta' \end{vmatrix} \\ &= rr'(\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta') \\ &= rr'\sin(\theta' - \theta) \end{aligned}$$

Ce réel est appelé *aire **orientée** du parallélogramme $ABCD$*.

- **Dans l'espace.** Soit A, B, C, D sont quatre points de l'espace $\mathbb{R}^3$ que l'on munit de sa base canonique notée $\mathscr{B}$. Alors on définit le *volume orienté du parallélépipède* construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ comme étant

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}).$$

Propriétés de $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$

10 **Proposition.** Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

— Les applications $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$ sont proportionnelles.
Plus précisément :

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \qquad \det_{\mathscr{B}'}(u_1, \ldots, u_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

— On a

$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$$

11 preuve **Proposition.** Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.

— Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.

— Si $\mathscr{F}$ est liée, alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$.

En particulier :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$$

II. Déterminant d'un endomorphisme

12 preuve

Théorème. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Il existe alors un unique scalaire δ, appelé *déterminant* de f, tel que :

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E, \qquad \forall (u_1,\dots,u_n) \in E^n, \qquad \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \delta \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n).$$

Ce scalaire δ s'appelle le déterminant de f, et se note $\det f$.

- **Pour les yeux.** On a

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E, \qquad \forall \mathscr{F} \in E^n, \qquad \det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{F})\big) \;=\; \det f \;\times\; \det_{\mathscr{B}}\big(\mathscr{F}\big)$$

13

Proposition (expression du déterminant de f à l'aide d'une base).
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a

$$\det f \;=\; \det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{B})\big) \qquad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base quelconque de } E$$

14

Proposition. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- Le déterminant de l'endomorphisme identité vaut 1, c'est-à-dire $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
- Soit $h_\lambda \in \mathscr{L}(E)$ l'homothétie de rapport λ. Alors $\det(h_\lambda) = \lambda^n$ où $n = \dim E$.
  Autrement dit,
  $$\det(\lambda\,\mathrm{id}_E) \;=\; \lambda^{\dim E}$$
- On a $\det(g \circ f) \;=\; \det g \det f$
- On a $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.

- **Remarque.** On a $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$, même si en général, $f \circ g \neq g \circ f$.

15 preuve

Proposition. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On a
$$f \text{ automorphisme} \quad\Longleftrightarrow\quad \det f \neq 0$$
Dans ce cas, on a alors
$$\det\big(f^{-1}\big) \;=\; (\det f)^{-1}.$$

16 sol → 15

Question.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(-X) \end{array}$
   Déterminer le déterminant de f.
2. On note f l'endomorphisme transposition défini sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $\det f$.
3. **Plus généralement.** Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que $\det s = (-1)^{\dim G}$.

17

Question. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.
Montrer que n est pair.

III. Déterminant d'une matrice carrée

Définition

18 **Définition.** Le *déterminant* d'une matrice carrée de taille n est le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- **Reformulation.** La définition dit donc que pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a:

$$\det A \overset{\text{def}}{=} \det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_n(A)) \qquad \text{où } \mathscr{B}_{\text{cano}} \text{ est la base canonique de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

- **Notation.** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j \leqslant n}$. Le déterminant de A se note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- **Matrice de taille** 2 **et** 3

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3} + a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3} + a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3} \\ -a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3} - a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3} - a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3}. \end{array}$$

- **Cas particuliers importants !** On a $\det(I_n) = 1$ et $\det(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) = 0$.

19 **Proposition (opérations élémentaires TDP).**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

- ⋆ En effectuant $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant n'est pas modifié :

$$\det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_n) = \det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

- ⋆ En effectuant $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant est modifié :

$$\det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda \det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

- ⋆ En effectuant $C_i \leftrightarrow C_j$, avec $i \neq j$, le déterminant est modifié :

$$\det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

20 **Proposition (règles de calcul pour le déterminant d'une matrice).**

- — Le déterminant d'une matrice est inchangé si l'on ajoute à l'une des colonnes une combinaison linéaire des autres.
- — Le déterminant d'une matrice est multiplié par λ si l'on multiplie une des colonnes par λ, donc est multiplié par λ^n si l'on multiplie toutes les colonnes par λ.
- — Le déterminant d'une matrice est multiplié par -1 si l'on permute (échange) deux colonnes.

21 **Proposition.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On a

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

22 preuve

Proposition (matrice et famille). Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors le déterminant de la matrice exprimant $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{B}$ est égal à $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$:

$$\det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\Big) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$$

- **En maths.** Soit $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
  Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Alors $\det A = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
  La proposition est donc du type $\det \text{Matrice} = \det_{\mathscr{B}}(\text{famille})$.

23 preuve

Proposition (endomorphisme et matrice).
Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de n'importe quelle de ses matrices.

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E, \qquad \det f = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)$$

- **En maths.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors $\det f = \det A$.
  La proposition est donc du type $\det \text{Endo} = \det \text{Matrice}$.

Propriétés

24 preuve

Proposition.

— Soit T une matrice de transvection, disons $T = I + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$.
Alors

$$\det T = 1$$

— Soit D la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Alors

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

25 preuve

Proposition. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a :

- ⋆ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ Le déterminant est hautement non linéaire, mais il est multi-linéaire
- ⋆ $\det(AB) = \det A \det B$ Le déterminant est multiplicatif En particulier, $\det(AB) = \det(BA)$
- ⋆ $\det(P^{-1}AP) = \det A$ Deux matrices semblables ont même déterminant

26 preuve

Proposition (matrice inversible). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On a

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

Dans ce cas, on a alors

$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}.$$

27 preuve

Proposition. Une matrice et sa transposée ont même déterminant.

- **En maths.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\det A = \det(A^\top)$

28 sol → 17

Question. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique *de taille impaire*.
Montrer que $\det(A) = 0$.

IV. Calcul des déterminants

Opérations sur les lignes ou les colonnes

- **Rappel.** Quelles sont les opérations élémentaires que l'on peut effectuer sur les colonnes d'une matrice ? Comme le détemrinant est-il modifié ?
- Même question pour les lignes.
- **Condition de nullité.** Donner une condition nécessaire et suffisante de nullité du déterminant d'une matrice.

Les règles de transformation d'un déterminant permettent :

— soit de prouver qu'il est nul

— soit d'introduire dans une colonne (ou une ligne) un maximum de 0 afin d'utiliser avec profit les résultats qui vont suivre (à savoir développer par rapport à une ligne ou une colonne).

29 **Question à l'oral !**
Sans les calculer explicitement, justifier que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

30 **Proposition.** Soit A une matrice carrée de la forme suivante (elle est triangulaire par blocs) :

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \quad \text{ou encore} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \star & \cdots & \star & \alpha \end{array}\right]$$

ou encore

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \widetilde{A} & \\ \star & & & \end{array}\right] \quad \text{ou encore} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \star \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{array}\right]$$

Alors

$$\det A = \alpha \det \widetilde{A}$$

31 preuve **Proposition.** Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

32 sol → 17 **Question.** Soit a, b et c trois scalaires. Donner une expression factorisée du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Développement suivant une colonne ou une ligne

33 **Définition.** Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.
On appelle :

— *mineur* d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

— *cofacteur* d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

34 preuve **Proposition.** Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— **Formule de développement suivant la colonne** j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

— **Formule de développement suivant la ligne** i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

- **Exemple.** Soit $a\in\mathbb{K}$. Calculons le déterminant suivant en développant suivant la $3^{\text{ème}}$ colonne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&a&2\\a&2&0\\a&1&3\end{vmatrix} &= (-1)^{1+3}\,2\begin{vmatrix}a&2\\a&1\end{vmatrix} + (-1)^{2+3}0\begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\,3\begin{vmatrix}1&a\\a&2\end{vmatrix}\\ &= 2(a-2a) + 3(2-a^2)\\ &= 6-2a-3a^2\end{aligned}$$

- **Technique de calcul.** Dans la pratique, pour calculer un déterminant, on pourra combiner l'utilisation des opérations élémentaires pour faire apparaitre des coefficients nuls et la formule de développement suivant une ligne ou une colonne (qui contient beaucoup de coefficients nuls par exemple).

35 sol → 18 **Question.** Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$. Exprimer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\delta_1=\begin{vmatrix}2a&2a&a-b-c\\2b&b-c-a&2b\\c-a-b&2c&2c\end{vmatrix}\qquad \delta_2=\begin{vmatrix}a&c&c&b\\c&a&b&c\\c&b&a&c\\b&c&c&a\end{vmatrix}$$

$$\delta_3=\begin{vmatrix}a+b&b+c&c+a\\a^2+b^2&b^2+c^2&c^2+a^2\\a^3+b^3&b^3+c^3&c^3+a^3\end{vmatrix}\qquad \delta_4=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&a^2&b^2\\1&a^2&0&c^2\\1&b^2&c^2&0\end{vmatrix}$$

36 sol → 20 **Question.** Soit $A=\begin{bmatrix}0&0&a\\1&0&b\\0&1&c\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ et $x\in\mathbb{K}$.
Exprimer $\det(xI_3-A)$ sous la forme d'une expression polynomiale développée suivant les puissances de x.

Déterminants

preuve et éléments de correction

7

Traitons le cas particulier où l'on ajoute au vecteur u_1 la combinaison linéaire $x = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k u_k$. Par linéarité par rapport à la première variable, on a :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1 + x, u_2, \dots, u_n) \;=\; \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \det_{\mathscr{B}}(u_k, u_2, \dots, u_n).$$

On conclut par caractère alterné : $\det_{\mathscr{B}}(u_1 + x, u_2, \dots, u_n) = \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

8

Par linéarité par rapport à la première variable, on a :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x, y) &= \det_{\mathscr{B}}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)\\ &= a\det_{\mathscr{B}}(e_1, ce_1 + de_2) + b\det_{\mathscr{B}}(e_2, ce_1 + de_2).\end{aligned}$$

Par linéarité par rapport à la seconde variable, cela donne :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_1, ce_1 + de_2) = c\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_1) + d\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2)$$

et de même :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_2, ce_1 + de_2) = c\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1) + d\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_2).$$

Par caractère alterné et antisymétrique de l'application $\det_{\mathscr{B}}$ et le fait que $\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2) = 1$, on en déduit :

$$\det_{\mathscr{B}}(x, y) = ad - bc.$$

9

— On développe par linéarité par rapport à chaque variable :

$$(\star) \qquad \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant 3} a_{1,i}\, a_{2,j}\, a_{3,k} \det_{\mathscr{B}}(e_i, e_j, e_k).$$

— Par caractère alterné de l'application $\det_{\mathscr{B}}$, tous les termes dans la somme qui précède où dans la liste (e_i, e_j, e_k) figure (au moins) deux fois le même vecteur sont nuls. Il ne reste que 6 termes de la forme $\lambda_{i,j,k} f(e_i, e_j, e_k)$ avec i, j, k trois entiers distincts de $\{1, 2, 3\}$ et $\lambda_{i,j,k}$ un scalaire.

— Pour simplifier chacun des termes, on utilise la propriété d'antisymétrie et le fait que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$. Ainsi : DESSIN

— Par conséquent, la relation $(\star)$ se réécrit :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3) = \;& a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3}\\ & - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3} - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} - a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3},\end{aligned}$$

ce qui conclut.

11

$(i) \Rightarrow (ii)$ ...

$(ii) \Rightarrow (i)$ Puisque E est de dimension n, si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de E, alors $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E. Supposons donc que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ne soit pas une base de E. Alors c'est une famille liée. L'un des vecteurs est donc combinaison linéaire des autres. Supposons sans perte de généralité que $u_1 \in \mathrm{Vect}(u_2,\dots,u_n)$ et notons $(\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que $u_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k u_k$.

Par linéarité selon la première variable, on a :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \det_{\mathscr{B}}(u_k,u_2,\dots,u_n).$$

Par caractère alterné de l'application $\det_{\mathscr{B}}$, on conclut :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) = 0.$$

12

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E.

Unicité. Si λ convient, alors on a :

$$\forall\,(u_1,\dots,u_n) \in E^n \ \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$$

et, en particulier, pour $(u_1,\dots,u_n) = \mathscr{B}$, on obtient $\lambda = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$.

Cela prouve l'unicité ainsi que le dernier résultat.

Existence.

— Par linéarité de f, l'application de E^n dans $\mathbb{K}$:

$$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big)$$

est clairement linéaire par rapport à chaque variable et alternée ; elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

Par suite, il existe un scalaire λ tel que, pour tout $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$, on ait :

$$\det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n). \qquad (*)$$

— Il reste à prouver que le scalaire λ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ considérée.

Soit $\mathscr{B}'$ une base quelconque de E. L'application $\det_{\mathscr{B}'}$ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$ et il existe donc un scalaire α tel que $\det_{\mathscr{B}'} = \alpha \det_{\mathscr{B}}$.

En multipliant la relation $(*)$ par α, on obtient, pour tout $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathscr{B}'}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}'}(u_1,\dots,u_n),$$

ce qui prouve le résultat.

15

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. On a :

$$\det f = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big).$$

Donc, d'après TRUC, le scalaire $\det f$ est non nul si et seulement si $\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ est une base de E, c'est-à-dire si et seulement si f est un automorphisme de E.

TRUC permet alors d'écrire :

$$\det(f)\det\big(f^{-1}\big) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1 \quad \text{et donc} \ \ \det\big(f^{-1}\big) = (\det f)^{-1}.$$

16

1. Notons $p = \dim(F)$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ une base de G. La famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et l'on a alors :

$$\begin{aligned}\det s &= \det_{\mathscr{B}}\big(s(e_1), \ldots, s(e_n)\big)\\ &= \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_p, -e_{p+1}, \ldots, -e_n) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\dim G}.\end{aligned}$$

2. L'endomorphisme u est la symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Comme $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, la question précédente donne $\det(u) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

22

Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ la famille $\mathscr{F}$.

— Tout d'abord, l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)\Big) \end{array}$ est bien définie.

— Ensuite, cette application est n-linéaire par

  — linéarité de l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$

  — n-linéarité du déterminant.

— L'application φ est évidemment alternée : si deux vecteurs d'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ sont égaux, les colonnes correspondantes de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ sont égales et donc $\det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

— Enfin, $\varphi(\mathscr{B}) = \det I_n = 1$.

D'après...., $\varphi = \det_{\mathscr{B}}$, ce qui conclut.

23

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a :

$$\det A = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) = \det f.$$

24

En effet, si l'on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, D est la matrice de la famille $(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ et l'on a donc :

$$\det D = \det_{\mathscr{B}}(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = \Big(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\Big) \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Supposons que M soit une matrice de transvection et fixons $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ distincts et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = T_{i,j,\lambda}$. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Alors, $\det M = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_j + \lambda e_i, \ldots, e_n) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n)$.
Ainsi, $\det M = 1$.

25

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.

— La matrice de λf dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est λA et l'on a :

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda f) = \lambda^n \det f = \lambda^n \det A.$$

— La matrice de $f \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est AB et l'on a :

$$\det(AB) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$

— On applique le résultat précédent :

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}A)\det(P) = \det(P)\det(P^{-1}A) = \det(PP^{-1}A) = \det(A).$$

26

C'est une conséquence directe de ...... que l'on applique à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

27

— Si A n'est pas inversible, alors $A^\top$ n'est pas inversible et $\det A^\top = 0 = \det A$.

— Supposons A inversible. D'après ...., il existe $E_1, \ldots, E_N$ des matrices d'opérations élémentaires telles que :

$$A = E_1 \cdots E_N$$

On a alors $A^\top = E_N^\top \cdots E_1^\top$ puis, par propriété multiplicative :

$$\det A = \det E_1 \cdots \det E_N \quad \text{et} \quad \det A^\top = \det E_N^\top \cdots \det E_1^\top$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer le résultat sur les matrices d'opérations élémentaires. Fixons donc E une telle matrice :

  — si E est une matrice de dilatation ou d'échange, alors $E^T = E$ donc $\det E^T = \det E$;

  — si E est une matrice de transvection, alors $E^\top$ est aussi une matrice de transvection et d'après l'exemple ...., $\det E = 1 = \det E^\top$.

28

On a

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

31

— Comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, il suffit de démontrer le résultat pour les matrices triangulaires supérieures.

— Si A est triangulaire supérieure, ...; nous donne :

$$\det A = a_{n,n} \det A',$$

où A' est la sous-matrice de A obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Le résultat est alors immédiat par récurrence.

32

On a :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} && \text{(mise en facteur dans } L_2 \text{ et } L_3\text{)} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= (b-a)(c-a)(c-b). && \text{(déterminant d'une matrice triangulaire)}
\end{aligned}$$

34

Notons $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Fixons $j \in [\![1, n]\!]$.
Puisque $C_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$, la linéarité du déterminant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne donne :

$$\begin{aligned}
\det A &= \det\nolimits_{\mathscr{B}}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{\det\nolimits_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)}_{:= D_{i,j}}.
\end{aligned}$$

Pour conclure, prouvons que : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]\, D_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$.
En effectuant les échanges suivants entre colonnes successives :

$$C_k \leftrightarrow C_{k+1} \quad \text{pour } k \text{ allant de } j \text{ à } n-1,$$

on obtient :

$$D_{i,j} = (-1)^{n-j} \det\nolimits_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n, e_j).$$

En effectuant alors les échanges suivants entre lignes successives :

$$L_k \leftrightarrow L_{k+1} \quad \text{pour } k \text{ allant de } i \text{ à } n-1,$$

on obtient $D_{i,j} = (-1)^{n-j}(-1)^{n-i} \det(B) = (-1)^{i+j} \det(B)$, avec $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

dessin

où A' est la sous-matrice de A obtenue en supprimant sa $i^{\text{ème}}$ ligne et sa $j^{\text{ème}}$ colonne.
On a alors, d'après ......

$$\det(B) = \det(A') = \Delta_{i,j} \qquad \text{puis} \qquad D_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

D'où le résultat.

1. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2$ puis la factorisation par $a+b+c$ dans L_3 donnent

$$A = (a+b+c)\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_3$ donnent :

$$A = (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a-b-c \\ 0 & -a-b-c & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a+b+c)^3 \text{ et (développement par rapport à } C_1\text{).}$$

2. Les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$ puis la factorisation par $(a-b)$ dans C_1 et C_2 donnent :

$$\begin{aligned} B &= (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix} \\ &= (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & a+b & 2c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \end{aligned}$$

En développant deux fois successivement par rapport à la première colonne, on obtient :

$$B = (a-b)^2\begin{vmatrix} a+b & 2c \\ 2c & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c).$$

3. On a

$$\begin{aligned} C &= 2\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3 \\ \text{mise en facteur dans } C_1 \end{array} \\ &= 2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} && \text{factorisations par } a, b, c \text{ dans } C_1, C_2, C_3 \\ &= 2abc(b-a)(c-b)(c-a) \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ 0 & a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \end{vmatrix} && \text{développement par rapport à } C_1 \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2b^2 & a^2-c^2-b^2 & b^2 \\ a^2-b^2-c^2 & -2c^2 & c^2 \end{vmatrix} && \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{matrix} \\
&= -\left(4b^2c^2 - (a^2-b^2-c^2)^2\right) && \text{développement par rapport à } L_1 \\
&= (a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc) \\
&= (a^2-(b-c)^2)(a^2-(b+c)^2) \\
&= (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c).
\end{aligned}$$

36

On développe par rapport à la colonne C_3 :

$$\begin{aligned}
\det(xI_3 - A) &= \begin{vmatrix} x & 0 & -a \\ -1 & x & -b \\ 0 & -1 & x-c \end{vmatrix} \\
&= (x-c)\begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} - (-b)\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-a)\begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= x^3 - cx^2 - bx - a.
\end{aligned}$$